UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CESAR AUGUSTO OLIVEIRA BOMGIOVANI

LARA ROLIM DE ARRUDA ROCHA

MARCELO PINTO

RODRIGO BUZONI

THIAGO VESPOLI

Teoria das Proporções de Eudoxo e os Incomensuráveis

SÃO PAULO - SP

2018

Introdução

Este trabalho inicialmente discutirá os conceitos de Números e Formas a partir das civilizações egípcias, babilônicas e gregas antes de abordar os Números Incomensuráveis perpassando pelo Método da Exaustão e finalmente pela Teoria das Proporções e encerrando com a inspiração de Dedekind.

O diferencial desse trabalho será a abordagem do ponto de vista histórico pois normalmente ignoram a História da Matemática e dos povos que investigaram e desenvolveram a Matemática dando a impressão que “a história constitui-se como mera alegoria do instrumento matemático”.(KISTEMANN, 2008).

Nossa História começa com o surgimento das tábuas aritméticas dos povos da Babilônia e permite então o cálculo de áreas para às várias atividades dos homens, gerando uma enorme influência no cotidiano desses povos e servindo de base para o surgimento na sociedade grega dos principais teoremas da geometria.

Porém é nesta sociedade em que o incoveniente número irracional aparece e se tornar um problema já que na Escola Pitágora, a filosofia é de que tudo é possível descrever através de Números.

A Incomensurabilidade dos números, que pode ter gerado uma crise na Escola Pitágora, perdurou por vários séculos e através de provas sistemáticas pelo Teorema das Proporções e do Método da Exaustão pode-se garantir a existência dos número e lidar com grandezas não comensuráveis.

Dos egípcios aos gregos

Como dito anteriormente, a História do desenvolvimento da matemática sempre aparece em segundo plano e não como participante ativo desses episódios. A necessidade de um calendário seguro em uma sociedade que a agricultura é a atividade mais importante é fundamental e foi assim que os gregos desenvolveram há mais de 6 mil anos um calendário dividido em 12 meses de 30 dias cada e mais 5 dias reservados para festividades, completando os 365 dias do ano. Já o comércio, a engenharia primitiva e a necessidade de infra-estrutura fizeram com que a Antiga Mesopotâmia inventasse e desenvolvesse a matemática para as aplicações da época.

A partir dos trabalhos dos sumérios[1], os babilônios tiveram condições de criar e compilar as famosas tábuas aritméticas. São com esses povos que provavelmente começaram a pensar nos números negativos como números, já que eles aparecem em suas soluções de problemas mas não se pode afirmar que eles tinham um raciocínio dedutivo mas sim, seu caráter empírico.

Os babilônios conheciam três teoremas geométricos e um deles em especial mas nenhum como são apresentados e demonstrados atualmente, já que não havia o rigor matemático e dedutivo que utiliza-se nos tempos atuais. Um deles é a existência de um ângulo reto inscrito em um semicírculo, o segundo é o chamado hoje como Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo e o terceiro são os lados dos ângulos correspondentes de triângulos semelhantes são proporcionais.

Gregos: bagagem dos antigos matemáticos

Foram mais de dez séculos desenvolvendo a lógica matemática, com nascimento entre 600 a.C com o pensador Tales de Mileto e perpassando pela Escola Pitagórica que pregava a comensurabilidade de todas as grandezas e que a “Matemática era a chave para a leitura e compreensão do mundo” (KISTEMANN, 2008).

Os pitagóricos acreditavam que tudo podia ser medido, ou seja, ter uma divisibilidade finita, e portanto, não havia nada que pudesse ser incomensurável. Eles acreditam que os números racionais eram suficientes

[1] Este povo afortunado inventou uma escrita eficiente, a cuneiforme, o que favoreceu o registro e o manuseio aritmético de seus trabalhos de medição. A astronomia e aritmética sumerianas eram extremamente avançadas para a época, sendo necessários ressaltar que uma espécie de álgebra evolui com uma rapidez incrível (NEUGEBAUER, 1957).

para se comparar dois segmentos de reta pois “a partir de dois segmentos quaisquer, supunham que existia um segmento u que “cabia” um número inteiro de vezes num deles e um número inteiro de vezes no outro.” (KISTEMANN, 2008.

A suposta crise na Escola Pitagórica foi quando em algum momento, os gregos sabiam da existência dos Incomensuráveis mas não trataram e não desenvolveram nenhuma teoria com eles. Alguns historiadores associam o surgimento dessas grandezas com o cálculo do Teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo em que a diagonal é um número irracional.

A crise da matemática

Com o surgimento da ideia do incomensurável, uma suposta crise ocorreu na matemática, uma vez que iria contra os princípios Pitagóricos da época e uma das hipóteses do Teorema de Tales é que os segmentos envolvidos neste teorema são comensuráveis. Com o aparecimento dos incomensuráveis, viria a necessidade de provar que o Teorema de Tales também valeria para estes segmentos não comensuráveis.

Por outro lado, há uma segunda visão que vai contra essa hipótese de que houve uma crise na matemática. Segundo Carlos H. B. Gonçalves e Claudio Possani em seu texto “Revisitando a Descoberta dos Incomensuráveis na Grécia Antiga”, eles relatam que esta outra versão ficou restrita aos meios especializados da história antiga ou da história da matemática e diz que, de acordo com esta versão, não há evidências da crise.

> *“A segunda versão da descoberta dos incomensuráveis é ainda hoje restrita quase que somente aos meios especializados da história antiga ou da história da matemática. Segundo ela, as fontes mais confiáveis para o estudo do assunto não trazem nenhuma evidência de uma crise, que não teria sido senão o resultado de uma leitura pouco rigorosa de fontes menos confiáveis.”* [2]

[2] *GONÇALVES, Carlos H. B.; POSSANI, Claudio. Revisitando a Descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga. Matemática Universitária, n° 47.*

A principal ideia para a crise

A hipótese da crise é sustentada pelo fato de que a aparição dos incomensuráveis é contrária a base fundamental do pitagorismo.

> *"Tinha sido uma base fundamental do pitagorismo que a essência de todas as coisas, na geometria bem como os negócios práticos e teóricos do homem, é explicável em termos de arithmos, ou propriedades intrínsecas de números inteiros ou suas razões"*[3]

A atribuição da descoberta dos incomensuráveis é ainda duvidosa. Alguns autores atribuem ao próprio Pitágoras tal feito, outros ao pitagórico Hipaso de Metaponto. A lenda é que Hipaso foi jogado ao mar ou expulso da comunidade pitagórica quando revelou o segredo dos incomensuráveis a estranhos.

> *"Tão grande foi o 'escândalo lógico' que por algum tempo foram feitos esforços para manter a questão em sigilo, e há uma lenda que o pitagórico Hipaso (ou um outro talvez) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe erigido um túmulo, como se estivesse morto"*[4]

Hipaso expôs o problema do dodecaedro regular, uma esfera formada a partir de doze pentágonos regulares, no qual a aresta do sólido é incomensurável com o raio da circunferência inscrita ou circunscrita. A ideia da descoberta, da revelação do segredo dos incomensuráveis implicando na punição de quem tenha exposto o problema da incomensurabilidade é evidenciado em textos de vários autores, como Carlos Gonçalves e Claudio Possani escrevem em seu texto.

> *"Dizem sobre Hipaso que estava entre os pitagóricos e, por ter exposto e escrito primeiro a esfera a partir de doze pentágonos,*

---

[3] BOYER, C. *A history of mathematics.* 2. Ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

[4] Eles, H. *An introduction to the history of mathematics*. 3. Ed. New York: Holt & Rinehart Winston, 1969

morreu no fundo do mar, porque fora ímpio, e ficou com a fama de descobridor, mas dizem que tudo provém daquele homem." [5]

Ideias contrárias à crise

Em suma, autores que afirmam que não houve uma crise na matemática dizem que o que induz a pensarem que houve uma crise é fruto de anacronismo e estes autores se posicionam contrário à crise por falta de evidências documentadas.

> *"Outra descoberta famosa atribuída aos pitagóricos é usualmente formulada assim: O número √2 é irracional; mas essa formulação é anacronistica de vários modos. [...] a descoberta é tida como tendo provocado uma crise nos fundamentos da matemática daquele tempo; mas comentadores como o próprio Aristóteles não a mencionam, e a ideia pode ser uma interpolação anistórica de alguns gregos posteriores, ou mesmo um mal-entendido. [...] Assim, longe de experimentar uma crise de fundamentos, os gregos antigos podem ter gozado uma época de grandes jornadas matemáticas"* [6]

Em relação ao problema de incomensurabilidade do dodecaedro regular, Eva Sachs supõe que se conhecesse este sólido de maneira empírica e Walter Burket diz que a frase abaixo, encontrada em escritos do Platão e do Plutarco, mostra que bolas de crianças eram feitas em 12 partes.

δωδεκάσκυτοι σφαῖραι

Ainda mais, dodecaedros de bronze são evidências arqueológicas dos séculos IX ao VI. Em relação à incompatibilidade da incomensurabilidade com o princípio de que tudo é número da sociedade pitagórica, David Fowler mostra que não há fontes documentais que evidenciem essa incompatibilidade. Sua principal argumentação é primeiramente que a geometria grega tinha um caráter fortemente não-aritmetizado, de modo a ser possível fazer geometria sem necessariamente ter de associar um número a cada segmento ou área.

---

[5] Jâmblico. *Communi mathematica scientia.* Nicola Festa (ed.). Leipzig: Teubner, 1891. (Bibliotheca scriptorium Graecorum et Romanorum Teubneriana, 1443)

[6] Grattan-Guinness, I. *The Fontana history of the mathematical sciences. The rainbow of mathematics.* London: Fontana Press, 1997.

Por exemplo, para obter a razão entre 12 e 7:

– subtraia 7 de 12 tantas vezes quanto possível: 1 vez, e ficamos com 7 e 5;

– subtraia 5 de 7 tantas vezes quanto possível: 1 vez, e ficamos com 5 e 2;

– subtraia 2 de 5 tantas vezes quanto possível: 2 vezes, e ficamos com 2 e 1;

– subtraia 1 de 2 tantas vezes quanto possível: 2 vezes, e ficamos com o 1.

Assim, a razão entre 12 e 5 estaria relacionada com a sequência de resultados 1 vez, 1 vez, 2 vezes, 2 vezes, isto é, à subtração recíproca e contínua dos dois números.

A crise da incomensurabilidade parece só existir quando lemos os textos gregos com os nossos termos, esquecendo-nos de prestar atenção no modo como os autores históricos viam a matemática. Quando tentamos nos colocar no ponto de vista dos antigos gregos, em especial dos primeiros pitagóricos, os motivos para a crise como que desaparecem.

Eudoxo

O matemático, astrônomo e filósofo grego Eudoxo de Cnido viveu entre os anos de 408/355 a.C. Filho de uma família de médicos, estudou medicina e exerceu a profissão durante alguns anos e viajou para a Itália, estudando com discípulos de Pitágoras Arquitas e participando de seminários filosóficos junto com Platão e outros acadêmicos em Atenas. Eudoxo também aprendeu astronomia com os egípcios e registrou pela primeira vez que a duração do ano é 365 dias e 6 horas. Por volta de 350 a.C Eudoxo foi incumbido de escrever a constituição da cidade de Cnido.

Teoria das proporções

Segundo alguns alguns autores Eudoxo foi o primeiro a resolver completamente o problema das grandezas incomensuráveis criando uma teoria de proporções que que era capaz de lidar com grandezas comensuráveis e incomensuráveis, encontrando uma maneira de definir a igualdade de duas razões utilizando apenas números positivos. Abaixo está o trecho de sua teoria que encontra-se no livro V do livro de Euclides.

> *"Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondentes".* (Elementos de Euclides, Livro V, definição 6).

Para ilustrar, abaixo estão as definições de proporções, em linguagem moderna, para os comensuráveis e para os incomensuráveis. É interessante observar que ele conseguiu contornar o problema dos "incomensuráveis" simplesmente através do uso de comparações "menor", "maior" e "igual" para definir igualdades evitando discutir a natureza dos números irracionais, e por consequência criou uma teoria geral de proporções (que serve para comensuráveis e incomensuráveis).

Proporção comensurável

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},\ então,\ dados\ m,\ n\ \in \mathbb{N} : \frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}\ e\ \frac{AE}{EC} = \frac{m}{n},\ portanto:\ n\ .\ AD\ =\ DB\ .\ m$$

Proporção incomensurável

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},\ dados\ m,\ n\ \in \mathbb{N} : \frac{AD}{DB} < \frac{m}{n}\ e\ \frac{AE}{EC} < \frac{m}{n},\ se\ n\ .\ AD < DB\ .\ m\ então\ n\ .\ AE < m.EC$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},\ dados\ m,\ n\ \in \mathbb{N} : \frac{AD}{DB} > \frac{m}{n}\ e\ \frac{AE}{EC} > \frac{m}{n},\ se\ n\ .\ AD > DB\ .\ m\ então\ n\ .\ AE > m.EC$$

Dedekind e os Números Irracionais

Richard Dedekind encontrou uma maneira de relacionar os números racionais com os números irracionais, questionando o modelo de continuidade, trazendo a "linha numerada real", um conceito que levou cerca de vinte séculos a serem tratados de maneira algébrica sem o apoio da geometria, onde era possível desenhar um quadrado de lado 1 unidade, porém não é possível ter o valor algébrico da sua diagonal.

Formado na Faculdade Göttingen, Alemanha, Dedekind trabalhou firme nos problemas dos números irracionais, questionando sobre a continuidade dos números reais conceituados na época, Galileu e Leibniz diziam que a continuidade da reta real é suficiente pela afirmação de que entre dois pontos de uma reta sempre vai existir um terceiro, essa afirmação ou característica pode ser assumida para os números racionais, os quais não formam um "continuum" (não é continuo), ou seja, as retas dos racionais representados em uma reta, estaria cheia de "espaços vazios".

Pensando sobre os espaços vazios que faltam na reta real, Dedekind refletindo sobre suas aulas de cálculo se perguntou sobre o que haveria nas grandezas geométricas que as diferencia dos números racionais. Richard pesquisou e se aprofundou no assunto, buscando inspiração na teoria das proporções de Eudoxo (IV a.C.), no qual após tanta dedicação, concluiu que a continuidade de uma reta estaria na separação da mesma em dois conjuntos, assim suas palavras foram:

"Por essa observação trivial, o segredo da continuidade será revelado"

Para um melhor entendimento, sua ideia seria:

> *"Cortando uma reta em duas partes podemos separar os números racionais em duas classes A e B onde todo número da primeira classe A é menor que todo número da segunda classe B. Dessa forma, cada corte produz um e um só número real. Se A tem um maior elemento ou se B tem um menor elemento, o corte define um número real racional; mas se A não tem um maior elemento e B não tem um menor elemento, então o corte define um número real irracional." (CARAÇA, 1978, p. 135).*

Assim ficou conhecido os cortes de Dedekind, no qual mostra a continuidade da reta relacionando os números racionais com os irracionais. A seguir mostra um exemplo:

$A = \{x \in Q \,/\, x < 5/2\}$ e

$B = \{x \in Q / \, x \geq 5/2\}$

A e B são os conjuntos disjuntos que cortam a reta em duas partes, os quais definem o número 5/2. Observe que nesse caso, B tendo menor elemento, o corte define um número real racional.

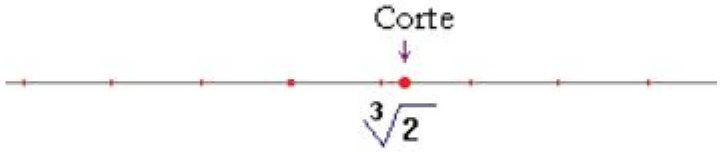
Assim como um outro exemplo para:

$A = \{x \in Q \,/\, x^3 < 2\}$ e

$B = \{x \in Q \,/\, x^3 > 2\}$, determinam o

corte que define o número real. Observe que, nesse caso, A não tendo um maior

elemento e B não tendo menor elemento, o corte define um número real irracional.



Seguindo essa definição, Richard Dedekind conseguiu mostrar a continuidade da reta real, relacionando a ordem dos números racionais e irracionais, assim ele finalmente criou os números reais, como conhecemos atualmente, eliminando por completo os “espaços vazios” formados pela reta dos racionai. Mais para frente, Bertrand Russell aprimora essa definição, dizendo que ao definir um conjunto da classe A ou B, consequentemente estaria definindo a outra, logo apenas uma classe bastava para determinar o número real.

Dedekind em um ensaio denominado Continuidade e números Irracionais, aparecido em 1872, mostra que existem mais pontos na linha reta do que números irracionais, assim os conjuntos dos racionais não é suficiente para ser contínuo e que é preciso criar novos números para o domínio numérico seja tão completo quanto a reta. Por meios dos seus estudos, Dedekind diz:

> *"Por muito tempo pensei em vão sobre isso, mas finalmente achei o que buscava. Consiste no seguinte:*
> *Se todos os pontos de uma reta são divididos em duas classes, de modo que, qualquer ponto de primeira fique à esquerda de qualquer ponto da segunda classe, então, existe apenas um ponto que separa os pontos em duas classes. Não creio estar enganado em pensar que todos aceitarão imediatamente a verdade dessa afirmação.*
> *Além disso, a maioria de meus leitores ficará desapontada ao saber que através dessa observação banal será revelado o segredo da continuidade. Fico satisfeito por todos acharem o princípio acima óbvio, pois sou totalmente incapaz de prova de que ele é correto, nem creio que alguém tenha esse poder." (CARAÇA, 1978, p.140)*

Outros também desenvolveram o conceito de continuidade como Cavalieri, discípulo de Galileu e com a ajuda de outros matemáticos, pode-se afirmar que embora tenha uma infinidade de números racionais, como pensavam os gregos, há mais números irracionais na linha do real, fazendo essa ser "mais contínua" do que a linha do racional.

Conclusão

Durante toda a história, sempre houve uma mutação de ideias e de paradigmas sobre o que se é aceito ou tido como verdade. Thomas Kuhn talvez ousasse dizer que a história por trás desse trabalho de análise é repleta de quebras de paradigmas.

Começamos com os babilônios que deduziam e demonstravam tudo através da geometria e do estudo das formas e tábuas aritméticas. Encontramos aqui muitos anos de desenvolvimento de pensamento matemático geométrico, e a criação da ideia de comensurabilidade pelos gregos pitagóricos.

Os pitagóricos acreditavam que todo o mundo podia ser interpretado pelo cálculo dos números (ou valores) que conhecemos hoje como racionais, ou seja, a partir da ideia de uma reta que parte de dois pontos, todos os tamanhos eram possíveis com divisões precisas (números racionais).

Porém os mesmos gregos a partir do problema do triângulo retângulo de catetos de lado 1, chegaram a uma ideia que os mesmos não acreditavam possível, a incomensurabilidade dos números, a hipotenusa desse triângulo era impossível, até então. Começa assim então o que é chamada por muitos de crise e contestada por outros pela ausência de evidência. É engraçado notar que para falar sobre a quebra de um paradigma a comunidade histórica atual esteja em debate sobre qual ideia será a mais aceita.

Após muita crise (ou não) e desenvolvimento da matemática, vem Eudoxo com a teoria das proporções e posteriormente Dedekind com a ideia de “uma reta real” que faz mais sentido, por ser mais contínua, essa é a última das muitas quebras de paradigma expostas aqui, porém não é nem de perto a última da história da matemática, muito menos da história da ciência. A criação, demonstração e aceitação da reta real como conhecemos é e foi um marco muito importante da história, que gerou compreensão e muitos avanços possíveis.

Bibliografia

NOVODOVOSKI , Adelmo, STASCOVIAN, Juliana. Além do teorema: uma visão da vida e obra de Pitágoras de Samos. 2015. Disponivel em: https://even3storage.blob.core.windows.net/anais/33779.pdf. Acessado 30/10/2018.

SANTOS FILHO, Euclides Araújo dos. Alguns Tópicos da Escola Pitagórica. 27-Jun-2017. Disponivel em: http://repositorio.ufba.br/ri/handle/ri/23308. Acessado em 30/10/2018.

KISTEMANN JR, Marco Aurélio. Sobre a teoria das proporções, o método da exaustão e os incomensuráveis. Disponivel em : http://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/51. Acessado em 30/10/2018

DE CARVALHO, Tadeu Fernandes; D'OTTAVIANO, Itala M. Lofredo. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. **Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 8, n. 1, mar. 2008. ISSN 1983-3156. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/544>. Acesso em: 30 out. 2018.

ÁVILA, Geraldo. Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de Matemática. 2010. Disponivel em: https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm7.pdf. Acessado em 30/10/2018.

BLANK , Brian E. The Calculus Wars. Notices of the American Mathematical Society, edição de Maio de 2009. Disponível em https://www.ams.org/notices/200905/rtx090500602p.pdf. Acessado em 30/10/2018

GONÇALVES, C. H. B. ; Possani, C. . **Revisitando a Descoberta dos Incomensuráveis na Grécia Antiga**. Matemática Universitária, v. 47, p. 16-24, 201

STILLWELL, John. Mathematics and its History. p. 56-57. Third Edition. 2010. Ed. Springer.