

Anexo A: Equações diferenciais de equilíbrio**Anexo B: Obtenção de equações constitutivas**

Anexo C: Geometria de feixes helicoidais

Um dos elementos estruturais mais importantes de um tubo flexível ou de um cabo umbilical são os tendões que constituem as armaduras helicoidais de tração. Pelo fato de tais elementos apresentarem uma dimensão (comprimento) preponderante sobre as demais (largura e espessura), podemos representar sua geometria através das equações paramétricas de seu eixo. O objetivo deste anexo é apresentar alguns elementos de geometria que possibilitem a determinação de parâmetros importantes na análise estrutural das armaduras helicoidais (como a curvatura e tortuosidade iniciais, as variações de curvatura e tortuosidade, etc.). Cada um dos itens seguintes irá tratar da geometria destas camadas (baseando-se nas equações paramétricas do eixo central para um tendão genérico), considerando as seguintes situações:

- (1) Geometria inicial da camada: trata do estudo geométrico do eixo central do tendão de uma camada helicoidal em sua configuração não deformada;
- (2) Geometria da camada considerando carregamentos axissimétricos: trata do estudo geométrico do eixo central do tendão de uma camada helicoidal considerando apenas deformações provenientes de carregamentos axissimétricos;
- (3) Geometria da camada considerando flexão sem escorregamento: trata do estudo geométrico do eixo central do tendão de uma camada helicoidal considerando que o cilindro suporte que sustenta a camada (substrato) seja submetido a uma curvatura constante e que não haja escorregamento relativo entre a camada e o substrato;
- (4) Geometria da camada considerando flexão com escorregamento: idem ao anterior, considerando agora o escorregamento total entre os tendões que compõem a camada helicoidal e o substrato.

Para diferenciar os parâmetros “comuns” que ocorrem em mais de uma situação (como, por exemplo, as expressões da curvatura nas situações (1), (2), (3) ou (4)), serão

utilizados subscritos que remetem ao caso particular que está sendo analisado. Desta forma, a expressão da curvatura para a situação (1), que trata da configuração não-deformada da camada (Σ_1), será nomeada c_1 , e assim por diante. Os parâmetros que permanecerem constantes não serão diferenciados por subscritos.

C.1. Geometria inicial da camada

Admitiremos que a geometria inicial do tubo ou cabo e das camadas que o constituem esteja associada à sua configuração não-deformada (Σ_1). Nesta configuração admite-se que a estrutura (tubo ou cabo) esteja totalmente descarregada e tenha seu eixo central perfeitamente reto. Nestas condições, é razoável associarmos as equações paramétricas do eixo central de um tendão genérico, pertencente a uma dada camada helicoidal, às equações paramétricas de uma hélice cilíndrica de passo constante, que são dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= R_1 \cdot \cos \mathbf{q}_1 \\ y_1 &= R_1 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_1 \\ z_1 &= \frac{h_1 \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0)}{2p} = \frac{R_1 \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0)}{\tan \mathbf{a}_1} \end{aligned} \quad (\text{c.1})$$

onde R_1 é o raio do cilindro que suporta o eixo central do tendão (hélice); \mathbf{q}_1 é o valor do ângulo, medido a partir do eixo fixo X , que define a posição angular de um ponto da hélice; \mathbf{q}_0 é o valor que \mathbf{q}_1 assume no plano $z = 0$; h_1 representa o passo da hélice e \mathbf{a}_1 é o ângulo de assentamento inicial da hélice, medido a partir de um eixo paralelo ao eixo Z (ver figura c.1).

O vetor posição de um ponto genérico (C_1) pertencente à curva descrita pelas equações paramétricas (c.1) é então:

$$\vec{r}_{c1} = (C_1 - O) = R_1 \cdot \cos \mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_x + R_1 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_y + \frac{R_1 \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0)}{\tan \mathbf{a}_1} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.2})$$

onde $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ são os versores associados respectivamente às direções X , Y e Z do sistema de coordenadas fixo $OXYZ$ indicado na figura c.1.

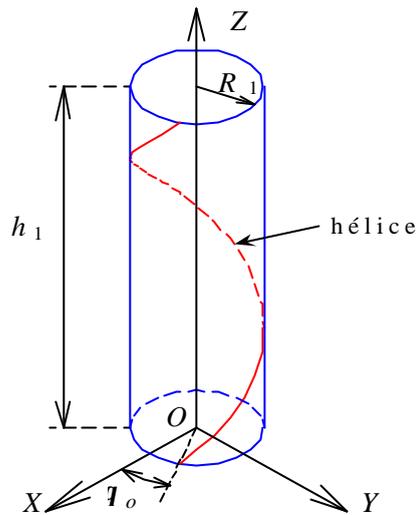


Figura c.1: Representação do eixo central de um tendão por uma hélice cilíndrica.

O comprimento de arco dS_1 de um elemento infinitesimal é calculado através de:

$$dS_1 = \left(\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dq_1} \right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dq_1} \right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dq_1} \right)^2} \right) dq_1 \quad (c.3)$$

resultando:

$$dS_1 = \frac{R_1 \cdot dq_1}{\text{sen } \mathbf{a}_1} \quad (c.4)$$

C.1.1. Cálculo da curvatura e da tortuosidade iniciais

O versor tangente à curva formada pelo eixo central do tendão passando pelo ponto C_1 é definido por:

$$\vec{t}_1 = \frac{d\vec{r}_{c1}}{dS_1} = \frac{d\vec{r}_{c1}}{dq_1} \cdot \frac{dq_1}{dS_1} \quad (c.5)$$

resultando:

$$\vec{t}_1 = -\text{sen } \mathbf{a}_1 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_x + \text{sen } \mathbf{a}_1 \cdot \cos \mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_y + \cos \mathbf{a}_1 \cdot \vec{e}_z \quad (c.6)$$

Utilizando, agora, as fórmulas de Frenet dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{n}_1}{dS_1} &= \mathbf{t}_1 \cdot \vec{b}_1 - \mathbf{c}_1 \cdot \vec{t}_1 \\
\frac{d\vec{b}_1}{dS_1} &= -\mathbf{t}_1 \cdot \vec{n}_1 \\
\frac{d\vec{t}_1}{dS_1} &= \mathbf{c}_1 \cdot \vec{n}_1
\end{aligned} \tag{c.7}$$

teremos:

$$\mathbf{c}_1 \cdot \vec{n}_1 = \frac{d\vec{t}_1}{dS_1} = \frac{d\vec{t}_1}{d\mathbf{q}_1} \cdot \frac{d\mathbf{q}_1}{dS_1}$$

Obtemos, assim, as componentes do versor normal:

$$\vec{n}_1 = -\cos\mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_x - \text{sen}\mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_y \tag{c.8}$$

e a expressão para a curvatura:

$$\mathbf{c}_1 = \left\| \frac{d\vec{t}_1}{dS_1} \right\| = \frac{\text{sen}^2 \mathbf{a}_1}{R_1} \tag{c.9}$$

Para o cálculo do versor binormal \vec{b}_1 , pode-se partir da primeira das fórmulas (c.7), ou diretamente do produto vetorial entre os versores tangente e normal, resultando:

$$\vec{b}_1 = \cos\mathbf{a}_1 \cdot \text{sen}\mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_x - \cos\mathbf{a}_1 \cdot \cos\mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_y + \text{sen}\mathbf{a}_1 \cdot \vec{e}_z \tag{c.10}$$

e utilizando, agora, a segunda das fórmulas (c.7), obtemos a expressão para a tortuosidade \mathbf{t}_1 :

$$\mathbf{t}_1 = \left\| \frac{d\vec{b}_1}{dS_1} \right\| = \frac{\text{sen}\mathbf{a}_1 \cdot \cos\mathbf{a}_1}{R_1} \tag{c.11}$$

Resumindo, as expressões para os versores tangente (\vec{t}_1), normal (\vec{n}_1) e binormal (\vec{b}_1) que definem o triedro de Frenet em cada ponto do eixo central de um tendão ficam:

$$\begin{aligned}
\vec{t}_1 &= -\text{sen}\mathbf{a}_1 \cdot \text{sen}\mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_x + \text{sen}\mathbf{a}_1 \cdot \cos\mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_y + \cos\mathbf{a}_1 \cdot \vec{e}_z \\
\vec{n}_1 &= -\cos\mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_x - \text{sen}\mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_y \\
\vec{b}_1 &= \cos\mathbf{a}_1 \cdot \text{sen}\mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_x - \cos\mathbf{a}_1 \cdot \cos\mathbf{q}_1 \cdot \vec{e}_y + \text{sen}\mathbf{a}_1 \cdot \vec{e}_z
\end{aligned} \tag{c.12}$$

E as expressões para a curvatura \mathbf{c}_1 e para a tortuosidade \mathbf{t}_1 ficam:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\text{sen}^2 \mathbf{a}_1}{R_1} \tag{c.13}$$

e

$$t_1 = \frac{\text{sen}a_1 \cdot \text{cos}a_1}{R_1} \quad (\text{c.14})$$

Deve-se ressaltar que todas as expressões dadas aqui foram obtidas para hélices com enrolamento positivo ($a_1 > 0$), conforme ilustra a figura c.1. Contudo, as mesmas expressões continuam válidas para hélices com enrolamento negativo, desde que se tome $a_1 < 0$. Deve-se observar, neste último caso, que um acréscimo no comprimento de arco S_1 está associado a um decréscimo na variável q_1 (ver equação (c.4)).

C.1.2. Cálculo das curvaturas e da torção segundo eixos principais

Um item importante na análise estrutural das camadas helicoidais presentes em tubos e cabos é a determinação das curvaturas k_x e k_y e da torção k_t associadas aos eixos principais de flexo-torção da seção transversal do tendão numa dada configuração. Conforme o estudo feito no Anexo A do presente trabalho, vimos que os eixos principais de flexão da seção transversal de uma barra não coincidem, necessariamente, com as direções principais de curvatura da curva formada pelo eixo central da barra. De fato, as relações entre as componentes de curvatura segundo os eixos principais de flexão (designadas por k_x e k_y) e a curvatura c da curva formada pelo eixo central são dadas por (ver equações (a.9)):

$$k_{xi} = -c_i \cdot \text{cos} f_i$$

$$k_{yi} = c_i \cdot \text{sen} f_i$$

onde f_i é o ângulo formado entre o versor normal \vec{n}_i e o plano principal de flexão (y, z), conforme mostra a figura c.2.

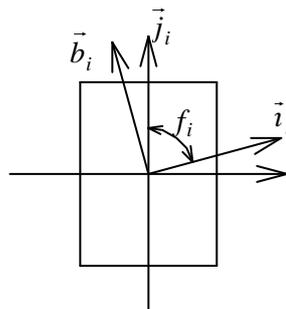


Figura c.2: Seção transversal genérica de um tendão indicando direções principais de curvatura (\vec{n}_i e \vec{b}_i) e direções principais de flexão da seção (\vec{i}_i e \vec{j}_i).

Deve-se chamar a atenção para o fato de que, ao longo deste trabalho, serão utilizadas tanto a base formada pelos versores ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), ligados ao sistema fixo de coordenadas $OXYZ$, quanto a base formada pelos versores ($\vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i$), associados aos eixos principais de flexo-torção $Cxyz$ de uma dada seção transversal do tendão numa configuração genérica Σ_i , e a base formada pelos versores ($\vec{n}_i, \vec{b}_i, \vec{t}_i$), que fornecem as direções principais de curvatura e torção da curva formada pelo eixo central do tendão (ver figuras c.2 e c.3).

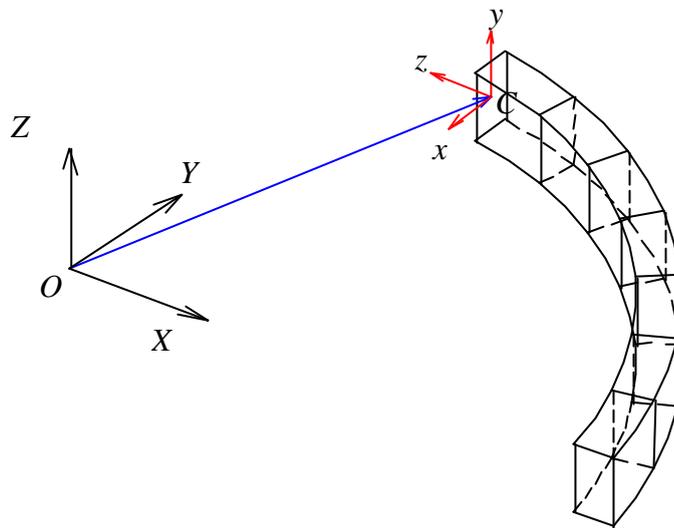


Figura c.3: Sistemas de coordenadas $OXYZ$ (fixo) e $Cxyz$ (eixos principais de flexo-torção da seção transversal do tendão).

Do estudo feito no Anexo A vimos também que a torção é dada por (equação (a.10)):

$$\mathbf{k}_{ii} = \frac{df_i}{dS_i} + \mathbf{t}_i$$

Considerando que estamos tratando da configuração inicial (não-deformada) do tubo/cabo, temos, de acordo com a notação empregada (uso do subscrito “1” para denotar tal configuração), as seguintes expressões para as curvaturas e para a torção segundo os eixos principais:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{x1} &= -\mathbf{c}_1 \cdot \cos f_1 \\
\mathbf{k}_{y1} &= \mathbf{c}_1 \cdot \sin f_1 \\
\mathbf{k}_{t1} &= \frac{df_1}{dS_1} + \mathbf{t}_1
\end{aligned}
\tag{c.15}$$

Para obtermos as expressões finais de \mathbf{k}_{x1} , \mathbf{k}_{y1} e \mathbf{k}_{t1} precisamos conhecer como varia a função $f_1(S_1)$. Faremos, então, as seguintes hipóteses:

- i) na configuração inicial do tubo/cabo, os tendões estão dispostos de tal forma que f_1 é constante (i.é., é independente de S_1);
- ii) as direções principais de flexo-torção da seção $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ coincidem respectivamente com as direções principais de curvatura $(\vec{n}_1, \vec{b}_1, \vec{t}_1)$ da curva formada pelo eixo central do tendão, ou seja, $f_1 = \mathbf{p} / 2$.

A hipótese (i) é bastante razoável e se justifica pela própria construção das camadas helicoidais. Já a hipótese (ii) será admitida pelos seguintes motivos:

- em primeiro lugar, porque isto é bastante próximo da realidade quando tratamos, por exemplo, de tendões que possuam uma seção transversal tal que os versores \vec{n}_1 e \vec{i}_1 sejam praticamente coincidentes. Isto é aceitável para tendões com seção transversal retangular, utilizados com frequência na construção de tubos flexíveis;
- em segundo lugar, para facilitar o tratamento matemático (que irá se mostrar bastante árduo em alguns itens posteriores).

Utilizando as equações (c.13) e (c.14) e as simplificações acima, as relações para \mathbf{k}_{x1} , \mathbf{k}_{y1} e \mathbf{k}_{t1} ficam dadas por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{x1} &= 0 \\
\mathbf{k}_{y1} &= \mathbf{c}_1 = \frac{\sin^2 \mathbf{a}_1}{R_1} \\
\mathbf{k}_{t1} &= \mathbf{t}_1 = \frac{\sin \mathbf{a}_1 \cdot \cos \mathbf{a}_1}{R_1}
\end{aligned}
\tag{c.16}$$

Deve-se ressaltar, contudo, que as expressões dadas por (c.16) são válidas somente no caso em que as hipóteses (i) e (ii) feitas acima sejam aceitáveis. Para as seções transversais presentes em carcaças intertravadas e nas camadas de reforço de pressão, deve-se utilizar as equações gerais dadas por (c.15).

C.2. Geometria da camada considerando carregamentos axissimétricos

Consideremos, agora, que o tubo (ou cabo) esteja submetido a carregamentos axissimétricos como tração, torção, pressão externa e pressão interna (se se tratar de tubo flexível). Se admitirmos que tais carregamentos sejam aplicados de tal forma que o eixo central do tubo/cabo permaneça reto (como no caso anterior) e se desprezarmos o atrito interno entre as camadas helicoidais e as camadas adjacentes a elas, podemos também considerar neste caso que as equações paramétricas dos eixos centrais dos tendões que constituem as camadas helicoidais estejam associadas às equações paramétricas de uma hélice cilíndrica de passo constante. Desta forma, embora as expressões dadas no item anterior tenham sido desenvolvidas para a configuração não deformada do tubo (e conseqüentemente da camada), elas podem ser perfeitamente adaptadas para uma configuração deformada que “mantenha” a geometria do eixo central dos tendões próxima a de uma hélice cilíndrica de passo constante. Obviamente, deve-se neste caso utilizar os valores correntes do raio, do passo e do ângulo de assentamento da camada nas equações paramétricas da hélice deformada. As equações paramétricas do eixo central do tendão na configuração deformada (Σ_2) ficam então dadas por:

$$\begin{aligned} x_2 &= R_2 \cdot \cos q_2 \\ y_2 &= R_2 \cdot \sen q_2 \\ z_2 &= \frac{h_2 \cdot (q_2 - q_o)}{2p} = \frac{R_2 \cdot (q_2 - q_o)}{\tan a_2} \end{aligned} \quad (c.17)$$

onde R_2 , q_2 , h_2 e a_2 são os parâmetros equivalentes a R_1 , q_1 , h_1 e a_1 , porém relacionados à configuração deformada (Σ_2) da camada. Admitiremos que o valor do

parâmetro angular de referência \mathbf{q}_0 seja o mesmo nas configurações não-deformada (Σ_1) e deformada (Σ_2), desde que se trate, obviamente, do mesmo tendão.

As relações entre as grandezas geométricas antes e após a deformação são dadas por:

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 + \Delta R \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a} \\ h_2 &= h_1 + \Delta h \end{aligned} \quad (\text{c.18})$$

O vetor posição de um ponto genérico (C_2) pertencente à curva descrita pelas equações paramétricas (c.17) é agora dado por:

$$\vec{r}_{c_2} = (C_2 - O) = R_2 \cdot \cos \mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_x + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_y + \frac{R_2 \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_0)}{\tan \mathbf{a}_2} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.19})$$

onde $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ são os versores associados respectivamente às direções X , Y e Z do sistema de coordenadas fixo $OXYZ$ indicado na figura c.4.

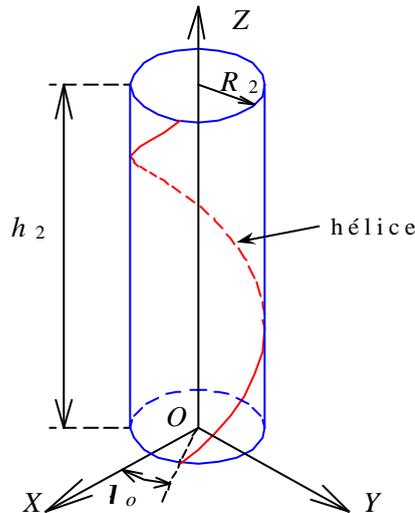


Figura c.4: Representação do eixo central de um tendão na configuração deformada.

O comprimento de arco dS_2 de um elemento infinitesimal é calculado através de:

$$dS_2 = \left(\sqrt{\left(\frac{dx_2}{dq_2} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dq_2} \right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dq_2} \right)^2} \right) dq_2 \quad (\text{c.20})$$

resultando:

$$dS_2 = \frac{R_2 \cdot d\mathbf{q}_2}{\text{sen } \mathbf{a}_2} \quad (\text{c.21})$$

O versor tangente à curva passando pelo ponto C_2 é definido por:

$$\vec{t}_2 = \frac{d\vec{r}_{c2}}{dS_2} = \frac{d\vec{r}_{c2}}{d\mathbf{q}_2} \cdot \frac{d\mathbf{q}_2}{dS_2} \quad (\text{c.22})$$

resultando:

$$\vec{t}_2 = -\text{sen } \mathbf{a}_2 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_x + \text{sen } \mathbf{a}_2 \cdot \text{cos } \mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_y + \text{cos } \mathbf{a}_2 \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.23})$$

Utilizando, agora, as fórmulas de Frenet dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{n}_2}{dS_2} &= \mathbf{t}_2 \cdot \vec{b}_2 - \mathbf{c}_2 \cdot \vec{t}_2 \\ \frac{d\vec{b}_2}{dS_2} &= -\mathbf{t}_2 \cdot \vec{n}_2 \\ \frac{d\vec{t}_2}{dS_2} &= \mathbf{c}_2 \cdot \vec{n}_2 \end{aligned} \quad (\text{c.24})$$

teremos:

$$\mathbf{c}_2 \cdot \vec{n}_2 = \frac{d\vec{t}_2}{dS_2} = \frac{d\vec{t}_2}{d\mathbf{q}_2} \cdot \frac{d\mathbf{q}_2}{dS_2}$$

Obtemos, assim, as componentes do versor normal:

$$\vec{n}_2 = -\text{cos } \mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_x - \text{sen } \mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_y \quad (\text{c.25})$$

e a expressão para a curvatura:

$$\mathbf{c}_2 = \left\| \frac{d\vec{t}_2}{dS_2} \right\| = \frac{\text{sen}^2 \mathbf{a}_2}{R_2} \quad (\text{c.26})$$

Para o cálculo do versor binormal \vec{b}_2 , pode-se partir da primeira das fórmulas (c.24), ou diretamente do produto vetorial entre os versores tangente e normal, resultando:

$$\vec{b}_2 = \text{cos } \mathbf{a}_2 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_x - \text{cos } \mathbf{a}_2 \cdot \text{cos } \mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_y + \text{sen } \mathbf{a}_2 \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.27})$$

e utilizando, agora, a segunda das fórmulas (c.24), obtemos a expressão para a tortuosidade \mathbf{t}_2 :

$$\mathbf{t}_2 = \left\| \frac{d\vec{b}_2}{dS_2} \right\| = \frac{\text{sen } \mathbf{a}_2 \cdot \text{cos } \mathbf{a}_2}{R_2} \quad (\text{c.28})$$

Resumindo, as expressões para os versores tangente (\vec{t}_2), normal (\vec{n}_2) e binormal (\vec{b}_2) que definem o triedro de Frenet em cada ponto do eixo central de um tendão ficam:

$$\begin{aligned}\vec{t}_2 &= -\text{sen}\mathbf{a}_2 \cdot \text{sen}\mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_x + \text{sen}\mathbf{a}_2 \cdot \text{cos}\mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_y + \text{cos}\mathbf{a}_2 \cdot \vec{e}_z \\ \vec{n}_2 &= -\text{cos}\mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_x - \text{sen}\mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_y \\ \vec{b}_2 &= \text{cos}\mathbf{a}_2 \cdot \text{sen}\mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_x - \text{cos}\mathbf{a}_2 \cdot \text{cos}\mathbf{q}_2 \cdot \vec{e}_y + \text{sen}\mathbf{a}_2 \cdot \vec{e}_z\end{aligned}\quad (\text{c.29})$$

E as expressões para a curvatura \mathbf{c}_2 e para a tortuosidade \mathbf{t}_2 ficam:

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\text{sen}^2 \mathbf{a}_2}{R_2} \quad (\text{c.30})$$

e

$$\mathbf{t}_2 = \frac{\text{sen}\mathbf{a}_2 \cdot \text{cos}\mathbf{a}_2}{R_2} \quad (\text{c.31})$$

C.2.1. Cálculo da deformação do eixo central do tendão

Neste item será deduzida uma expressão que relaciona a deformação média, $\mathbf{e}_{t,12}$, de um tendão (medida na direção do versor tangente ao eixo central do tendão) com as componentes de deformação da camada helicoidal da qual ele faz parte. Como componentes de deformação da camada helicoidal serão consideradas as seguintes deformações:

1. Deformação axial da camada helicoidal (\mathbf{e}_h): é a deformação medida na direção do eixo do tubo/cabo. Considerando que antes da aplicação dos esforços a camada considerada tenha uma altura de referência h_1 (passo na configuração não-deformada Σ_1), e que, após a aplicação dos esforços, a altura de referência tenha passado a um valor h_2 (igual ao passo na configuração deformada Σ_2), a deformação axial da camada será por definição:

$$\mathbf{e}_h = \frac{\Delta h}{h_1} = \frac{h_2 - h_1}{h_1} \quad (\text{c.32})$$

Deve-se observar que, de acordo com a hipótese de que as seções transversais do tubo/cabo (que eram inicialmente planas antes da deformação) permanecem planas após a

deformação¹, a deformação axial da camada helicoidal (\mathbf{e}_h) confunde-se com a deformação axial do próprio tubo/cabo, de tal forma que podemos escrever também:

$$\mathbf{e}_h = \frac{\Delta h}{h_1} = \frac{\Delta L}{L_1} \quad (\text{c.33})$$

onde $\Delta L/L_1$ representa a deformação axial do tubo/cabo (medida na direção tangente ao eixo central do tubo/cabo) devida à aplicação dos carregamentos axissimétricos.

2. Deformação circunferencial da camada helicoidal (\mathbf{e}_c): é a deformação devida à variação do diâmetro (ou raio) da camada provocada pelos carregamentos axissimétricos aplicados ao tubo/cabo. Considerando que antes da aplicação dos esforços (configuração inicial) a camada considerada tenha um raio R_1 , e que, após a aplicação dos esforços (configuração deformada), o raio passe a ter um valor R_2 , a deformação circunferencial da camada será por definição:

$$\mathbf{e}_c = \frac{\Delta R}{R_1} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \quad (\text{c.34})$$

3. Deformação angular da camada helicoidal (\mathbf{e}_j): é a deformação devida à variação do número de voltas *de um dado trecho da camada, medido a partir de uma posição de referência* (como, por exemplo, a posição angular de referência \mathbf{q}_0). Consideremos que o trecho da camada tenha comprimento L_1 (medido na direção do eixo OZ) antes da aplicação dos esforços, e que tal comprimento corresponda a um número de voltas N_1 dado por:

$$N_1 = \frac{\mathbf{q}_1(L_1) - \mathbf{q}_0}{2\mathbf{p}} = \frac{L_1}{h_1} = \frac{L_1 \cdot \tan \mathbf{a}_1}{2\mathbf{p} \cdot R_1}$$

Após a aplicação dos esforços, o comprimento deformado da camada será L_2 (medido na direção do eixo OZ) e o número de voltas correspondente será:

¹ Note que esta hipótese admite que não há escorregamento relativo entre as diversas camadas que constituem o tubo flexível ou o cabo umbilical.

$$N_2 = \frac{\mathbf{q}_2(L_2) - \mathbf{q}_0}{2\mathbf{p}} = \frac{L_2}{h_2} = \frac{L_2 \cdot \tan \mathbf{a}_2}{2\mathbf{p} \cdot R_2}$$

A deformação angular \mathbf{e}_j será, por definição:

$$\mathbf{e}_j = \frac{N_2 - N_1}{N_1} = \frac{\mathbf{q}_2(L_2) - \mathbf{q}_1(L_1)}{\mathbf{q}_1(L_1) - \mathbf{q}_0} \quad (\text{c.35})$$

ou, se definirmos a variável \mathbf{j}_i como sendo a variação angular associada ao número de voltas N_i (para o trecho de camada de comprimento L_i numa dada configuração Σ_i), ou seja:

$$\mathbf{j}_i = 2\mathbf{p} \cdot N_i = \mathbf{q}_i(L_i) - \mathbf{q}_0 \quad (\text{c.36})$$

teremos, de forma equivalente, a seguinte expressão para a deformação angular \mathbf{e}_j :

$$\mathbf{e}_j = \frac{\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1}{\mathbf{j}_1} = \frac{\Delta \mathbf{j}}{\mathbf{j}_1} = \frac{R_1 \cdot \Delta \mathbf{j}}{L_1 \cdot \tan \mathbf{a}_1} \quad (\text{c.37})$$

Se lembrarmos que, como as demais componentes de deformação, \mathbf{e}_j deve ser constante ao longo do comprimento do *riser* (e, portanto, independente do comprimento de referência L_1 tomado inicialmente), podemos então escrever:

$$\mathbf{e}_j = \frac{\mathbf{q}_2(L_2) - \mathbf{q}_1(L_1)}{\mathbf{q}_1(L_1) - \mathbf{q}_0} = \frac{\mathbf{q}_2(z_2) - \mathbf{q}_1(z_1)}{\mathbf{q}_1(z_1) - \mathbf{q}_0}$$

mas:

$$\mathbf{e}_j = \frac{\Delta \mathbf{j}}{\mathbf{j}_1} = \frac{\Delta \mathbf{j}}{2\mathbf{p} \cdot N_1} = \frac{\Delta \mathbf{j} \cdot h_1}{2\mathbf{p} \cdot L_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0 = \frac{2\mathbf{p} \cdot z_1}{h_1}$$

Logo:

$$\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = \mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) = \frac{\Delta \mathbf{j} \cdot z_1}{L_1}$$

resultando:

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 + \frac{\Delta \mathbf{j} \cdot z_1}{L_1} \quad (\text{c.38})$$

ou, usando a terceira das equações (c.1), teremos de forma equivalente:

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 + \frac{\Delta \mathbf{j} \cdot R_1 \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0)}{L_1 \cdot \tan \mathbf{a}_1} \quad (\text{c.39})$$

As expressões (c.38) e (c.39) fornecem, assim, as relações entre os parâmetros angulares \mathbf{q}_2 (associado à configuração deformada Σ_2) e \mathbf{q}_1 (associado à configuração inicial Σ_1).

Para o cálculo da deformação axial média, $\mathbf{e}_{t,12}$, medida na direção do versor tangente ao eixo central do tendão e associada às configurações inicial (Σ_1) e deformada (Σ_2) da camada, consideremos um comprimento de arco, medido ao longo do eixo do tendão, com comprimento inicial S_1 (antes da aplicação dos esforços) e comprimento final S_2 (após a aplicação dos esforços). Podemos definir a deformação $\mathbf{e}_{t,12}$ do tendão como:

$$\mathbf{e}_{t,12} = \frac{\Delta S}{S_1} = \frac{S_2 - S_1}{S_1} \quad (\text{c.40})$$

É fácil perceber que as quatro deformações definidas aqui não são independentes, já que é impossível ter uma delas com valor diferente de zero, tendo as demais valores nulos. Deve haver, portanto, uma relação que estabeleça um elo entre as quatro deformações dadas. Para encontrarmos tal relação, consideremos a figura c.5 que mostra o eixo retificado de um tendão, com ângulo de assentamento \mathbf{a} , medido com relação ao eixo do tubo/cabo, numa configuração “intermediária” entre Σ_1 e Σ_2 .

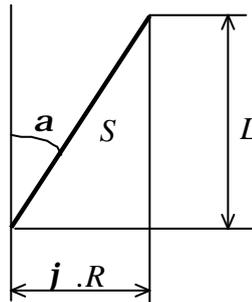


Figura c.5: Eixo retificado de um tendão numa configuração intermediária.

Da figura c.5, obtemos imediatamente a relação:

$$S^2 = (\mathbf{j} \cdot R)^2 + (L)^2 \quad (\text{c.41})$$

onde os valores das variáveis S , \mathbf{j} , R e L se referem àqueles associados à configuração intermediária entre Σ_1 e Σ_2 .

Diferenciando a equação (c.41), teremos:

$$2S.dS = 2j.R.(j.dR + R.dj) + 2L.dL$$

Dividindo, agora, a relação obtida por $(2.S^2)$ e observando ainda pela figura c.5 que:

$$\text{sen } \mathbf{a} = \frac{j.R}{S} \quad \text{e} \quad \text{cos } \mathbf{a} = \frac{L}{S}$$

resulta finalmente:

$$\frac{dS}{S} = \text{sen}^2 \mathbf{a} \left(\frac{dR}{R} + \frac{dj}{j} \right) + \text{cos}^2 \mathbf{a} \left(\frac{dL}{L} \right)$$

Aceitando a hipótese de linearidade geométrica, podemos agora considerar que os valores das variáveis S , j , R e L , bem como do ângulo de assentamento \mathbf{a} , correspondam a seus respectivos valores tomados na configuração inicial Σ_1 . Da mesma forma, podemos considerar que os infinitésimos dS , dj , dR e dL correspondam às variações ΔS , Δj , ΔR e ΔL associadas às configurações Σ_1 e Σ_2 . Com estas simplificações, a equação fica:

$$\frac{\Delta S}{S_1} = \text{sen}^2 \mathbf{a}_1 \left(\frac{\Delta R}{R_1} + \frac{\Delta j}{j_1} \right) + \text{cos}^2 \mathbf{a}_1 \left(\frac{\Delta L}{L_1} \right)$$

Utilizando agora as definições dadas anteriormente, resulta:

$$\mathbf{e}_{t,12} = (\mathbf{e}_c + \mathbf{e}_j) \cdot \text{sen}^2 \mathbf{a}_1 + \mathbf{e}_h \cdot \text{cos}^2 \mathbf{a}_1 \quad (\text{c.42})$$

ou, de forma equivalente:

$$\mathbf{e}_{t,12} = (\text{sen}^2 \mathbf{a}_1) \cdot \frac{\Delta R}{R_1} + (\text{sen} \mathbf{a}_1 \cdot \text{cos} \mathbf{a}_1) \cdot R_1 \cdot \frac{\Delta j}{L_1} + (\text{cos}^2 \mathbf{a}_1) \cdot \frac{\Delta L}{L_1} \quad (\text{c.43})$$

C.2.2. Comparação entre a equação (c.42) e outras obtidas na literatura

A equação (c.42) estabelece a dependência entre a deformação axial média do tendão, $\mathbf{e}_{t,12}$, e as componentes de deformação da camada (\mathbf{e}_c , \mathbf{e}_j e \mathbf{e}_h). Equações equivalentes à equação (c.42) foram também apresentadas por Féret; Bournazel [20], Knapp [29] e Pesce et al. [49], entre outros. A expressão trazida por Féret; Bournazel [20] é

exatamente igual à equação equivalente (c.43), embora os autores utilizem uma notação um pouco diferente e não apresentem nenhuma dedução da relação. Os autores admitem também que as componentes de deformação e_h e e_j são as mesmas para todas as camadas que constituem o *riser*. Pesce et al [49] já apresentam em seu trabalho uma dedução formal para a equação (c.42), porém com algumas pequenas diferenças na definição das componentes de deformação, além de um trabalho algébrico muito mais extenso.

Knapp [29] apresenta uma expressão exata (dentro das hipóteses admitidas) para o cálculo da deformação axial do tendão, partindo de simples considerações geométricas. A relação obtida é da forma:

$$e_{t,12} = \left[(1 + e_h)^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + (1 + e_c)^2 \cdot (1 + e_j)^2 \cdot \sin^2 \alpha_1 \right]^{1/2} - 1 \quad (c.44)$$

Para a obtenção de uma relação mais simples, Knapp propõe a linearização da expressão (c.44), expandindo-a em série de Taylor e tomando apenas os dois primeiros termos da série (termos lineares). Após algumas simplificações, o autor chega à seguinte relação:

$$e_{t,12} = e_h \cdot \cos^2 \alpha_1 + \left[\left(e_j + \frac{1}{2} \right) (e_c + 1)^2 - \frac{1}{2} \right] \cdot \sin^2 \alpha_1 \quad (c.45)$$

Nota-se que a “linearização” proposta por Knapp terminou “um passo” antes da obtenção de uma verdadeira relação linear entre $e_{t,12}$ e as demais componentes de deformação: se multiplicarmos as expressões entre parênteses e desprezarmos os termos de ordem superior (não lineares), chegaremos exatamente à equação proposta (c.42).

Deve-se ressaltar que, para os níveis de deformação alcançados nas aplicações práticas de tubos flexíveis e umbilicais (geralmente menores que 0,2% de deformação), todas as equações apresentadas fornecem praticamente o mesmo resultado, não havendo necessidade de utilizarmos equações mais complexas que a dada por (c.42), como as expressões fornecidas por Knapp [29].

C.2.3. Cálculo da variação do ângulo de assentamento

Neste item será deduzida uma segunda expressão bastante empregada na análise estrutural de tendões em armaduras helicoidais: a que relaciona a variação do ângulo de assentamento dos tendões com as componentes de deformação da camada. Para sua obtenção consideremos novamente a figura c.5 do item C.2.1 e a seguinte relação geométrica:

$$\tan \mathbf{a} = \frac{\mathbf{j} \cdot R}{L} \quad (\text{c.46})$$

onde novamente os valores das variáveis \mathbf{j} , R , L e \mathbf{a} se referem a uma configuração intermediária entre Σ_1 e Σ_2 . Diferenciando a equação (c.46), virá:

$$\frac{d\mathbf{a}}{\cos^2 \mathbf{a}} = \frac{R}{L} d\mathbf{j} + \frac{\mathbf{j}}{L} dR - \frac{\mathbf{j} \cdot R}{L^2} dL$$

Após algumas simples manipulações, e utilizando novamente a relação (c.46), teremos:

$$d\mathbf{a} = \text{sen } \mathbf{a} \cdot \cos \mathbf{a} \cdot \left(\frac{d\mathbf{j}}{\mathbf{j}} + \frac{dR}{R} - \frac{dL}{L} \right) \quad (\text{c.47})$$

Como antes, podemos considerar (dentro da hipótese de linearidade geométrica) que os valores das variáveis \mathbf{a} , \mathbf{j} , R e L correspondam aos respectivos valores associados à configuração não-deformada Σ_1 . Também podemos considerar que os infinitésimos $d\mathbf{a}$, $d\mathbf{j}$, dR e dL correspondam às variações $\Delta\mathbf{a}$, $\Delta\mathbf{j}$, ΔR e ΔL associadas às configurações Σ_1 e Σ_2 . Com estas simplificações, a equação (c.47) fica:

$$\Delta\mathbf{a} = \text{sen } \mathbf{a}_1 \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot \left(\frac{\Delta\mathbf{j}}{\mathbf{j}_1} + \frac{\Delta R}{R_1} - \frac{\Delta L}{L_1} \right)$$

Utilizando agora as definições dadas por (c.33), (c.34) e (c.37), resulta:

$$\Delta\mathbf{a} = \text{sen } \mathbf{a}_1 \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_c - \mathbf{e}_h) \quad (\text{c.48})$$

ou, de forma equivalente:

$$\Delta\mathbf{a} = \cos^2 \mathbf{a}_1 \cdot R_1 \frac{\Delta\mathbf{j}}{L_1} + \text{sen } \mathbf{a}_1 \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot \left(\frac{\Delta R}{R_1} - \frac{\Delta L}{L_1} \right) \quad (\text{c.49})$$

As equações (c.48) e (c.49) fornecem, assim, a variação do ângulo de assentamento de uma camada helicoidal em função das componentes de deformação da camada e do ângulo de assentamento inicial de uma forma bastante simples (note que a variação do ângulo de assentamento é definida por $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$).

C.2.4. Comparação entre a equação (c.48) e outras obtidas na literatura Expressões análogas à equação (c.48), ou sua equivalente (c.49), também são bastante recorrentes na literatura. Neste item será feita uma comparação entre a equação (c.48) e outras equações encontradas na literatura que permitem a determinação do ângulo de assentamento final dos tendões de armaduras helicoidais.

Em seu artigo, Knapp [29] traz duas expressões deste tipo: a primeira é bastante geral, valendo inclusive para grandes deformações, enquanto a segunda consiste numa expressão mais simples, obtida pela “linearização” da equação geral. São elas, respectivamente:

$$\frac{\tan \mathbf{a}_2}{\tan \mathbf{a}_1} = \frac{(1 + \mathbf{e}_c) \cdot (1 + \mathbf{e}_j)}{(1 + \mathbf{e}_h)} \quad (\text{c.50})$$

e

$$\frac{\tan \mathbf{a}_2}{\tan \mathbf{a}_1} = (1 + \mathbf{e}_c) \cdot (1 + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_h) \quad (\text{c.51})$$

Witz; Tan [72] trazem somente uma expressão para o cálculo do ângulo de assentamento final, a qual é bastante similar à primeira expressão dada por Knapp, com algumas pequenas diferenças quanto à notação empregada. Pesce et al. [49] trazem também uma expressão análoga, obtida com um maior trabalho algébrico, mas fornecendo diretamente a variação do ângulo de assentamento (e não a tangente do ângulo de assentamento final) em função de características geométricas da camada e das componentes de deformação da camada. As expressões fornecidas por Witz; Tan [72] e Pesce et al. [49] são, respectivamente²:

$$\frac{\tan \mathbf{a}_2}{\tan \mathbf{a}_1} = \frac{(1 + \mathbf{e}_c + \mathbf{e}_j)}{(1 + \mathbf{e}_h)} \quad (\text{c.52})$$

² As notações empregadas por Witz & Tan e Pesce et al diferem um pouco da utilizada neste texto, por isso resolvemos adaptar as equações propostas por estes autores para a nossa notação.

e

$$\Delta \mathbf{a} = \frac{\tan \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_c - \mathbf{e}_h)}{1 + \mathbf{e}_h + (1 + \mathbf{e}_c + \mathbf{e}_j) \cdot \tan^2 \mathbf{a}_1} \quad (\text{c.53})$$

Embora as equações apresentadas pareçam bastante diferentes da equação (c.48), pode-se mostrar que todas estas equações recaem na equação (c.48) se fizermos as respectivas aproximações em série de Taylor (em torno de $\mathbf{e}_c = \mathbf{e}_h = \mathbf{e}_j = 0$), retendo-se de forma consistente apenas os termos lineares da série.

Lembrando novamente que os níveis de deformação alcançados nas aplicações práticas de tubos flexíveis e umbilicais são bastante pequenos (menores que 0,2% de deformação), podemos concluir que todas as equações apresentadas fornecem praticamente o mesmo resultado, não havendo necessidade de utilizarmos equações mais complexas que a dada por (c.48) ou sua equivalente (c.49).

C.2.5. Cálculo das variações de curvatura e de tortuosidade

A variação de curvatura em um ponto genérico do eixo central do tendão, devida à passagem da configuração não-deformada Σ_1 para a configuração deformada Σ_2 , é por definição:

$$\Delta \mathbf{c}_{12} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{c}_2}{\mathbf{c}_1} - 1 \right) \quad (\text{c.54})$$

Utilizando, agora, as expressões (c.13) e (c.30), que fornecem, respectivamente, as expressões das curvaturas do eixo central do tendão nas configurações não-deformada Σ_1 e deformada Σ_2 , encontramos:

$$\frac{\mathbf{c}_2}{\mathbf{c}_1} = \left(\frac{\text{sen } \mathbf{a}_2}{\text{sen } \mathbf{a}_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2} \right) = \left(\frac{\text{sen}(\mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a})}{\text{sen } \mathbf{a}_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{R_1}{R_1 + \Delta R} \right)$$

ou, de forma aproximada:

$$\frac{\mathbf{c}_2}{\mathbf{c}_1} \cong 1 + \frac{2 \cdot \Delta \mathbf{a}}{\tan \mathbf{a}_1} - \frac{\Delta R}{R_1}$$

Substituindo a expressão acima em (c.54), resulta a seguinte forma linearizada para a variação da curvatura:

$$\Delta c_{12} = c_1 \cdot \left(\frac{2 \cdot \Delta a}{\tan a_1} - \frac{\Delta R}{R_1} \right) \quad (c.55)$$

ou, se usarmos a expressão (c.48), teremos uma expressão equivalente à (c.55) que fornece a variação da curvatura em função das componentes de deformação da camada:

$$\Delta c_{12} = c_1 \cdot \left(2 \cos^2 a_1 \cdot (\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_c - \mathbf{e}_h) - \mathbf{e}_c \right) \quad (c.56)$$

De forma análoga, a variação da tortuosidade é dada por:

$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1 = t_1 \cdot \left(\frac{t_2}{t_1} - 1 \right) \quad (c.57)$$

Se utilizarmos as expressões (c.14) e (c.31), que fornecem, respectivamente, as expressões das tortuosidades do eixo central do tendão nas configurações inicial (Σ_1) e deformada (Σ_2), teremos:

$$\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{\sin a_2 \cdot \cos a_2}{\sin a_1 \cdot \cos a_1} \right) \left(\frac{R_1}{R_2} \right) = \left(\frac{\sin(a_1 + \Delta a) \cdot \cos(a_1 + \Delta a)}{\sin a_1 \cdot \cos a_1} \right) \left(\frac{R_1}{R_1 + \Delta R} \right)$$

ou, de forma aproximada:

$$\frac{t_2}{t_1} \cong 1 + \left(\frac{2}{\tan 2a_1} \right) \Delta a - \frac{\Delta R}{R_1}$$

Substituindo esta última expressão em (c.57), resulta a seguinte forma linearizada para a variação da tortuosidade:

$$\Delta t_{12} = t_1 \cdot \left[\left(\frac{2}{\tan 2a_1} \right) \Delta a - \frac{\Delta R}{R_1} \right] \quad (c.58)$$

ou, se usarmos a expressão (c.48), teremos a seguinte expressão equivalente à (c.58) que fornece a variação de tortuosidade em função das componentes de deformação:

$$\Delta t_{12} = t_1 \cdot \left[\cos(2a_1) \cdot (\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_c - \mathbf{e}_h) - \mathbf{e}_c \right] \quad (c.59)$$

C.2.6. Cálculo das curvaturas e da torção segundo eixos principais

Seguindo um raciocínio análogo ao feito no item *C.1.2* e considerando que estamos tratando agora da configuração deformada Σ_2 da camada, temos, de acordo com a notação empregada, as seguintes expressões para as curvaturas e para a torção segundo os eixos principais de flexo-torção da seção transversal dos tendões:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{x_2} &= -\mathbf{c}_2 \cdot \cos f_2 \\ \mathbf{k}_{y_2} &= \mathbf{c}_2 \cdot \sin f_2 \\ \mathbf{k}_{t_2} &= \frac{df_2}{dS_2} + \mathbf{t}_2 \end{aligned} \quad (\text{c.60})$$

Para a determinação da função $f_2(S_2)$, serão admitidas aqui hipóteses idênticas às admitidas no item *C.1.2*, a saber:

- i) estando o tubo/cabo submetido apenas a carregamentos axissimétricos (configuração deformada Σ_2), podemos admitir que os tendões continuam dispostos de tal forma que f_2 seja constante (e, portanto, independente de S_2);
- ii) as direções principais de flexo-torção da seção $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ coincidem respectivamente com as direções principais de curvatura $(\vec{n}_2, \vec{b}_2, \vec{t}_2)$ da curva formada pelo eixo central do tendão, ou seja, $f_2 = \mathbf{p} / 2$.

Utilizando então as equações (c.30) e (c.31) e as simplificações acima, as relações para \mathbf{k}_{x_2} , \mathbf{k}_{y_2} e \mathbf{k}_{t_2} ficam dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{x_2} &= 0 \\ \mathbf{k}_{y_2} &= \mathbf{c}_2 = \frac{\sin^2 \mathbf{a}_2}{R_2} \\ \mathbf{k}_{t_2} &= \mathbf{t}_2 = \frac{\sin \mathbf{a}_2 \cdot \cos \mathbf{a}_2}{R_2} \end{aligned} \quad (\text{c.61})$$

Como antes, devemos ressaltar que as expressões dadas por (c.61) são válidas apenas no caso em que as hipóteses (i) e (ii) feitas acima sejam aceitáveis (ver ressalvas feitas no item *C.1.2*).

C.3. Geometria da camada considerando flexão sem escorregamento

Nos itens anteriores (C.1 e C.2) estudamos a geometria de uma hélice de passo constante que tinha como suporte um cilindro reto. As expressões obtidas naqueles itens são particularmente úteis para a determinação de parâmetros geométricos associados tanto à configuração não-deformada das armaduras helicoidais quanto à configuração deformada destas camadas em casos de carregamentos axissimétricos (ver Capítulo 3). Um outro estudo importante está relacionado à geometria que a hélice cilíndrica assume quando o cilindro suporte sofre uma curvatura em torno de um eixo. Os resultados obtidos a partir deste estudo geométrico servirão para a análise de tubos e cabos submetidos a carregamentos combinados envolvendo flexão (ver capítulo 5). Sem qualquer prejuízo da generalidade, admitiremos que o estudo a ser realizado neste item esteja partindo da configuração deformada Σ_2 , ou seja, o tubo (ou cabo) já está previamente deformado devido à aplicação de carregamentos axissimétricos. A nova configuração deformada, devida à superposição da flexão aos carregamentos axissimétricos, será nomeada configuração deformada Σ_3 . Os itens seguintes tratarão do estudo geométrico das camadas helicoidais nesta nova configuração deformada.

C.3.1. Estudo da geometria para curvaturas “positivas”

Para a obtenção das equações paramétricas dos pontos pertencentes ao eixo central de um tendão cujo substrato está sendo fletido, consideremos a figura c.6, que mostra a mesma hélice cilíndrica apresentada na figura c.4, tendo agora seu cilindro suporte se “transformado” num toróide com raio de curvatura $r = 1/K$ (K sendo a curvatura). Sem perda de generalidade, podemos considerar que a flexão ocorre em torno do eixo fixo OX , como ilustrado nas figuras c.6 e c.7.

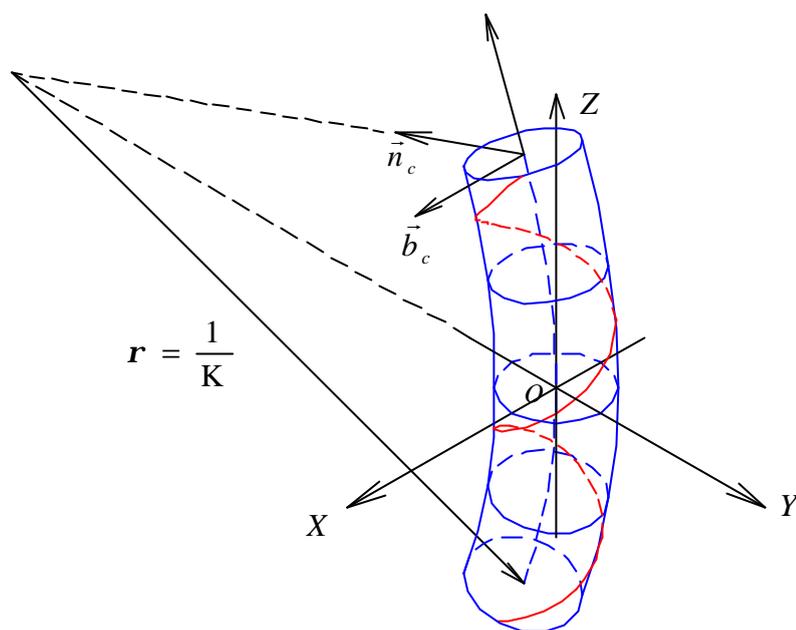


Figura c.6: Representação 3D do eixo central de um tendão fletido.

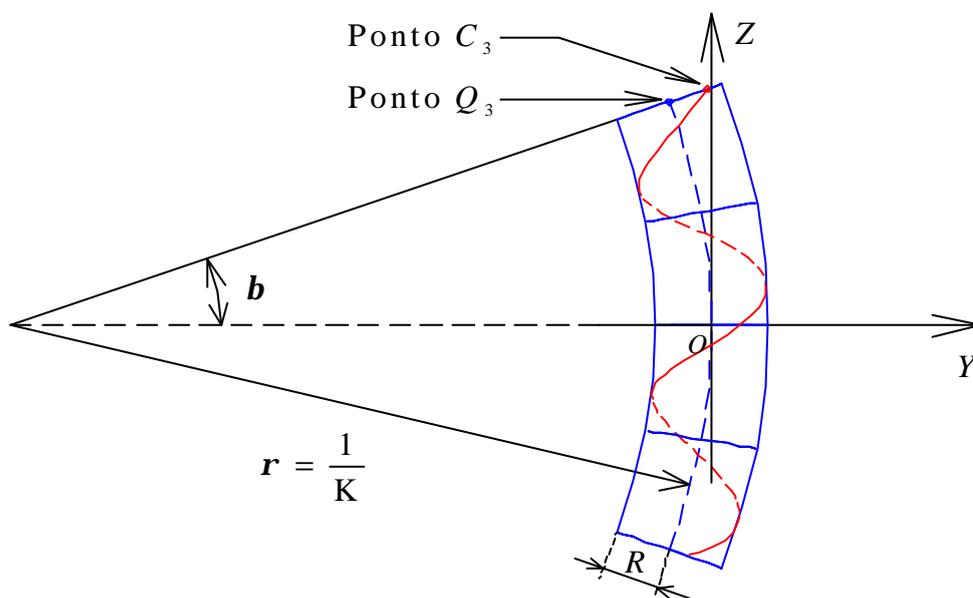


Figura c.7: Vista lateral (plano YZ) da hélice deformada.

A figura c.6 mostra ainda o triedro de Frenet $(\vec{t}_c, \vec{n}_c, \vec{b}_c)^3$ associado à curva formada pelos pontos do eixo central do tubo/cabo (representado pela linha pontilhada passando pela origem do sistema de referência $OXYZ$). Deve-se observar que, como o vetor curvatura para esta curva é dado por:

$$\vec{K} = K \cdot \vec{b}_c = \mathbf{k}_x \cdot \vec{e}_x$$

e sendo os versores \vec{b}_c e \vec{e}_x coincidentes, resulta: $\mathbf{k}_x = K$. Desta forma, diremos que a configuração deformada ilustrada na figura c.6 está associada a uma “curvatura positiva” (pois $\mathbf{k}_x = K > 0$), e as equações a serem obtidas aqui serão, portanto, válidas para este caso. Mais adiante, discutiremos as mudanças para o caso de curvaturas “negativas”.

Considerando ainda que o tubo ou cabo, do qual faz parte o tendão que está sendo analisado, tenha uma distribuição axissimétrica de material, e que o raio de curvatura (\mathbf{r}) imposto a ele seja pelo menos uma ordem de grandeza maior que uma dimensão característica de sua seção transversal (como o raio), podemos admitir que o eixo central do tubo/cabo não possua qualquer deformação adicional, ou seja, que o comprimento dos elementos lineares pertencentes a este eixo após a deformação por flexão (configuração deformada Σ_3) tenha o mesmo valor que antes da deformação por flexão (configuração deformada Σ_2).

Tomemos, agora, dois pontos (Q_2 e C_2) que, antes da flexão do tubo/cabo, pertenciam a uma mesma seção transversal do tubo/cabo: o primeiro (ponto Q_2) estando situado sobre o eixo central do tubo/cabo, e o segundo (ponto C_2), sobre o eixo central do tendão. As coordenadas que definem a posição do ponto C_2 , antes da deformação, são portanto as mesmas dadas pelas relações (c.17), ou seja:

³ Utilizaremos o subscrito “c” quando nos referirmos aos versores associados ao triedro de Frenet do eixo central do tubo/cabo, para diferenciar da notação empregada para os versores associados ao triedro de Frenet do eixo central do tendão (sem o subscrito “c”).

$$\begin{aligned}
 x_2 &= R_2 \cdot \cos \mathbf{q}_2 \\
 y_2 &= R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2 \\
 z_2 &= \frac{h_2 \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_o)}{2p} = \frac{R_2 \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_o)}{\tan \mathbf{a}_2}
 \end{aligned}
 \tag{c.62}$$

Admitindo que durante a flexão não haja escorregamento entre os tendões e o substrato, e também que não haja empenamento da seção, os dois pontos continuam a pertencer a um mesmo plano na configuração deformada Σ_3 do tubo, sendo agora denotados por Q_3 e C_3 , respectivamente (ver figura c.7). Deve-se observar que estas duas premissas (não-escorregamento e não-empenamento) estão relacionadas à hipótese de Navier, ou seja, as seções transversais (do tubo) que eram planas antes da deformação continuarão planas após a deformação.

Pela figura c.7, é imediato perceber que o ângulo \mathbf{b} definido pelo arco OQ_3 é dado por:

$$\mathbf{b} = \frac{\Delta S}{r} = K \cdot \Delta S$$

onde ΔS representa o comprimento de arco medido ao longo do eixo central do tubo/cabo, entre os pontos O e Q_3 .

Lembrando, agora, que o eixo central do tubo/cabo permanece “indeformável” após a flexão, teremos:

$$\Delta S = z_2 = \frac{R_2 \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_o)}{\tan \mathbf{a}_2}$$

resultando:

$$\mathbf{b} = \frac{K \cdot R_2 \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_o)}{\tan \mathbf{a}_2}
 \tag{c.63}$$

Designando por d a distância entre os pontos Q_3 e a projeção do ponto C_3 no plano YZ , temos ainda:

$$d = R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2
 \tag{c.64}$$

É fácil perceber através das figuras c.6 e c.7 que as coordenadas finais do ponto C_3 ficam então dadas pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned}x_3 &= x_2 = R_2 \cdot \cos \mathbf{q}_2 \\y_3 &= (\mathbf{r} + d) \cdot \cos \mathbf{b} - \mathbf{r} \\z_3 &= (\mathbf{r} + d) \cdot \sin \mathbf{b}\end{aligned}$$

ou, lembrando que $\mathbf{r} = 1/K$ e usando (c.63) e (c.64), virá:

$$\begin{aligned}x_3 &= R_2 \cdot \cos \mathbf{q}_2 \\y_3 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2 \right) \cos \left(\frac{K \cdot R_2 \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_o)}{\tan \mathbf{a}_2} \right) - \frac{1}{K} \\z_3 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2 \right) \sin \left(\frac{K \cdot R_2 \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_o)}{\tan \mathbf{a}_2} \right)\end{aligned} \quad (\text{c.65})$$

É imediato verificar que as equações (c.65) recuperam (c.62) no limite para $K \rightarrow 0$.

Através de (c.65) podemos obter o comprimento de arco infinitesimal associado à hélice deformada (configuração deformada Σ_3):

$$dS_3 = \left(\sqrt{\left(\frac{dx_3}{dq_2} \right)^2 + \left(\frac{dy_3}{dq_2} \right)^2 + \left(\frac{dz_3}{dq_2} \right)^2} \right) dq_2$$

resultando:

$$dS_3 = \left[\sin^2 \mathbf{a}_2 + \cos^2 \mathbf{a}_2 \cdot (1 + KR_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2)^2 \right]^{1/2} \cdot \frac{R_2 \cdot dq_2}{\sin \mathbf{a}_2} \quad (\text{c.66})$$

Definindo o parâmetro adimensional de curvatura dado por:

$$\mathbf{h} = K \cdot R_2 \quad (\text{c.67})$$

e a variável \mathbf{x} dada por:

$$\mathbf{x}(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2) = \left[\sin^2 \mathbf{a}_2 + \cos^2 \mathbf{a}_2 \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \sin \mathbf{q}_2)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{c.68})$$

podemos reescrever a equação (c.66), que fica simplesmente:

$$dS_3 = \frac{\mathbf{x} \cdot R_2}{\sin \mathbf{a}_2} \cdot dq_2 \quad (\text{c.69})$$

Note que no limite para $K \rightarrow 0$, temos: $\mathbf{h} \rightarrow 0$ e $\mathbf{x} \rightarrow 1$, de tal forma que a relação (c.69) recupera (c.21), como esperado.

O versor tangente à curva (associada ao eixo central do tendão) passando por C_3 é:

$$\vec{t}_3 = \frac{d\vec{r}_{c3}}{dS_3} = \frac{d\vec{r}_{c3}}{dq_2} \cdot \frac{dq_2}{dS_3} \quad (\text{c.70})$$

onde $\vec{r}_{c3} = (C_3 - O)$ é o vetor posição do ponto C_3 , com relação ao sistema fixo $OXYZ$.

Usando, então, as relações (c.65), que fornecem as componentes do vetor \vec{r}_{c3} , e as relações (c.67) a (c.69), virá:

$$\vec{t}_3 = t_{x3} \cdot \vec{e}_x + t_{y3} \cdot \vec{e}_y + t_{z3} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.71})$$

sendo:

$$t_{x3} = -[\text{sen } q_2 \cdot \text{sen } a_2] \cdot \frac{1}{x}$$

$$t_{y3} = [\cos q_2 \cdot \cos b \cdot \text{sen } a_2 - (1 + h \cdot \text{sen } q_2) \cdot \text{sen } b \cdot \cos a_2] \cdot \frac{1}{x}$$

$$t_{z3} = [\cos q_2 \cdot \text{sen } b \cdot \text{sen } a_2 + (1 + h \cdot \text{sen } q_2) \cdot \cos b \cdot \cos a_2] \cdot \frac{1}{x}$$

Novamente, pode-se perceber que quando $K \rightarrow 0$, temos: $h \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$, e a equação (c.71) recai consistentemente na equação (c.23).

Utilizando, agora, as fórmulas de Frenet para a condição deformada (Σ_3) do eixo central do tendão, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{n}_3}{dS_3} &= \mathbf{t}_3 \cdot \vec{b}_3 - \mathbf{c}_3 \cdot \vec{t}_3 \\ \frac{d\vec{b}_3}{dS_3} &= -\mathbf{t}_3 \cdot \vec{n}_3 \\ \frac{d\vec{t}_3}{dS_3} &= \mathbf{c}_3 \cdot \vec{n}_3 \end{aligned} \quad (\text{c.72})$$

E da terceira das relações (c.72), virá:

$$\mathbf{c}_3 \cdot \vec{n}_3 = \frac{d\vec{t}_3}{dS_3} = \frac{d\vec{t}_3}{dq_2} \cdot \frac{dq_2}{dS_3}$$

Obtemos, assim, as componentes do versor normal:

$$\vec{n}_3 = n_{x3} \cdot \vec{e}_x + n_{y3} \cdot \vec{e}_y + n_{z3} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.73})$$

sendo:

$$n_{x3} = \frac{\text{sen}^2 \mathbf{a}_2 \cdot \cos \mathbf{q}_2}{\mathbf{c}_3 \cdot R_2 \cdot \mathbf{x}^2} \cdot [-1 + g_1(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2)]$$

$$n_{y3} = \frac{\text{sen}^2 \mathbf{a}_2}{\mathbf{c}_3 \cdot R_2 \cdot \mathbf{x}^2} \cdot [g_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2) + g_3(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2)]$$

$$n_{z3} = -\frac{\text{sen}^2 \mathbf{a}_2}{\mathbf{c}_3 \cdot R_2 \cdot \mathbf{x}^2} \cdot [g_4(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2) + g_5(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2)]$$

e as funções $g_i(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2)$, $1 \leq i \leq 5$, são:

$$g_1(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2) = \frac{\mathbf{h} \cdot \cos^2 \mathbf{a}_2 \cdot \text{sen} \mathbf{q}_2 \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen} \mathbf{q}_2)}{\mathbf{x}^2}$$

$$g_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2) = -\frac{\mathbf{h} \cdot \cos \mathbf{b} \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen} \mathbf{q}_2)}{\tan^2 \mathbf{a}_2} - \text{sen} \mathbf{q}_2 \cdot \cos \mathbf{b} - \frac{2\mathbf{h} \cdot \cos \mathbf{q}_2 \cdot \text{sen} \mathbf{b}}{\tan \mathbf{a}_2}$$

$$g_3(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2) = \frac{\mathbf{h} \cdot \cos^2 \mathbf{a}_2 \cdot \cos \mathbf{q}_2 \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen} \mathbf{q}_2)}{\mathbf{x}^2} \cdot \left[\frac{\text{sen} \mathbf{b}}{\tan \mathbf{a}_2} (1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen} \mathbf{q}_2) - \cos \mathbf{q}_2 \cdot \cos \mathbf{b} \right]$$

$$g_4(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2) = \frac{\mathbf{h} \cdot \text{sen} \mathbf{b} \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen} \mathbf{q}_2)}{\tan^2 \mathbf{a}_2} + \text{sen} \mathbf{q}_2 \cdot \text{sen} \mathbf{b} - \frac{2\mathbf{h} \cdot \cos \mathbf{q}_2 \cdot \cos \mathbf{b}}{\tan \mathbf{a}_2}$$

$$g_5(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2) = \frac{\mathbf{h} \cdot \cos^2 \mathbf{a}_2 \cdot \cos \mathbf{q}_2 \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen} \mathbf{q}_2)}{\mathbf{x}^2} \cdot \left[\frac{\cos \mathbf{b}}{\tan \mathbf{a}_2} (1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen} \mathbf{q}_2) + \cos \mathbf{q}_2 \cdot \text{sen} \mathbf{b} \right]$$

onde \mathbf{b} e \mathbf{x} são dados respectivamente pelas relações (c.63) e (c.68), e \mathbf{c}_3 é a curvatura, cuja expressão final é dada por:

$$\mathbf{c}_3 = \frac{[f_1(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2) + f_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2)]^{1/2}}{R_2 \cdot \mathbf{x}^3} \quad (\text{c.74})$$

sendo as funções $f_i(\mathbf{a}, \mathbf{h}, \mathbf{q})$, $1 \leq i \leq 2$, dadas por:

$$f_1(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2) = \mathbf{h}^2 \cdot \cos^2 \mathbf{q}_2 \cdot \cos^2 \mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{x}^2 + \text{sen}^2 \mathbf{a}_2)^2$$

$$f_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{h}, \mathbf{q}_2) = \mathbf{x}^2 \cdot (\mathbf{h} \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen} \mathbf{q}_2) \text{sen} \mathbf{q}_2 \cdot \cos^2 \mathbf{a}_2 + \text{sen}^2 \mathbf{a}_2)^2$$

Pode-se facilmente verificar que a expressão (c.74) recupera (c.30) no limite para $K \rightarrow 0$. Da mesma forma, vê-se que, no limite, as componentes do versor normal dadas por (c.73) recaem nas componentes dadas pela equação (c.25).

Uma vez conhecidas as componentes dos versores tangente e normal, dadas respectivamente pelas relações (c.71) e (c.73), pode-se determinar as componentes do versor binormal diretamente através do produto vetorial entre os dois primeiros, resultando:

$$\vec{b}_3 = \vec{t}_3 \times \vec{n}_3 = (t_{y3} \cdot n_{z3} - t_{z3} \cdot n_{y3}) \cdot \vec{e}_x + (t_{z3} \cdot n_{x3} - t_{x3} \cdot n_{z3}) \cdot \vec{e}_y + (t_{x3} \cdot n_{y3} - t_{y3} \cdot n_{x3}) \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.75})$$

Pode-se mostrar que as componentes do versor binormal também recuperam as componentes dadas por (c.27) no limite para $K \rightarrow 0$.

Para o cálculo da tortuosidade, podemos utilizar tanto a primeira quanto a segunda das relações (c.72), já que dispomos agora de todos os parâmetros necessários ao cálculo. Utilizando, por exemplo, a segunda relação, teremos:

$$\mathbf{t}_3 = \left\| \frac{d\vec{b}_3}{dS_3} \right\| = \left\| \frac{d\vec{b}_3}{d\mathbf{q}_2} \right\| \left(\frac{dS_3}{d\mathbf{q}_2} \right)^{-1} \quad (\text{c.76})$$

O desenvolvimento de (c.76), no entanto, não compensa as dificuldades em expressá-la algebricamente através de uma relação matematicamente simples. O êxito nesta empreitada não conduziria, do ponto de vista prático, a nada melhor do que resultaria de uma simples expansão em série de Taylor. Deixaremos de lado esta tarefa, que poderá, se necessário, ser executada com o auxílio de um manipulador algébrico-computacional. Assim, se ao desenvolvermos a relação (c.76) substituirmos R_2 , \mathbf{a}_2 e \mathbf{q}_2 por:

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 + \Delta R \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a} \\ \mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}_1 + \frac{\Delta \mathbf{j} \cdot R_1 \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0)}{L_1 \cdot \tan \mathbf{a}_1} \end{aligned}$$

e fizermos a expansão em série de Taylor de (c.76) (em torno de $\Delta R = 0$, $\Delta \mathbf{a} = 0$, $\Delta \mathbf{j} = 0$ e $K = 0$), retendo apenas os termos lineares (em ΔR , $\Delta \mathbf{a}$, $\Delta \mathbf{j}$ e K), teremos a seguinte expressão linearizada para \mathbf{t}_3 :

$$\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan 2\mathbf{a}_1} \cdot \Delta \mathbf{a} + \frac{(2\cos^4 \mathbf{a}_1 - \cos^2 \mathbf{a}_1 - 2) \cdot \text{sen } \mathbf{q}_1}{\text{sen}^2 \mathbf{a}_1} \cdot KR_1 \right] \quad (\text{c.77})$$

Pode-se facilmente verificar que, para $K=0$, a expressão (c.77) recai de forma consistente nas equações deduzidas no item C.2.5 (ver equações (c.57) e (c.58)).

C.3.2. Observação para o caso de curvaturas “negativas”

No item anterior foram obtidas relações gerais (válidas até mesmo para grandes curvaturas impostas ao tubo) para expressar as componentes dos versores tangente, normal e binormal associados aos pontos do eixo central de uma hélice fletida sobre um toróide de curvatura K conhecida. Foram apresentadas também a expressão da curvatura (c_3) e uma indicação para a obtenção da tortuosidade (\mathbf{t}_3) em cada ponto da hélice. Lembramos, porém, que as equações foram obtidas considerando-se valores “positivos” de curvatura (i.é., $\mathbf{k}_x = K > 0$). Discutiremos agora as mudanças necessárias para o caso de curvaturas “negativas”. As figuras c.8 e c.9 ilustram o caso em questão.

Pela figura c.8 vemos que o vetor curvatura associado ao eixo central do toróide é:

$$\vec{\mathbf{K}} = K \cdot \vec{\mathbf{b}}_c = \mathbf{k}_x \cdot \vec{\mathbf{e}}_x$$

de tal forma que : $\mathbf{k}_x = -K < 0$ (pois $\vec{\mathbf{b}}_c = -\vec{\mathbf{e}}_x$), daí porque designarmos tal caso como de curvatura “negativa”.

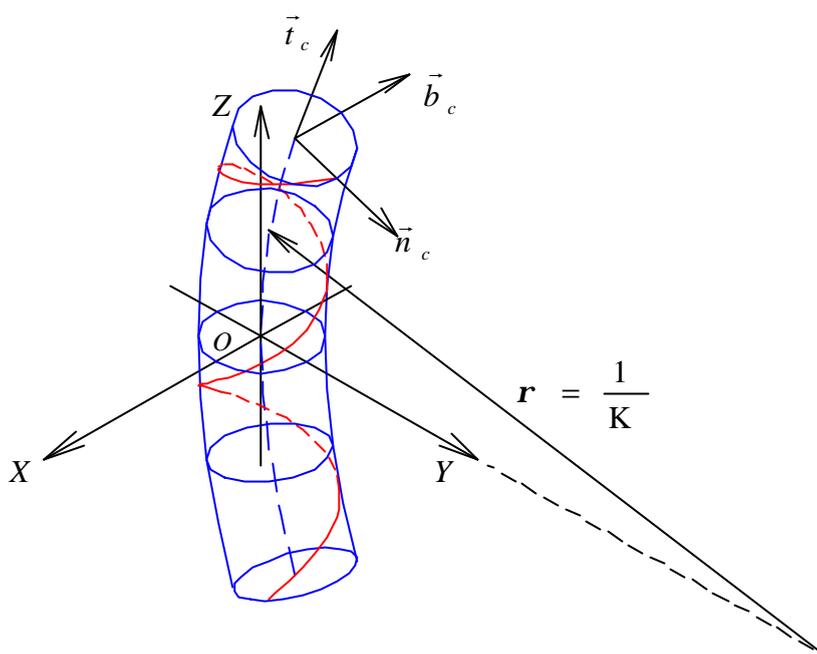


Figura c.8: Representação 3D do eixo central de um tendão fletido.

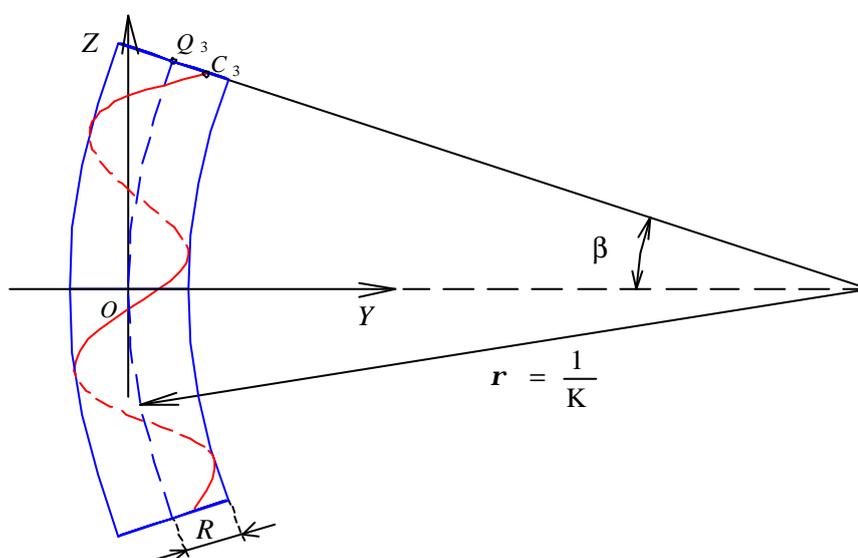


Figura c.9: Vista lateral (plano YZ) da hélice deformada.

Partindo da figura c.9 e utilizando raciocínio análogo ao detalhado anteriormente, mostra-se que as equações paramétricas dos pontos da hélice deformada são, agora, dadas pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned}
x_3 &= R_2 \cdot \cos q_2 \\
y_3 &= \frac{1}{K} - \left(\frac{1}{K} - R_2 \cdot \sin q_2 \right) \cdot \cos \left(\frac{K \cdot R_2 \cdot (q_2 - q_o)}{\tan a_2} \right) \\
z_3 &= \left(\frac{1}{K} - R_2 \cdot \sin q_2 \right) \cdot \sin \left(\frac{K \cdot R_2 \cdot (q_2 - q_o)}{\tan a_2} \right)
\end{aligned} \tag{c.78}$$

Comparando as equações paramétricas (c.65), obtidas para o caso de curvatura “positiva”, com as equações paramétricas (c.78), obtidas para o caso de curvatura “negativa”, é fácil perceber que os dois conjuntos de equações são em essência um só. Para mostrar isto, basta substituir nas equações (c.65) a variável “K” por “-K” e ver que as equações (c.78) são prontamente recuperadas. Podemos concluir, então, que todas as relações obtidas anteriormente (considerando curvaturas “positivas”) são também válidas para o caso em que a curvatura é “negativa”. Neste caso, basta substituirmos a variável “K” por “-K” em todas as relações em que ela aparecer.

C.3.3. Cálculo da deformação do eixo central do tendão

A deformação axial, medida na direção tangente ao eixo central do tendão, associada às configurações inicial (Σ_1) e deformada (Σ_3), será dada por:

$$\mathbf{e}_{t,13} = \frac{dS_3 - dS_1}{dS_1} = \frac{dS_3}{dS_2} \cdot \frac{dS_2}{dS_1} - 1 \tag{c.79}$$

mas, lembrando que:

$$\mathbf{e}_{t,12} = \frac{dS_2}{dS_1} - 1 = \text{deformação axial do eixo central do tendão associada a } \Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2;$$

$$\mathbf{e}_{t,23} = \frac{dS_3}{dS_2} - 1 = \text{deformação axial do eixo central do tendão associada a } \Sigma_2 \text{ e } \Sigma_3;$$

resulta:

$$\mathbf{e}_{t,13} = (1 + \mathbf{e}_{t,23})(1 + \mathbf{e}_{t,12}) - 1 \cong \mathbf{e}_{t,12} + \mathbf{e}_{t,23} \tag{c.80}$$

Ou seja, desde que as deformações sejam pequenas (como de fato são), podemos considerar a composição de deformação total como a soma das deformações $\mathbf{e}_{t,12}$ (que

corresponde à parcela de deformação devida aos carregamentos axissimétricos) e $\mathbf{e}_{t,23}$ (que corresponde à parcela de deformação devida à flexão do tubo). A primeira parcela, $\mathbf{e}_{t,12}$, já foi obtida anteriormente (ver equação (c.43)). Calculemos, então, a parcela $\mathbf{e}_{t,23}$:

$$\mathbf{e}_{t,23} = \frac{dS_3}{dS_2} - 1 = \left(\frac{dS_3}{dq_2} \right) \left(\frac{dS_2}{dq_2} \right)^{-1} - 1$$

Utilizando, então, as expressões (c.21) e (c.69), teremos:

$$\mathbf{e}_{t,23} = \mathbf{x} - 1 = \left[\sin^2 \mathbf{a}_2 + \cos^2 \mathbf{a}_2 \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \sin \mathbf{q}_2)^2 \right]^{1/2} - 1 \quad (\text{c.81})$$

Se lembrarmos, agora, que (ver expressões (c.18), (c.39), e (c.67)):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a} \\ \mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}_1 + \frac{\Delta \mathbf{j} \cdot R_1 \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0)}{L_1 \cdot \tan \mathbf{a}_1} \\ \mathbf{h} &= K \cdot R_2 = K \cdot (R_1 + \Delta R) \end{aligned}$$

teremos, após substituírmos $\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_2$ e \mathbf{h} pelas expressões dadas e fizermos a expansão em série de Taylor de (c.76) (em torno de $\Delta \mathbf{a} = 0, \Delta \mathbf{j} = 0, \Delta R = 0$ e $K = 0$) retendo apenas os termos lineares (em $\Delta \mathbf{a}, \Delta \mathbf{j}, \Delta R$ e K):

$$\mathbf{e}_{t,23} \cong K \cdot R_1 \cdot \cos^2 \mathbf{a}_1 \cdot \sin \mathbf{q}_1 \quad (\text{c.82})$$

A menos de pequenas diferenças quanto à notação, a expressão (c.82) coincide exatamente com a apresentada por Witz; Tan [73]. Deve-se ressaltar, uma vez mais, que tal expressão foi obtida considerando a hipótese de não escorregamento entre os tendões e o substrato.

Assim, a expressão final para a deformação axial, medida na direção tangente ao eixo central do tendão e associada às configurações Σ_1 e Σ_3 , é dada aproximadamente por:

$$\mathbf{e}_{t,13} = (\sin^2 \mathbf{a}_1) \frac{\Delta R}{R_1} + (\sin \mathbf{a}_1 \cdot \cos \mathbf{a}_1) R_1 \frac{\Delta \mathbf{j}}{L_1} + (\cos^2 \mathbf{a}_1) \frac{\Delta L}{L_1} + K R_1 \cos^2 \mathbf{a}_1 \cdot \sin \mathbf{q}_1 \quad (\text{c.83})$$

C.3.4. Obtenção das direções principais de flexo-torção

O objetivo deste item é a obtenção das direções principais de flexo-torção da seção transversal de um tendão, após a flexão do tubo/cabo. Em outras palavras, como podemos expressar os versores $(\vec{i}_3, \vec{j}_3, \vec{k}_3)$, associados à configuração deformada Σ_3 , na base formada pelos versores $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ do sistema de coordenadas fixo $OXYZ$?

Para resolver este problema vamos lançar mão da hipótese de Navier, já admitida anteriormente (ver item C.3.1), ou seja: após a deformação por flexão, as seções que eram inicialmente planas continuarão planas. No caso de tubos flexíveis e cabos umbilicais, isto quer dizer que o centróide de uma dada seção transversal do tubo/cabo e todos os centróides das seções transversais dos tendões de uma camada helicoidal (*definidos pela mesma seção transversal do tubo/cabo antes da deformação por flexão*) continuarão pertencendo à mesma seção transversal após a deformação.

Consideremos que antes da deformação por flexão (ou seja, na configuração deformada Σ_2), uma das direções principais de flexão seja dada por (ver item C.2.6):

$$\vec{i}_2 = \frac{(C_2 - Q_2)}{\|(C_2 - Q_2)\|} = \vec{n}_2$$

onde Q_2 corresponde ao centróide de uma dada seção transversal do tubo/cabo, e C_2 corresponde ao centróide da seção transversal de um tendão que fica definido pela interseção do eixo central do tendão com a seção transversal do tubo/cabo passando por Q_2 (logo, Q_2 e C_2 pertencem ao mesmo plano).

Após a deformação por flexão, a direção principal de flexão \vec{i}_3 será então dada por:

$$\vec{i}_3 = \frac{(Q_3 - C_3)}{\|(Q_3 - C_3)\|} \quad (\text{c.84})$$

o que se justifica pela hipótese de Navier e pela constrição imposta pelas camadas adjacentes que restringe os deslocamentos dos tendões⁴.

⁴ Para um tendão com seção transversal retangular, por exemplo, a rotação em torno do próprio eixo fica praticamente impedida pelas camadas adjacentes. O mesmo pode não ocorrer, entretanto, se a seção transversal do tendão for circular e se o atrito entre as camadas for desprezível.

Deve-se ressaltar que a equação (c.84) só será válida se \vec{i}_2 e \vec{n}_2 forem coincidentes, conforme explicado nos itens C.1.2 e C.2.6. Contudo, observa-se que após a flexão (configuração deformada Σ_3), os versores \vec{i}_3 e \vec{n}_3 não são mais coincidentes.

Lembrando agora que as coordenadas⁵ do ponto C_3 , pertencente ao eixo central do tendão na configuração deformada Σ_3 , são dadas por (ver equações (c.65)):

$$\begin{aligned} x_{C3} &= R_2 \cdot \cos \mathbf{q}_2 \\ y_{C3} &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2 \right) \cos \mathbf{b} - \frac{1}{K} \\ z_{C3} &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2 \right) \sin \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{c.85})$$

e notando que as coordenadas⁵ do ponto Q_3 (centróide do tubo/cabo, coplanar com C_3) são dadas por (ver figura c.10):

$$\begin{aligned} x_{Q3} &= 0 \\ y_{Q3} &= \frac{1}{K} \cdot \cos \mathbf{b} - \frac{1}{K} \\ z_{Q3} &= \frac{1}{K} \cdot \sin \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{c.86})$$

onde: $\mathbf{b} = \frac{K \cdot R_2 \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_o)}{\tan \mathbf{a}_2}$ (conforme equação (c.63))

resulta diretamente das equações (c.84) a (c.86):

$$\vec{i}_3 = -(\cos \mathbf{q}_2) \cdot \vec{e}_x - (\cos \mathbf{b} \cdot \sin \mathbf{q}_2) \cdot \vec{e}_y - (\sin \mathbf{b} \cdot \sin \mathbf{q}_2) \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.87})$$

A direção principal \vec{k}_3 será tomada como sendo coincidente com o versor tangente à curva formada pelo eixo central do tendão na configuração deformada Σ_3 . Portanto:

$$\vec{k}_3 = \vec{t}_3 = t_{x3} \cdot \vec{e}_x + t_{y3} \cdot \vec{e}_y + t_{z3} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.88})$$

onde as componentes t_{x3} , t_{y3} e t_{z3} são dadas no item C.3.1 (ver equações (c.71)).

⁵ Coordenadas segundo o sistema fixo de coordenadas OXYZ.

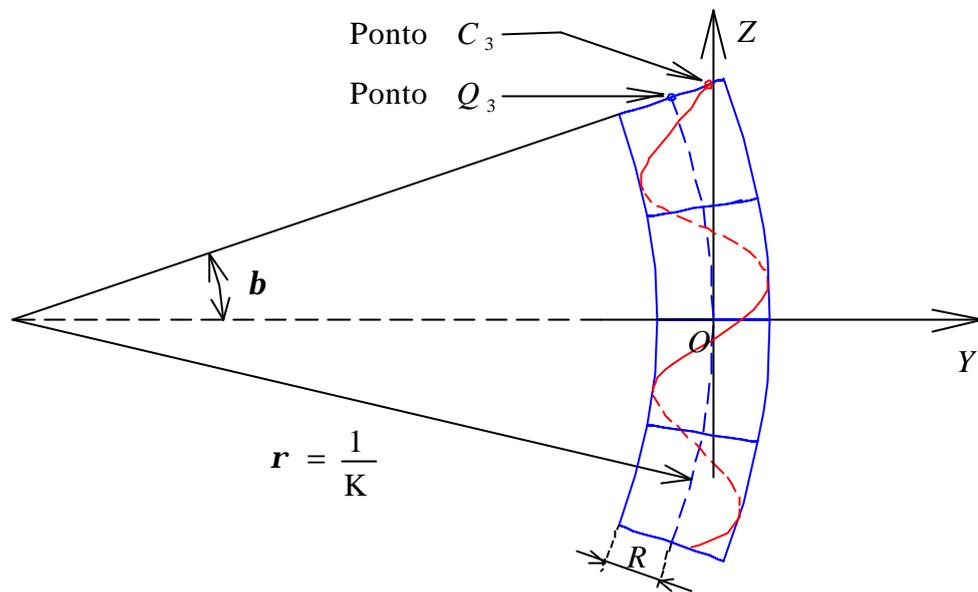


Figura c.10: Vista lateral (plano YZ) da hélice deformada.

A direção principal restante (\vec{j}_3) pode agora ser determinada através do produto vetorial entre as duas primeiras, resultando:

$$\vec{j}_3 = \vec{k}_3 \times \vec{i}_3 = j_{x3} \cdot \vec{e}_x + j_{y3} \cdot \vec{e}_y + j_{z3} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.89})$$

onde:

$$j_{x3} = \frac{\cos \mathbf{a}_2 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_2 \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen } \mathbf{q}_2)}{\mathbf{x}}$$

$$j_{y3} = -\frac{[\text{sen } \mathbf{b} \cdot \text{sen } \mathbf{a}_2 + \cos \mathbf{q}_2 \cdot \cos \mathbf{b} \cdot \cos \mathbf{a}_2 \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen } \mathbf{q}_2)]}{\mathbf{x}}$$

$$j_{z3} = \frac{[\cos \mathbf{b} \cdot \text{sen } \mathbf{a}_2 - \cos \mathbf{q}_2 \cdot \text{sen } \mathbf{b} \cdot \cos \mathbf{a}_2 \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen } \mathbf{q}_2)]}{\mathbf{x}}$$

e sendo \mathbf{h} e \mathbf{x} dados pelas equações (c.67) e (c.68).

C.3.5. Cálculo das curvaturas e da torção segundo eixos principais

As expressões que fornecem as componentes de curvatura e a torção segundo os eixos principais de flexo-torção da seção transversal dos tendões são (ver equações (a.9) e (a.10)):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{x3} &= -\mathbf{c}_3 \cdot \cos f_3 \\ \mathbf{k}_{y3} &= \mathbf{c}_3 \cdot \sin f_3 \\ \mathbf{k}_{t3} &= \frac{df_3}{dS_3} + \mathbf{t}_3 \end{aligned} \quad (\text{c.90})$$

As expressões de \mathbf{c}_3 e \mathbf{t}_3 já foram determinadas no item C.3.1. Precisamos agora calcular as quantidades: $\cos f_3$, $\sin f_3$ e df_3/dS_3 . Pela figura c.11 é imediato perceber que:

$$\begin{aligned} \cos f_3 &= \vec{n}_3 \cdot \vec{j}_3 = n_{x3} \cdot j_{x3} + n_{y3} \cdot j_{y3} + n_{z3} \cdot j_{z3} \\ \sin f_3 &= \vec{n}_3 \cdot \vec{i}_3 = n_{x3} \cdot i_{x3} + n_{y3} \cdot i_{y3} + n_{z3} \cdot i_{z3} \end{aligned} \quad (\text{c.91})$$

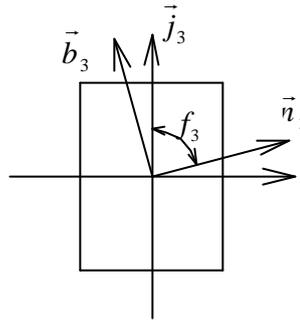


Figura c.11: Relação entre vetores (\vec{n}_3 e \vec{b}_3) e vetores (\vec{i}_3 e \vec{j}_3).

Utilizando as relações (c.91) em (c.90) virá, após o uso das relações (c.73), (c.74), (c.87) e (c.89) e posterior expansão das expressões resultantes em série de Taylor (em torno de $\Delta \mathbf{a} = 0, \Delta \mathbf{j} = 0, \Delta R = 0$ e $K = 0$) retendo apenas os termos lineares (em $\Delta \mathbf{a}, \Delta \mathbf{j}, \Delta R$ e K):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{x3} &\cong (-2 + \cos^2 \mathbf{a}_1) \cos \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{K} \\ \mathbf{k}_{y3} &\cong \mathbf{c}_1 \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan \mathbf{a}_1} \Delta \mathbf{a} + \frac{\cos(2\mathbf{a}_1)}{\tan^2 \mathbf{a}_1} \sin \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{K} R_1 \right] \end{aligned} \quad (\text{c.92})$$

Pode-se facilmente verificar que, para $K = 0$, as equações (c.92) recuperam exatamente os resultados previstos para \mathbf{k}_{x2} e \mathbf{k}_{y2} , conforme itens C.2.5 e C.2.6.

Para determinarmos df_3/dS_3 basta notar que das duas primeiras relações de (c.90) é possível obter:

$$f_3 = \arctan\left(-\frac{\mathbf{k}_{y3}}{\mathbf{k}_{x3}}\right) \quad (\text{c.93})$$

Partindo-se, então, das expressões completas (i.é., ainda não linearizadas) de \mathbf{k}_{x3} e \mathbf{k}_{y3} , pode-se determinar, a partir de (c.93), a expressão do ângulo f_3 e, conseqüentemente, de sua derivada com relação ao comprimento de arco deformado S_3 , já que:

$$\frac{df_3}{dS_3} = \frac{df_3}{dq_2} \left(\frac{dS_3}{dq_2}\right)^{-1}$$

Seguindo este procedimento, teremos como resultado final (após linearizarmos a expressão resultante através da expansão em série de Taylor em torno de $\Delta\mathbf{a} = 0$, $\Delta R = 0$, $\Delta\mathbf{j} = 0$ e $\mathbf{K} = 0$):

$$\frac{df_3}{dS_3} \cong \frac{(2 - \cos^2 \mathbf{a}_1) \cdot \text{sen } \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{K}}{\tan \mathbf{a}_1} \quad (\text{c.94})$$

De (c.77), (c.90) e (c.94), resulta, assim, a seguinte expressão simplificada para \mathbf{k}_{t3} :

$$\mathbf{k}_{t3} \cong \mathbf{t}_1 \cdot \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan 2\mathbf{a}_1} \Delta\mathbf{a} - 2 \cos^2 \mathbf{a}_1 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{K} R_1 \right] \quad (\text{c.95})$$

Mais uma vez observa-se que, para $\mathbf{K} = 0$, a expressão (c.95) é consistente com os resultados obtidos para \mathbf{k}_{t2} , conforme itens C.2.5 e C.2.6.

C.4. Geometria da camada considerando flexão com escorregamento

No item anterior (C.3) estudamos a geometria assumida por uma hélice cilíndrica quando o eixo central de seu cilindro suporte era submetido a uma curvatura constante em torno de um eixo. Na obtenção das equações então deduzidas, uma das principais hipóteses admitidas foi a de não-escorregamento dos tendões e de não-empenamento da seção, de tal forma que, para todas as configurações intermediárias entre Σ_2 e Σ_3 , os tendões permaneciam “unidos” às camadas adjacentes. Fisicamente, esta hipótese só é aceitável se as forças de atrito entre os tendões e as camadas adjacentes forem suficientemente altas para impedir qualquer deslocamento relativo entre as camadas. Por outro lado, a adoção desta hipótese para o comportamento do tubo/cabo faz com que sua rigidez flexional aumente consideravelmente (ver Cap. 5).

Testes realizados em tubos flexíveis⁶ mostram que, inicialmente (i.é., ao darmos início à flexão do tubo), a rigidez flexional é, de fato, bastante grande, uma vez que as forças de atrito ainda não foram vencidas. Desta forma, o modelo utilizado no item anterior pode representar de forma bastante razoável o comportamento estrutural nesta primeira etapa do carregamento. Porém, a observação experimental também revela que, uma vez vencidas as forças de atrito, há uma redução significativa da rigidez flexional: redução esta que é devida ao escorregamento relativo entre os tendões e as camadas adjacentes. Devido à sua simplicidade, boa parte dos trabalhos encontrados na literatura utilizam, de forma explícita ou não, a hipótese de escorregamento total dos tendões (*full slip*). Lançando mão desta hipótese simplificadora também, apresentaremos nos itens seguintes a última parte do estudo geométrico das camadas helicoidais, considerando agora a flexão com escorregamento. Esta última configuração deformada será nomeada configuração deformada Σ_4 .

⁶ Ver, por exemplo, Féret; Bournazel [20].

C.4.1. Determinação das novas equações paramétricas do eixo central

O objetivo deste item é a obtenção das equações paramétricas que definem a posição dos pontos pertencentes ao eixo central de um determinado tendão, após o escorregamento. Admitiremos que o raio de curvatura imposto ao tubo/cabo continue inalterado. Partindo da configuração deformada Σ_3 , correspondente à flexão sem escorregamento, podemos considerar então que, após o escorregamento, as equações paramétricas dos pontos do eixo central do tendão na nova configuração sejam dadas por:

$$\begin{aligned}x_4 &= x_3 + \Delta_x \\y_4 &= y_3 + \Delta_y \\z_4 &= z_3 + \Delta_z\end{aligned}\tag{c.96}$$

onde (x_3, y_3, z_3) correspondem às coordenadas⁷ de um ponto genérico do eixo central na configuração deformada Σ_3 , e $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ correspondem às componentes⁷ do vetor deslocamento ($\vec{\Delta}$) no ponto considerado.

Substituindo as relações (c.65) em (c.96), teremos:

$$\begin{aligned}x_4 &= R_2 \cdot \cos \mathbf{q}_2 + \Delta_x \\y_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sen \mathbf{q}_2 \right) \cos \mathbf{b} - \frac{1}{K} + \Delta_y \\z_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sen \mathbf{q}_2 \right) \sen \mathbf{b} + \Delta_z\end{aligned}\tag{c.97}$$

onde $\mathbf{b} = \frac{K \cdot R_2 \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_o)}{\tan \mathbf{a}_2}$ (ver equação (c.63)).

Por outro lado, podemos considerar que o ponto (pertencente ao eixo central do tendão) que na configuração deformada Σ_3 tinha sua posição definida pelos parâmetros \mathbf{b} e \mathbf{q}_2 , tenha agora (ou seja, após o escorregamento) sua posição definida pelos parâmetros $\mathbf{b}_4 = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$ e $\mathbf{q}_4 = \mathbf{q}_2 + \Delta \mathbf{q}$, onde $\Delta \mathbf{b}$ representa o avanço angular da seção transversal com relação a uma seção transversal tomada como referência (seção contida

⁷ Com relação ao sistema fixo de coordenadas $OXYZ$.

no plano OXY) e $\Delta \mathbf{q}$ representa o avanço angular medido no plano da seção transversal com relação a um eixo paralelo ao eixo fixo OX (ver figura c.12).

Desta forma, as equações paramétricas dos pontos do eixo central do tendão na nova configuração deformada Σ_4 também podem ser expressas pelas seguintes relações equivalentes:

$$\begin{aligned} x_4 &= R_2 \cdot \cos \mathbf{q}_4 \\ y_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_4 \right) \cos \mathbf{b}_4 - \frac{1}{K} \\ z_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_4 \right) \sin \mathbf{b}_4 \end{aligned} \quad (\text{c.98})$$

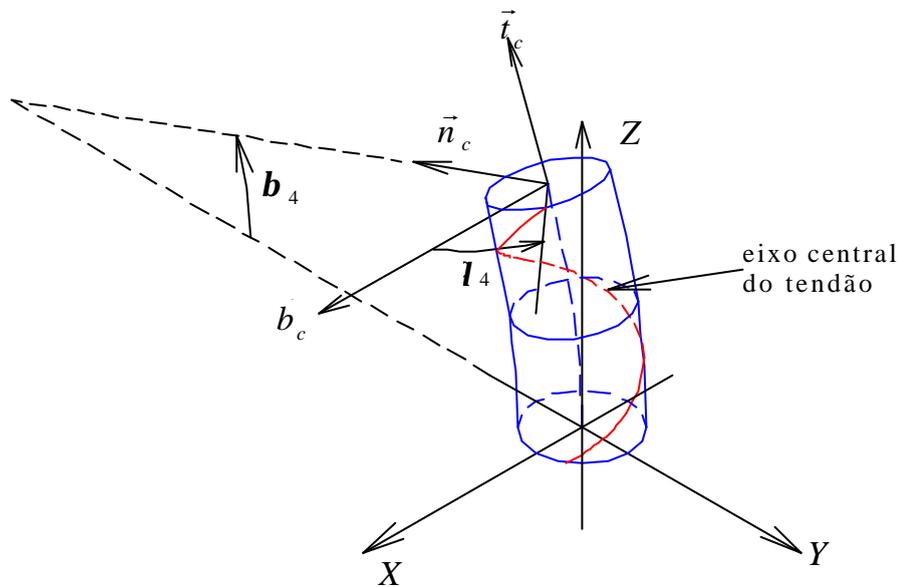


Figura c.12: Indicação dos parâmetros $\mathbf{b}_4 = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$ e $\mathbf{q}_4 = \mathbf{q}_2 + \Delta \mathbf{q}$.

C.4.2. Eixos de Darboux-Ribeaucourt

Para entender o processo de determinação das componentes do vetor deslocamento $\vec{\Delta}$, é preciso antes descrever uma nova base de versores associada à curva formada pelo eixo central do tendão na configuração deformada Σ_3 (i.é, anterior ao escorregamento dos tendões). Consideremos, então, a base $\mathbf{b} = (\vec{t}_3, \vec{N}_3, \vec{B}_3)$ formada pelos seguintes versores (ver figura c.13):

\vec{t}_3 : é o versor tangente ao eixo central do tendão na configuração deformada Σ_3 ;

\vec{N}_3 : é o versor normal à superfície de suporte do eixo central do tendão na configuração deformada Σ_3 ;

\vec{B}_3 : é o versor que define a direção transversal, definido como o produto vetorial entre os versores \vec{t}_3 e \vec{N}_3 .

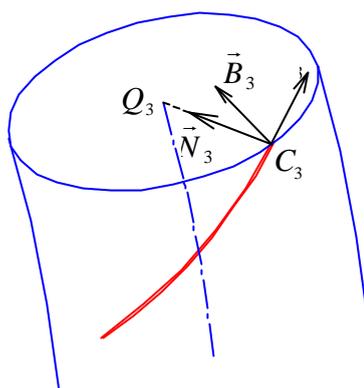


Figura c.13: Base formada pelos versores $(\vec{t}_3, \vec{N}_3, \vec{B}_3)$.

Segundo F  ret; Leroy; Estrier [21], as dire  es formadas por $(\vec{t}, \vec{N}, \vec{B})$ formam os chamados eixos de Darboux-Ribeaucourt. Deve-se observar que os versores \vec{N} e \vec{B} n  o s  o as dire  es principais de curvatura normal e binormal (designadas, respectivamente, por \vec{n} e \vec{b}) da curva formada pelo eixo central do tend  o. Os versores $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$, que definem o triedro de Frenet, s  o obtidos diretamente das equa  es param  tricas de uma dada curva, dependendo, portanto, apenas destas equa  es. J   os eixos de Darboux-Ribeaucourt dependem n  o apenas das equa  es param  tricas que definem a curva, mas tamb  m das equa  es que definem a superf  cie sobre a qual a curva est   assentada.

Lembrando agora que a determina  o do versor tangente \vec{t}_3 j   foi feita no item C.3.1 (ver equa  o (c.71)) e que o versor \vec{N}_3 , normal    superf  cie suporte,    dado por (ver figura c.13):

$$\vec{N}_3 = \frac{(Q_3 - C_3)}{\|(Q_3 - C_3)\|}$$

coincidindo, portanto, com a direção principal de flexão \vec{i}_3 (conforme hipóteses feitas no item C.3.4), temos (ver equação (c.87)):

$$\vec{N}_3 = -(\cos \mathbf{q}_2) \cdot \vec{e}_x - (\cos \mathbf{b} \cdot \text{sen } \mathbf{q}_2) \cdot \vec{e}_y - (\text{sen } \mathbf{b} \cdot \text{sen } \mathbf{q}_2) \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.99})$$

Para determinarmos o versor \vec{B}_3 basta apenas calcular o produto vetorial entre os versores \vec{t}_3 e \vec{N}_3 , resultando:

$$\vec{B}_3 = \vec{t}_3 \times \vec{N}_3 = \vec{k}_3 \times \vec{i}_3 = \vec{j}_3 \quad (\text{c.100})$$

ou seja, as componentes do versor \vec{B}_3 coincidem com as da direção principal de flexão \vec{j}_3 , dadas pela equação (c.89).

Se admitirmos, agora, que os deslocamentos $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ são pequenos se comparados à alguma dimensão característica da seção transversal da camada (como, por exemplo, o raio), podemos considerar que o vetor deslocamento $\vec{\Delta} = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$, se escrito com relação à base $(\vec{t}_3, \vec{N}_3, \vec{B}_3)$, tenha apenas componentes segundo a direção tangencial (\vec{t}_3) e transversal (\vec{B}_3), já que a componente de deslocamento segundo a direção \vec{N}_3 fica praticamente impedida devido à existência das camadas adjacentes. Assim:

$$\vec{\Delta} \cong \Delta_t \cdot \vec{t}_3 + \Delta_b \cdot \vec{B}_3 \quad (\text{c.101})$$

onde Δ_t e Δ_b são as componentes de deslocamento segundo as direções tangencial (\vec{t}_3) e transversal (\vec{B}_3), respectivamente.

Utilizando as equações (c.71) e (c.89), que fornecem as componentes dos versores \vec{t}_3 e \vec{B}_3 segundo a base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associada ao sistema fixo de coordenadas $OXYZ$, e lembrando que um vetor se escreve de forma única numa dada base, teremos as seguintes relações entre as componentes de deslocamento $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ e (Δ_t, Δ_b) :

$$\begin{aligned}\Delta_x &= \Delta_t \cdot t_{x3} + \Delta_b \cdot B_{x3} \\ \Delta_y &= \Delta_t \cdot t_{y3} + \Delta_b \cdot B_{y3} \\ \Delta_z &= \Delta_t \cdot t_{z3} + \Delta_b \cdot B_{z3}\end{aligned}\tag{c.102}$$

C.4.3. Cálculo de $\Delta \mathbf{q}$ e $\Delta \mathbf{b}$ em função das componentes Δ_t e Δ_b

Se substituirmos as relações (c.102) nas equações paramétricas (c.97) e lembrarmos que as últimas são equivalentes às equações paramétricas (c.98), teremos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} R_2 \cdot (\cos \mathbf{q}_2) + \Delta_t \cdot t_{x3} + \Delta_b \cdot B_{x3} &= R_2 \cdot \cos \mathbf{q}_4 \\ \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2 \right) \cos \mathbf{b} + \Delta_t \cdot t_{y3} + \Delta_b \cdot B_{y3} &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_4 \right) \cos \mathbf{b}_4 \\ \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2 \right) \sin \mathbf{b} + \Delta_t \cdot t_{z3} + \Delta_b \cdot B_{z3} &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_4 \right) \sin \mathbf{b}_4 \end{aligned} \quad (\text{c.103})$$

Substituindo, agora, as expressões que fornecem as componentes dos vetores \vec{t}_3 e \vec{B}_3 (ver equações (c.71), (c.89) e (c.100)) e considerando ainda que:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_4 &= \mathbf{q}_2 + \Delta \mathbf{q} \\ \mathbf{b}_4 &= \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{c.104})$$

onde $\Delta \mathbf{q} \ll 1$ e $\Delta \mathbf{b} \ll 1$ (por hipótese), obtemos as seguintes relações aproximadas para a determinação das variações $\Delta \mathbf{q}$ e $\Delta \mathbf{b}$ em função dos deslocamentos tangencial (Δ_t) e transversal (Δ_b)⁸:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{q} &\cong \left(\frac{\sin \mathbf{a}_2}{R_2 \cdot \mathbf{x}} \right) \Delta_t - \left(\frac{\cos \mathbf{a}_2 \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \sin \mathbf{q}_2)}{R_2 \cdot \mathbf{x}} \right) \Delta_b \\ \Delta \mathbf{b} &\cong \frac{K \cdot \Delta_t \cdot \cos \mathbf{a}_2}{\mathbf{x}} + \frac{K \cdot \Delta_b \cdot \sin \mathbf{a}_2}{\mathbf{x} \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \sin \mathbf{q}_2)} \end{aligned} \quad (\text{c.105})$$

C.4.4. Cálculo da deformação do eixo central do tendão

Procedendo de forma análoga ao que foi feito no item C.3.3, temos que a deformação axial, medida na direção tangente ao eixo central do tendão e associada à configuração deformada Σ_4 , é dada por:

$$\mathbf{e}_{t,14} = \frac{dS_4 - dS_1}{dS_1} = \frac{dS_4}{dS_3} \cdot \frac{dS_3}{dS_2} \cdot \frac{dS_2}{dS_1} - 1 \quad (\text{c.106})$$

mas, lembrando que:

$$\mathbf{e}_{t,12} = \frac{dS_2}{dS_1} - 1 = \text{deformação axial do eixo central do tendão (associada a } \Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2),$$

$$\mathbf{e}_{t,23} = \frac{dS_3}{dS_2} - 1 = \text{deformação axial do eixo central do tendão (associada a } \Sigma_2 \text{ e } \Sigma_3),$$

$$\mathbf{e}_{t,34} = \frac{dS_4}{dS_3} - 1 = \text{deformação axial do eixo central do tendão (associada a } \Sigma_3 \text{ e } \Sigma_4),$$

resulta:

$$\mathbf{e}_{t,14} = (1 + \mathbf{e}_{t,34})(1 + \mathbf{e}_{t,23})(1 + \mathbf{e}_{t,12}) - 1 \cong \mathbf{e}_{t,12} + \mathbf{e}_{t,23} + \mathbf{e}_{t,34} \quad (\text{c.107})$$

Como já ressaltamos anteriormente (item C.3.3), a aproximação dada acima só é válida caso os níveis de deformações sejam bastante pequenos se comparados à unidade (o que geralmente ocorre nas aplicações). As duas primeiras parcelas, correspondentes a $\mathbf{e}_{t,12}$ e $\mathbf{e}_{t,23}$, já foram obtidas anteriormente (ver equações (c.43) e (c.82)). Calculemos, então, a parcela $\mathbf{e}_{t,34}$:

$$\mathbf{e}_{t,34} = \frac{dS_4}{dS_3} - 1 = \left(\frac{dS_4}{dq_2} \right) \left(\frac{dS_3}{dq_2} \right)^{-1} - 1 \quad (\text{c.108})$$

Porém:

$$\frac{dS_4}{dq_2} = \left[\left(\frac{dx_4}{dq_2} \right)^2 + \left(\frac{dy_4}{dq_2} \right)^2 + \left(\frac{dz_4}{dq_2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{c.109})$$

e, da expressão (c.69) vem:

$$\frac{dS_3}{dq_2} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}_2}{\text{sen } \mathbf{a}_2}$$

⁸ Mostra-se que $\Delta \mathbf{q}$ é obtido a partir da primeira relação dada por (c.103), enquanto $\Delta \mathbf{b}$ pode ser obtido a partir da segunda ou da terceira relação dada por (c.103).

O problema principal que surge neste momento é a avaliação da expressão (c.109). Se partirmos das equações paramétricas (c.97) e utilizarmos as relações dadas por (c.102), teremos:

$$\begin{aligned}x_4 &= R_2 \cdot \cos \mathbf{q}_2 + \Delta_t \cdot t_{x3} + \Delta_b \cdot B_{x3} \\y_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2 \right) \cos \mathbf{b} - \frac{1}{K} + \Delta_t \cdot t_{y3} + \Delta_b \cdot B_{y3} \\z_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2 \right) \sin \mathbf{b} + \Delta_t \cdot t_{z3} + \Delta_b \cdot B_{z3}\end{aligned} \quad (\text{c.110})$$

Nota-se pela expressão (c.110) que há uma indefinição com relação às funções deslocamento Δ_t e Δ_b . Para resolver este problema admitiremos que tais funções possam ser expressas na forma:

$$\begin{aligned}\Delta_t &= \Delta_t(\mathbf{q}_2) = \Delta_{tc} \cdot \cos \mathbf{q}_2 + \Delta_{ts} \cdot \sin \mathbf{q}_2 \\ \Delta_b &= \Delta_b(\mathbf{q}_2) = \Delta_{bc} \cdot \cos \mathbf{q}_2 + \Delta_{bs} \cdot \sin \mathbf{q}_2\end{aligned} \quad (\text{c.111})$$

onde $\Delta_{tc}, \Delta_{ts}, \Delta_{bc}$ e Δ_{bs} são os coeficientes que fornecem as amplitudes das funções seno e co-seno. Note que os subscritos utilizados referem-se, respectivamente, à direção do deslocamento (tangencial ou transversal) e à função aproximadora utilizada (seno ou co-seno).

A escolha das funções seno e co-seno para a aproximação dos funções deslocamento Δ_t e Δ_b se justifica pelos seguintes motivos:

- 1) Considerando a geometria do eixo central dos tendões, é razoável supor que as funções deslocamentos sejam funções periódicas cujo argumento seja proporcional ao parâmetro angular \mathbf{q}_2 ;
- 2) Entre as funções periódicas mais simples de serem utilizadas estão justamente as função seno e co-seno;
- 3) Mesmo que as funções deslocamento fossem descritas por funções periódicas mais complexas que as admitidas por (c.111), estas poderiam ser aproximadas através de séries de Fourier, cujos primeiros termos são justamente as funções seno e co-seno.

Desta forma, (c.111) consiste, na verdade, numa primeira aproximação para as funções deslocamento Δ_t e Δ_b . Uma proposta para a determinação das amplitudes Δ_{tc} , Δ_{ts} , Δ_{bc} e Δ_{bs} será indicada mais adiante. Por enquanto, admitiremos que tais amplitudes sejam quantidades conhecidas. Com as expressões dadas fica fácil determinarmos a deformação $\mathbf{e}_{t,34}$. Efetuando as operações necessárias e fazendo a expansão em série de Taylor de $\mathbf{e}_{t,34}$ (em torno de $\mathbf{K} = 0$, $\Delta R = 0$, $\Delta \mathbf{a} = 0$, $\Delta \mathbf{j} = 0$, $\Delta_{tc} = 0$, $\Delta_{ts} = 0$, $\Delta_{bc} = 0$ e $\Delta_{bs} = 0$), resulta a seguinte expressão linearizada:

$$\mathbf{e}_{t,34} \cong \frac{\text{sen } \mathbf{a}_1 \cdot \text{cos } \mathbf{q}_1}{R_1} \cdot \Delta_{ts} - \frac{\text{sen } \mathbf{a}_1 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_1}{R_1} \cdot \Delta_{tc} \quad (\text{c.112})$$

Deve-se observar que a expressão (c.112), apesar de aproximada, é consistente pois, dentro da hipótese de pequenos deslocamentos, o deslocamento transversal (Δ_b) não deve afetar de forma significativa a deformação axial do tendão, de tal forma que, numa primeira aproximação, já era esperado que $\mathbf{e}_{t,34}$ dependesse apenas da componente de deslocamento tangencial (Δ_t). Além disso, pode-se notar que, no caso em que ambas as amplitudes Δ_{tc} e Δ_{ts} são nulas, teremos como resultado $\mathbf{e}_{t,34} \cong 0$, o que também faz sentido, uma vez que a deformação axial $\mathbf{e}_{t,34}$ é devida apenas ao escorregamento dos tendões.

Desta forma, a expressão final para a deformação $\mathbf{e}_{t,14}$, medida na direção tangente ao eixo central do tendão, é dada aproximadamente por (ver equações (c.107), (c.43), (c.82) e (c.112)):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{t,14} \cong & (\text{sen}^2 \mathbf{a}_1) \frac{\Delta R}{R_1} + (\text{sen } \mathbf{a}_1 \cdot \text{cos } \mathbf{a}_1) R_1 \frac{\Delta \mathbf{j}}{L_1} + (\text{cos}^2 \mathbf{a}_1) \frac{\Delta L}{L_1} + \\ & + \mathbf{K} R_1 \text{cos}^2 \mathbf{a}_1 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_1 + \frac{\text{sen } \mathbf{a}_1 \cdot \text{cos } \mathbf{q}_1}{R_1} \cdot \Delta_{ts} - \frac{\text{sen } \mathbf{a}_1 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_1}{R_1} \cdot \Delta_{tc} \end{aligned} \quad (\text{c.113})$$

C.4.5. Cálculo dos versores associados ao triedro de Frenet

Neste item determinaremos os versores tangente, normal e binormal associados à curva formada pelo eixo central do tendão na configuração deformada Σ_4 . Seja C_4 um ponto pertencente ao eixo central do tendão nesta configuração. O versor tangente à curva (associada ao eixo central do tendão) passando por C_4 é dado por:

$$\vec{t}_4 = \frac{d\vec{r}_{c4}}{dS_4} = \frac{d\vec{r}_{c4}}{d\mathbf{q}_2} \cdot \frac{d\mathbf{q}_2}{dS_4} \quad (\text{c.114})$$

onde $\vec{r}_{c4} = (C_4 - O)$ é o vetor posição do ponto C_4 , com relação ao sistema fixo $OXYZ$.

Usando, então, as relações (c.97), que fornecem as componentes do vetor \vec{r}_{c4} , e as relações auxiliares (c.102) e (c.111), é possível determinarmos as componentes do versor tangente \vec{t}_4 . Contudo, o desenvolvimento de (c.114) não compensa as dificuldades em expressar tal relação através de uma forma matematicamente mais simples. Lembrando que esta tarefa pode, se necessário, ser executada com o auxílio de um manipulador algébrico-computacional, deixaremos o resultado de (c.114) na forma implícita dada por:

$$\vec{t}_4 = t_{x4} \cdot \vec{e}_x + t_{y4} \cdot \vec{e}_y + t_{z4} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.115})$$

sendo as componentes (t_{x4}, t_{y4}, t_{z4}) determinadas conforme indicado acima.

Conforme ressaltado em outras vezes, uma simples expansão em série de Taylor pode conduzir, do ponto de vista prático, a resultados suficientemente precisos. Assim, se ao desenvolvermos a relação (c.114), substituímos R_2, \mathbf{a}_2 e \mathbf{q}_2 por:

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 + \Delta R \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a} \\ \mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}_1 + \frac{R_1 \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0)}{L_1 \cdot \tan \mathbf{a}_1} \cdot \Delta \mathbf{j} \end{aligned}$$

e fizermos a expansão em série de Taylor das componentes do versor \vec{t}_4 (em torno de $\mathbf{K} = 0$, $\Delta R = 0$, $\Delta \mathbf{a} = 0$, $\Delta \mathbf{j} = 0$, $\Delta_{tc} = 0$, $\Delta_{ts} = 0$, $\Delta_{bc} = 0$ e $\Delta_{bs} = 0$), retendo apenas os termos lineares, teremos as seguintes expressões linearizadas para as componentes:

$$\begin{aligned}
t_{x4} \cong & -\operatorname{sen} \mathbf{q}_1 \cdot \operatorname{sen} \mathbf{a}_1 - \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot \Delta \mathbf{a} - \cos \mathbf{q}_1 \cdot \operatorname{sen} \mathbf{a}_1 \cdot \Delta \mathbf{j} + \left(R_1 \cdot \cos^2 \mathbf{a}_1 \cdot \operatorname{sen} \mathbf{a}_1 \cdot \operatorname{sen}^2 \mathbf{q}_1 \right) \mathbf{K} \\
& - \left(\frac{\cos^2 \mathbf{q}_1 \cdot \operatorname{sen}^2 \mathbf{a}_1}{R_1} \right) \Delta_{tc} - \left(\frac{\operatorname{sen}(2\mathbf{q}_1) \cdot \operatorname{sen}^2 \mathbf{a}_1}{2 \cdot R_1} \right) \Delta_{ts} + \left(\frac{\operatorname{sen}(2\mathbf{a}_1) \cdot \cos(2\mathbf{q}_1)}{2 \cdot R_1} \right) \Delta_{bc} + \\
& + \left(\frac{\operatorname{sen}(2\mathbf{a}_1) \cdot \operatorname{sen}(2\mathbf{q}_1)}{2 \cdot R_1} \right) \Delta_{bs}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{y4} \cong & \cos \mathbf{q}_1 \cdot \operatorname{sen} \mathbf{a}_1 + \cos \mathbf{q}_1 \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot \Delta \mathbf{a} - \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 \cdot \operatorname{sen} \mathbf{a}_1 \cdot \Delta \mathbf{j} \\
& - \frac{R_1 \cos^2 \mathbf{a}_1}{\operatorname{sen} \mathbf{a}_1} \left(\frac{\operatorname{sen}(2\mathbf{q}_1) \cdot \operatorname{sen}^2 \mathbf{a}_1}{2} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0 \right) \mathbf{K} - \left(\frac{\operatorname{sen}(2\mathbf{q}_1) \cdot \operatorname{sen}^2 \mathbf{a}_1}{2 \cdot R_1} \right) \Delta_{tc} \\
& - \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \mathbf{q}_1 \cdot \operatorname{sen}^2 \mathbf{a}_1}{R_1} \right) \Delta_{ts} + \left(\frac{\operatorname{sen}(2\mathbf{a}_1) \cdot \operatorname{sen}(2\mathbf{q}_1)}{2 \cdot R_1} \right) \Delta_{bc} - \left(\frac{\operatorname{sen}(2\mathbf{a}_1) \cdot \cos(2\mathbf{q}_1)}{2 \cdot R_1} \right) \Delta_{bs}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{z4} \cong & \cos \mathbf{a}_1 - \operatorname{sen} \mathbf{a}_1 \cdot \Delta \mathbf{a} + R_1 \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot \cos \mathbf{q}_1 \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0 + \operatorname{sen}^2 \mathbf{a}_1 \cdot \tan \mathbf{q}_1) \mathbf{K} \\
& - \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \mathbf{a}_1 \cdot \operatorname{sen} \mathbf{q}_1}{R_1} \right) \Delta_{bc} + \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \mathbf{a}_1 \cdot \cos \mathbf{q}_1}{R_1} \right) \Delta_{bs}
\end{aligned}$$

Para a obtenção dos versores normal (\vec{n}_4) e binormal (\vec{b}_4), utilizaremos as fórmulas de Frenet para a configuração deformada Σ_4 , ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{n}_4}{dS_4} &= \mathbf{t}_4 \cdot \vec{b}_4 - \mathbf{c}_4 \cdot \vec{t}_4 \\
\frac{d\vec{b}_4}{dS_4} &= -\mathbf{t}_4 \cdot \vec{n}_4 \\
\frac{d\vec{t}_4}{dS_4} &= \mathbf{c}_4 \cdot \vec{n}_4
\end{aligned} \tag{c.116}$$

Da terceira das relações (c.116), vem:

$$\mathbf{c}_4 = \left\| \frac{d\vec{t}_4}{dS_4} \right\| = \left\| \frac{d\vec{t}_4}{d\mathbf{q}_2} \cdot \frac{d\mathbf{q}_2}{dS_4} \right\|$$

expressão que, uma vez expandida em série de Taylor (em torno de $\mathbf{K}=0$, $\Delta R=0$, $\Delta \mathbf{a}=0$, $\Delta \mathbf{j}=0$, $\Delta_{tc}=0$, $\Delta_{ts}=0$, $\Delta_{bc}=0$ e $\Delta_{bs}=0$), resulta na seguinte expressão linearizada para a curvatura:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_4 \cong \mathbf{c}_1 \cdot \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan \mathbf{a}_1} \cdot \Delta \mathbf{a} + \frac{\sin \mathbf{q}_1 \cdot \cos(2\mathbf{a}_1)}{\tan^2 \mathbf{a}_1} \cdot \mathbf{K}R_1 \right] + \\ + \mathbf{c}_1 \cdot \left[2 \cdot \sin \mathbf{q}_1 \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} - 2 \cdot \cos \mathbf{q}_1 \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1} \right] \end{aligned} \quad (\text{c.117})$$

Ainda, da terceira das relações (c.116), pode-se também obter as componentes do vetor normal:

$$\vec{n}_4 = \frac{1}{\mathbf{c}_4} \cdot \frac{d\vec{t}_4}{dS_4} = n_{x4} \cdot \vec{i} + n_{y4} \cdot \vec{j} + n_{z4} \cdot \vec{k} \quad (\text{c.118})$$

que, uma vez expandidas em série de Taylor (em torno de $\mathbf{K}=0$, $\Delta R=0$, $\Delta \mathbf{a}=0$, $\Delta \mathbf{j}=0$, $\Delta_{tc}=0$, $\Delta_{ts}=0$, $\Delta_{bc}=0$ e $\Delta_{bs}=0$), resultam nas seguintes expressões linearizadas:

$$n_{x4} \cong -\cos \mathbf{q}_1 + \left(2 - \cos^2 \mathbf{a}_1 \right) \frac{\sin 2\mathbf{q}_1}{2 \cdot \tan^2 \mathbf{a}_1} \cdot \mathbf{K}R_1 + (\sin \mathbf{q}_1) \cdot \Delta \mathbf{j} - (\cos \mathbf{a}_1 \cdot \sin 2\mathbf{q}_1) \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1}$$

$$- \left(2 \cos \mathbf{a}_1 \cdot \sin^2 \mathbf{q}_1 \right) \frac{\Delta_{bs}}{R_1} + \left(\frac{\sin \mathbf{a}_1 \cdot \sin 2\mathbf{q}_1}{2} \right) \frac{\Delta_{tc}}{R_1} + \left(\sin \mathbf{a}_1 \cdot \sin^2 \mathbf{q}_1 \right) \frac{\Delta_{ts}}{R_1}$$

$$n_{y4} \cong -\sin \mathbf{q}_1 + \frac{(-2 + \cos^2 \mathbf{a}_1) \cos^2 \mathbf{q}_1}{\tan^2 \mathbf{a}_1} \cdot \mathbf{K}R_1 - (\cos \mathbf{q}_1) \cdot \Delta \mathbf{j} + 2 \cos \mathbf{a}_1 \cdot \cos^2 \mathbf{q}_1 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} +$$

$$+ \cos \mathbf{a}_1 \cdot \sin(2\mathbf{q}_1) \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1} - \sin \mathbf{a}_1 \cdot \cos^2 \mathbf{q}_1 \cdot \frac{\Delta_{tc}}{R_1} - \frac{\sin \mathbf{a}_1 \cdot \sin(2\mathbf{q}_1)}{2} \cdot \frac{\Delta_{ts}}{R_1}$$

$$n_{z4} \cong \left[(2 - \cos^2 \mathbf{a}_1) \cdot \cos \mathbf{q}_1 - \sin \mathbf{q}_1 \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) \right] \frac{\mathbf{K}R_1}{\tan \mathbf{a}_1} - (\sin \mathbf{a}_1 \cdot \cos \mathbf{q}_1) \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1}$$

$$- (\sin \mathbf{a}_1 \cdot \sin \mathbf{q}_1) \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1}$$

Uma vez conhecidas as componentes dos vetores tangente e normal, dadas respectivamente pelas relações (c.115) e (c.118), pode-se determinar as componentes do vetor binormal diretamente através do produto vetorial entre os dois primeiros, resultando:

$$\vec{b}_4 = \vec{t}_4 \times \vec{n}_4 = (t_{y4} \cdot n_{z4} - t_{z4} \cdot n_{y4}) \cdot \vec{i} + (t_{z4} \cdot n_{x4} - t_{x4} \cdot n_{z4}) \cdot \vec{j} + (t_{x4} \cdot n_{y4} - t_{y4} \cdot n_{x4}) \cdot \vec{k} \quad (\text{c.119})$$

Para o cálculo da tortuosidade podemos utilizar a segunda das relações (c.116), já que dispomos agora de todos os parâmetros necessários ao cálculo. Assim:

$$\mathbf{t}_4 = \left\| \frac{d\vec{b}_4}{dS_4} \right\| = \left\| \frac{d\vec{b}_4}{dq_2} \right\| \left(\frac{dS_4}{dq_2} \right)^{-1} \quad (\text{c.120})$$

Se, ao desenvolvermos a relação (c.120) substituirmos R_2 , \mathbf{a}_2 e \mathbf{q}_2 por:

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 + \Delta R \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a} \\ \mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}_1 + \frac{R_1 \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0)}{L_1 \cdot \tan \mathbf{a}_1} \cdot \Delta \mathbf{j} \end{aligned}$$

e fizermos a expansão em série de Taylor (em torno de $K = 0$, $\Delta R = 0$, $\Delta \mathbf{a} = 0$, $\Delta \mathbf{j} = 0$, $\Delta_{tc} = 0$, $\Delta_{ts} = 0$, $\Delta_{bc} = 0$ e $\Delta_{bs} = 0$), retendo apenas os termos lineares, teremos a seguinte expressão linearizada para \mathbf{t}_4 :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_4 &= \mathbf{t}_1 \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan 2\mathbf{a}_1} \cdot \Delta \mathbf{a} + \frac{(2 \cos^4 \mathbf{a}_1 - \cos^2 \mathbf{a}_1 - 2) \cdot \text{sen } \mathbf{q}_1}{\text{sen}^2 \mathbf{a}_1} \cdot \mathbf{K} R_1 \right] + \\ &+ \mathbf{t}_1 \left[2 \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_1 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} - 2 \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot \cos \mathbf{q}_1 \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1} \right] \end{aligned} \quad (\text{c.121})$$

Pode-se facilmente verificar que a expressão (c.121) recai de forma consistente nas equações deduzidas anteriormente (ver, por exemplo, equação (c.77)).

C.4.6. Obtenção das direções principais de flexo-torção

O objetivo deste item é a obtenção das direções principais de flexo-torção da seção transversal de um tendão, após o escorregamento do mesmo. Em outras palavras, queremos saber como expressar os versores $(\vec{i}_4, \vec{j}_4, \vec{k}_4)$, associados à configuração

deformada Σ_4 , na base formada pelos versores $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ do sistema de coordenadas fixo $OXYZ$.

Como vimos anteriormente (item *C.3.4*), uma das direções principais de flexão fora admitida como sendo perpendicular à superfície do toróide (superfície sobre a qual o eixo central do tendão está assentado). Especificamente, consideramos que a direção principal de flexão \vec{i}_3 era dada por (ver equação (c.84)):

$$\vec{i}_3 = \frac{(Q_3 - C_3)}{\|(Q_3 - C_3)\|}$$

o que se justificava pela hipótese de Navier e pela restrição imposta pelas camadas adjacentes que restringe os deslocamentos dos tendões.

Embora não se possa garantir que a hipótese de Navier (segundo a interpretação dada no item *C.3.4* para a seção transversal do tubo/cabo) seja válida após o escorregamento dos tendões, podemos ainda considerar que uma das direções principais de flexão do tendão seja dada por:

$$\vec{i}_4 = \frac{(Q_4 - C_4)}{\|(Q_4 - C_4)\|} \quad (\text{c.122})$$

onde C_4 corresponde ao centróide da seção transversal de um tendão que fica definido pela interseção do eixo central do tendão com a seção transversal do tubo/cabo definida pelo ângulo $\mathbf{b}_4 = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$, e Q_4 corresponde ao centróide da seção transversal do tubo/cabo definida pelo mesmo ângulo $\mathbf{b}_4 = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$, ou seja, Q_4 e C_4 pertencem à mesma seção. A diferença neste caso é que o ângulo \mathbf{b}_4 pode variar conforme passamos de um tendão para outro (de uma mesma camada), devido à dependência de $\Delta\mathbf{b}$ com as componentes de deslocamento (ver equação (c.105)). Se confirmada esta variação, pode-se dizer que a “não-verificação” da hipótese de Navier, após o escorregamento dos tendões, cria uma espécie de “empenamento” da seção transversal.

Lembrando agora que as coordenadas⁹ do ponto C_4 , pertencente ao eixo central do tendão na configuração deformada Σ_4 , são dadas por (ver equações (c.110)):

$$\begin{aligned} x_4 &= R_2 \cdot \cos \mathbf{q}_2 + \Delta_t \cdot t_{x3} + \Delta_b \cdot B_{x3} \\ y_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2 \right) \cos \mathbf{b} - \frac{1}{K} + \Delta_t \cdot t_{y3} + \Delta_b \cdot B_{y3} \\ z_4 &= \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \sin \mathbf{q}_2 \right) \sin \mathbf{b} + \Delta_t \cdot t_{z3} + \Delta_b \cdot B_{z3} \end{aligned} \quad (\text{c.123})$$

E notando que as coordenadas do ponto Q_4 (centróide do tubo/cabo, coplanar com C_4) são dadas por (ver figura c.14):

$$\begin{aligned} x_{Q4} &= 0 \\ y_{Q4} &= \frac{1}{K} \cdot \cos \mathbf{b}_4 - \frac{1}{K} \\ z_{Q4} &= \frac{1}{K} \cdot \sin \mathbf{b}_4 \end{aligned} \quad (\text{c.124})$$

onde: $\mathbf{b}_4 = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$ (conforme equação (c.104)), sendo:

$$\mathbf{b} = \frac{K \cdot R_2 \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_o)}{\tan \mathbf{a}_2} \quad (\text{conforme equação (c.63)}) \text{ e}$$

$$\Delta \mathbf{b} \cong \frac{K \cdot \Delta_t \cdot \cos \mathbf{a}_2}{\mathbf{x}} + \frac{K \cdot \Delta_b \cdot \sin \mathbf{a}_2}{\mathbf{x} \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \sin \mathbf{q}_2)} \quad (\text{conforme equação (c.105)}).$$

⁹ Coordenadas segundo o sistema fixo de coordenadas $OXYZ$.

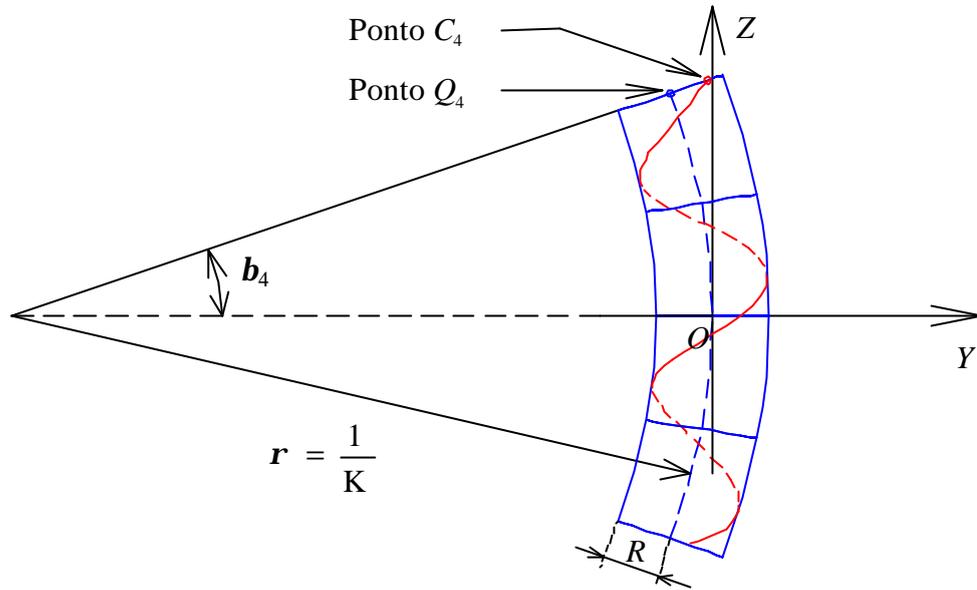


Figura c.14: Vista lateral (plano YZ) da hélice deformada.

Resulta diretamente das equações (c.122) a (c.124):

$$\vec{i}_4 = (i_{x4}) \cdot \vec{e}_x + (i_{y4}) \cdot \vec{e}_y + (i_{z4}) \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.125})$$

onde as componentes do vetor \vec{i}_4 são dadas por:

$$i_{x4} = \frac{(x_{Q4} - x_4)}{\sqrt{(x_{Q4} - x_4)^2 + (y_{Q4} - y_4)^2 + (z_{Q4} - z_4)^2}}$$

$$i_{y4} = \frac{(y_{Q4} - y_4)}{\sqrt{(x_{Q4} - x_4)^2 + (y_{Q4} - y_4)^2 + (z_{Q4} - z_4)^2}}$$

$$i_{z4} = \frac{(z_{Q4} - z_4)}{\sqrt{(x_{Q4} - x_4)^2 + (y_{Q4} - y_4)^2 + (z_{Q4} - z_4)^2}}$$

A direção principal \vec{k}_4 será tomada como sendo coincidente com o vetor tangente à curva formada pelo eixo central do tendão na configuração deformada Σ_4 . Portanto:

$$\vec{k}_4 = \vec{t}_4 = t_{x4} \cdot \vec{e}_x + t_{y4} \cdot \vec{e}_y + t_{z4} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{c.126})$$

onde as componentes t_{x4} , t_{y4} e t_{z4} são dadas no item C.4.5.

A direção principal restante (\vec{j}_4) pode agora ser determinada através do produto vetorial entre as duas primeiras, resultando:

$$\vec{j}_4 = \vec{k}_4 \times \vec{i}_4 = j_{x4} \vec{i} + j_{y4} \vec{j} + j_{z4} \vec{k} \quad (\text{c.127})$$

C.4.7. Cálculo das curvaturas e da torção segundo eixos principais

As expressões que fornecem as componentes de curvatura e a torção segundo os eixos principais de flexo-torção da seção transversal dos tendões são (ver equações (a.9) e (a.10)):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{x4} &= -\mathbf{c}_4 \cdot \cos f_4 \\ \mathbf{k}_{y4} &= \mathbf{c}_4 \cdot \sin f_4 \\ \mathbf{k}_{t4} &= \frac{df_4}{dS_4} + \mathbf{t}_4 \end{aligned} \quad (\text{c.128})$$

As expressões de \mathbf{c}_4 e \mathbf{t}_4 já foram determinadas no item C.4.5. Precisamos agora calcular as quantidades: $\cos f_4$, $\sin f_4$ e df_4/dS_4 . Pela figura c.15 é imediato perceber que:

$$\begin{aligned} \cos f_4 &= \vec{n}_4 \cdot \vec{j}_4 = n_{x4} \cdot j_{x4} + n_{y4} \cdot j_{y4} + n_{z4} \cdot j_{z4} \\ \sin f_4 &= \vec{n}_4 \cdot \vec{i}_4 = n_{x4} \cdot i_{x4} + n_{y4} \cdot i_{y4} + n_{z4} \cdot i_{z4} \end{aligned} \quad (\text{c.129})$$

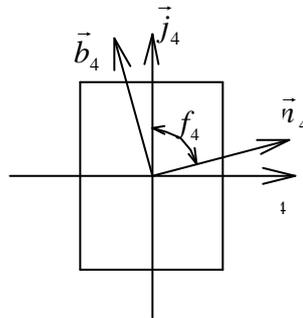


Figura c.15: Relação entre versores (\vec{n}_4 e \vec{b}_4) e versores (\vec{i}_4 e \vec{j}_4).

Utilizando as relações (c.129) em (c.128) teremos, após o uso das relações que fornecem as componentes dos versores \vec{n}_4 , \vec{i}_4 e \vec{j}_4 e posterior expansão das expressões resultantes em série de Taylor, as seguintes expressões finais:

$$\mathbf{k}_{x4} \cong \left(-2 + \cos^2 \mathbf{a}_1 \right) \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot \cos \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{K} + \mathbf{c}_1 \cdot \left[\cos \mathbf{q}_1 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} + \sin \mathbf{q}_1 \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1} \right] \quad (\text{c.130})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{y4} \cong & \mathbf{c}_1 \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan \mathbf{a}_1} \Delta \mathbf{a} + \frac{\cos(2\mathbf{a}_1)}{\tan^2 \mathbf{a}_1} \text{sen } \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{K} R_1 \right] + \\ & + 2 \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{c}_1 \left[\text{sen } \mathbf{q}_1 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} - \cos \mathbf{q}_1 \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1} \right] \end{aligned} \quad (\text{c.131})$$

Pode-se facilmente verificar que as equações (c.130) e (c.131) recuperam os resultados obtidos para \mathbf{k}_{x3} e \mathbf{k}_{y3} , caso não haja escorregamento entre os tendões (ver equações (c.92)).

Para determinarmos df_4/dS_4 basta notar que das duas primeiras relações de (c.128) é possível obter:

$$f_4 = \arctan \left(-\frac{\mathbf{k}_{y4}}{\mathbf{k}_{x4}} \right) \quad (\text{c.132})$$

Partindo-se, então, das expressões completas (i.é., ainda não linearizadas) de \mathbf{k}_{x4} e \mathbf{k}_{y4} , pode-se determinar, a partir de (c.132), a expressão do ângulo f_4 e, conseqüentemente, de sua derivada com relação ao comprimento de arco deformado S_4 , já que:

$$\frac{df_4}{dS_4} = \frac{df_4}{dq_2} \cdot \left(\frac{dS_4}{dq_2} \right)^{-1}$$

Seguindo este procedimento, teremos como resultado final (após linearizarmos a expressão resultante através da expansão em série de Taylor em torno de $\mathbf{K} = 0$, $\Delta R = 0$, $\Delta \mathbf{a} = 0$, $\Delta \mathbf{j} = 0$, $\Delta_{tc} = 0$, $\Delta_{ts} = 0$, $\Delta_{bc} = 0$ e $\Delta_{bs} = 0$):

$$\frac{df_4}{dS_4} \cong \frac{(2 - \cos^2 \mathbf{a}_1) \cdot \text{sen } \mathbf{q}_1}{\tan \mathbf{a}_1} \cdot \mathbf{K} - \frac{\text{sen } \mathbf{a}_1 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_1}{R_1^2} \cdot \Delta_{bc} + \frac{\text{sen } \mathbf{a}_1 \cdot \cos \mathbf{q}_1}{R_1^2} \cdot \Delta_{bs} \quad (\text{c.133})$$

De (c.121), (c.128) e (c.133), resulta, assim, a seguinte expressão simplificada para \mathbf{k}_{t4} :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{t4} = & \mathbf{t}_1 \left[1 - \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{2}{\tan 2\mathbf{a}_1} \cdot \Delta \mathbf{a} - 2 \cdot \cos^2 \mathbf{a}_1 \cdot \sin \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{K} R_1 \right] + \\ & + \mathbf{t}_1 \cdot \frac{\cos(2\mathbf{a}_1)}{\cos \mathbf{a}_1} \left[\sin \mathbf{q}_1 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_1} - \cos \mathbf{q}_1 \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_1} \right] \end{aligned} \quad (\text{c.134})$$

Mais uma vez observa-se que a expressão (c.134) é consistente com os resultados obtidos nos itens anteriores (ver equação (c.95)).

C.4.8. Determinação das componentes de deslocamento

No item C.4.4 foram propostas as seguintes aproximações para as funções deslocamento Δ_t e Δ_b (ver equações (c.111)):

$$\begin{aligned} \Delta_t &= \Delta_t(\mathbf{q}_2) = \Delta_{tc} \cdot \cos \mathbf{q}_2 + \Delta_{ts} \cdot \sin \mathbf{q}_2 \\ \Delta_b &= \Delta_b(\mathbf{q}_2) = \Delta_{bc} \cdot \cos \mathbf{q}_2 + \Delta_{bs} \cdot \sin \mathbf{q}_2 \end{aligned}$$

A partir destas funções foram determinadas, nos itens que se seguiram, diversas grandezas cinemáticas (como a deformação, as curvaturas, etc). Naturalmente, todas as grandezas obtidas ficaram em função das amplitudes desconhecidas Δ_{tc} , Δ_{ts} , Δ_{bc} e Δ_{bs} . O objetivo deste item é propor uma forma para a determinação destas amplitudes.

Para começar, vamos analisar o funcional L que fornece o comprimento de arco, medido ao longo do eixo central de um dado tendão entre dois pontos dados, na configuração deformada Σ_4 . Tal funcional pode ser expresso na seguinte forma:

$$L = \int G(\mathbf{q}_4, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_4') \cdot d\mathbf{q}_4$$

onde \mathbf{q}_4 e \mathbf{b}_4 são os parâmetros angulares já definidos anteriormente (ver, por exemplo, item C.4.1, figura c.12), sendo \mathbf{q}_4 a variável independente e \mathbf{b}_4 a variável dependente de tal forma que:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_4 &= \mathbf{b}_4(\mathbf{q}_4) \\ \mathbf{b}_4'(\mathbf{q}_4) &= \frac{d\mathbf{b}_4(\mathbf{q}_4)}{d\mathbf{q}_4} \end{aligned}$$

Naturalmente, decorre da própria definição do funcional L que a função $G(\mathbf{q}_4, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_4')$ deve ser:

$$G(\mathbf{q}_4, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_4') = \frac{dS_4}{dq_4} = \sqrt{\left(\frac{dx_4}{dq_4}\right)^2 + \left(\frac{dy_4}{dq_4}\right)^2 + \left(\frac{dz_4}{dq_4}\right)^2} \quad (\text{c.135})$$

Utilizando, então, as equações paramétricas (c.98) em (c.135), resulta:

$$G(\mathbf{q}_4, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_4') = \left[R_2^2 + \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_4 \right)^2 \cdot \left(\frac{d\mathbf{b}_4}{dq_4} \right)^2 \right]^{1/2}$$

A equação de Euler-Lagrange nos fornece a condição para a obtenção de um extremo do funcional L , ou seja, a condição para minimizar o comprimento de arco L entre dois pontos dados do eixo central do tendão. Como o comprimento considerado é o comprimento deformado na configuração Σ_4 , esta condição é equivalente a uma condição de mínima energia, se considerarmos a energia de deformação devida às forças normais de tração no tendão como sendo a parcela preponderante na energia de deformação total do tendão¹⁰. A equação de Euler-Lagrange é dada por (ver, p. ex., Shames; Dym [62]):

$$\frac{d}{dq_4} \left[\frac{\partial G}{\partial \mathbf{b}_4'} \right] - \frac{\partial G}{\partial \mathbf{b}_4} = 0$$

Como $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{b}_4} = 0$, resulta:

$$\frac{d}{dq_4} \left[\frac{\partial G}{\partial \mathbf{b}_4'} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial G}{\partial \mathbf{b}_4'} = C$$

ou seja:

¹⁰ Esta hipótese é justificável, uma vez que os adimensionais que estabelecem a relação entre a rigidez axial (EA) dos tendões e os valores de rigidez flexional e torsional (EI_x , EI_y e GJ) são bem maiores que a unidade (ex.: $EAR^2/EI_x \gg 1$).

$$\frac{\left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_4\right)^2 \left(\frac{d\mathbf{b}_4}{d\mathbf{q}_4}\right)}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{K} + R_2 \cdot \text{sen } \mathbf{q}_4\right)^2 \left(\frac{d\mathbf{b}_4}{d\mathbf{q}_4}\right)^2}} = C \quad (\text{c.136})$$

onde C é uma constante a ser determinada.

Após algumas manipulações algébricas de (c.136), é possível mostrar que a equação de Euler-Lagrange fornece a seguinte relação:

$$\frac{d\mathbf{b}_4}{d\mathbf{q}_4} = \frac{C \cdot K \cdot \mathbf{h}}{(1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen } \mathbf{q}_4) \cdot \sqrt{(1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen } \mathbf{q}_4)^2 - (C \cdot K)^2}} \quad (\text{c.137})$$

onde $\mathbf{h} = K \cdot R_2$ (conforme equação (c.67)).

A integral de (c.137) em relação à \mathbf{q}_4 não pode ser expressa através de funções analiticamente conhecidas pois recai numa integral elíptica. Contudo, para pequenas curvaturas (i.é., para $\mathbf{h} \ll 1$), poderíamos propor uma aproximação para a função dada por (c.137), através de sua expansão em série de Taylor em torno de $K = 0$ (ou, de forma equivalente, em torno de $\mathbf{h} = 0$). O único problema neste procedimento é que não podemos garantir, a priori, se a constante de integração C depende, ou não, de K , pois, se $C = C(K)$, a linearização não será feita corretamente. É preciso, então, determinarmos em primeiro lugar uma estimativa para a constante C , mesmo que para pequenos valores de curvatura. Para isto, devemos observar que:

$$\frac{d\mathbf{b}_4}{d\mathbf{q}_4} = \frac{d\mathbf{b}_4}{d\mathbf{q}_2} \left(\frac{d\mathbf{q}_4}{d\mathbf{q}_2}\right)^{-1} \quad (\text{c.138})$$

Lembrando, contudo, que (ver equações (c.63), (c.104) e (c.105)):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_4 &\cong \mathbf{q}_2 + \left(\frac{\text{sen } \mathbf{a}_2}{R_2 \cdot \mathbf{x}}\right) \Delta_t - \left(\frac{\cos \mathbf{a}_2 \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen } \mathbf{q}_2)}{R_2 \cdot \mathbf{x}}\right) \Delta_b \\ \mathbf{b}_4 &\cong \frac{K \cdot R_2 \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_0)}{\tan \mathbf{a}_2} + \frac{K \cdot \Delta_t \cdot \cos \mathbf{a}_2}{\mathbf{x}} + \frac{K \cdot \Delta_b \cdot \text{sen } \mathbf{a}_2}{\mathbf{x} \cdot (1 + \mathbf{h} \cdot \text{sen } \mathbf{q}_2)} \end{aligned} \quad (\text{c.139})$$

e que, segundo as aproximações dadas por (c.111),

$$\begin{aligned}\Delta_t &= \Delta_t(\mathbf{q}_2) = \Delta_{tc} \cdot \cos \mathbf{q}_2 + \Delta_{ts} \cdot \sin \mathbf{q}_2 \\ \Delta_b &= \Delta_b(\mathbf{q}_2) = \Delta_{bc} \cdot \cos \mathbf{q}_2 + \Delta_{bs} \cdot \sin \mathbf{q}_2\end{aligned}$$

então, se substituirmos as relações dadas acima na relação (c.138) e esta última na relação (c.136), é possível mostrar que, ao linearizarmos o adimensional “K.C” em torno de $K=0$, $\Delta_{tc}=0$, $\Delta_{ts}=0$, $\Delta_{bc}=0$ e $\Delta_{bs}=0$, obteremos:

$$\begin{aligned}K.C \cong \cos \mathbf{a}_2 + \left[KR_2 \cdot \cos \mathbf{a}_2 \cdot (1 + \sin^2 \mathbf{a}_2) - \sin^2 \mathbf{a}_2 \cdot \frac{\Delta_{bc}}{R_2} \right] \sin \mathbf{q}_2 + \\ + \left[\sin^2 \mathbf{a}_2 \cdot \frac{\Delta_{bs}}{R_2} \right] \cos \mathbf{q}_2\end{aligned} \quad (c.140)$$

Como o adimensional “K.C” deve ser uma constante e, portanto, independente da variável \mathbf{q}_4 (que, em primeira aproximação, coincide com \mathbf{q}_2), devemos impor que os coeficientes das funções $\sin \mathbf{q}_2$ e $\cos \mathbf{q}_2$ sejam ambos nulos, o que nos leva a:

$$\begin{aligned}\Delta_{bc} &= K \cdot R_2^2 \cdot \cos \mathbf{a}_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \mathbf{a}_2} \right) \\ \Delta_{bs} &= 0\end{aligned} \quad (c.141)$$

Se ainda considerarmos a expansão em série de Taylor de (c.141) em torno de $\Delta R=0$ e $\Delta \mathbf{a}=0$, pode-se mostrar que, em primeira aproximação, temos:

$$\begin{aligned}\Delta_{bc} &= K \cdot R_1^2 \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \mathbf{a}_1} \right) \\ \Delta_{bs} &= 0\end{aligned} \quad (c.142)$$

Ficam, assim, determinados os coeficientes Δ_{bc} e Δ_{bs} . Para a determinação dos coeficientes Δ_{tc} e Δ_{ts} , devemos observar que a expressão da deformação axial, medida na direção tangente ao eixo central do tendão, fornece (ver equação (c.113)):

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{t,14} \cong (\sin^2 \mathbf{a}_1) \frac{\Delta R}{R_1} + (\sin \mathbf{a}_1 \cdot \cos \mathbf{a}_1) R_1 \frac{\Delta \mathbf{j}}{L_1} + (\cos^2 \mathbf{a}_1) \frac{\Delta L}{L_1} + \\ + \left[KR_1 \cos^2 \mathbf{a}_1 - \sin \mathbf{a}_1 \cdot \frac{\Delta_{tc}}{R_1} \right] \cdot \sin \mathbf{q}_1 + \left[\sin \mathbf{a}_1 \cdot \frac{\Delta_{ts}}{R_1} \right] \cdot \cos \mathbf{q}_1\end{aligned}$$

Se considerarmos que após o escorregamento total dos tendões haverá um estado uniforme de deformação (mantido pela aplicação das forças de tração no cabo), podemos impor que os coeficientes das funções $\sin \mathbf{q}_1$ e $\cos \mathbf{q}_1$ sejam também ambos nulos, o que nos traz:

$$\Delta_{tc} = \frac{K.R_1^2 \cdot \cos^2 \mathbf{a}_1}{\sin \mathbf{a}_1} \quad (\text{c.143})$$

$$\Delta_{ts} = 0$$

Apenas para completar o raciocínio iniciado com a proposta de linearização da função dada por (c.137)¹¹, devemos notar que, ao substituirmos

$$K.C = \cos \mathbf{a}_2$$

na equação (c.137), teremos:

$$\frac{d\mathbf{b}_4}{d\mathbf{q}_4} \cong \frac{\cos \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{h}}{(1 + \mathbf{h} \cdot \sin \mathbf{q}_4) \cdot \sqrt{(1 + \mathbf{h} \cdot \sin \mathbf{q}_4)^2 - (\cos \mathbf{a}_2)^2}} \quad (\text{c.144})$$

Lembrando que $\mathbf{h} = K.R_2$, teremos, após efetuarmos uma série de substituições¹² e linearizarmos a expressão (c.144) em torno de $K = 0$, $\Delta \mathbf{a} = 0$ e $\Delta R = 0$, a seguinte expressão simplificada:

$$\frac{d\mathbf{b}_4}{d\mathbf{q}_4} \cong \frac{K.R_1}{\tan \mathbf{a}_1} \left[1 + \frac{\Delta R}{R_1} - \frac{2 \cdot \Delta \mathbf{a}}{\sin 2\mathbf{a}_1} - K.R_1 \cdot \sin \mathbf{q}_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \mathbf{a}_1} \right) \right] \quad (\text{c.145})$$

Pode-se verificar, após cuidadoso estudo, que a expressão (c.145) consegue recuperar integralmente uma expressão análoga dada por Féret; Leroy; Estrier [21] na forma¹³:

¹¹ Embora isto não seja mais necessário, já que as amplitudes das funções deslocamento acabaram sendo obtidas durante a discussão da proposta de linearização da função dada por (c.137).

¹² A seqüência é: substituem-se as relações (c.142) e (c.143) nas relações (c.111). Em seguida, as relações (c.111) são substituídas na primeira das relações (c.139) e esta última na equação (c.144). Finalmente são feitas as substituições: $R_2 = R_1 + \Delta R$ e $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \Delta \mathbf{a}$.

¹³ A expressão foi reescrita segundo nossa convenção e notação para facilitar a comparação com a equação (c.145).

$$\frac{d\mathbf{b}_4}{d\mathbf{q}_4} \cong \frac{K.R_1}{\tan \mathbf{a}_1} [1 + z.K.R_1.\text{sen } \mathbf{q}_2] \quad (\text{c.146})$$

Com referência à expressão proposta por estes autores, deve-se destacar que:

- i) o procedimento para sua obtenção não é sequer revelado pelos autores que se limitam a justificar seu emprego através de “estudos anteriores de curvas sobre superfícies”. Alguns indícios para a obtenção desta relação são brevemente citados num artigo anterior de Féret; Bournazel [20];
- ii) os autores omitem o fato de que a constante z que aparece na relação é dada por:

$$z = -1 - \frac{1}{\text{sen}^2 \mathbf{a}_1}$$

fato este que pode ser verificado através da comparação da relação (c.146) com a expressão (c.145) aqui deduzida, ou ainda através de comparações entre outras expressões definidas pelos autores e expressões análogas (não demonstradas) dadas no artigo de Féret; Bournazel [20];

- iii) a expressão proposta por Féret; Leroy; Estrier [21] não considera mudanças na geometria decorrentes de carregamentos que não a flexão do cabo, sendo, portanto, “menos completa” que a expressão (c.145) apresentada neste trabalho.

Deve-se observar finalmente que ao substituírmos as expressões (c.142) e (c.143), que forcecem as amplitudes das funções deslocamento, nas relações (c.111) obtém-se:

$$\begin{aligned}\Delta_i(\mathbf{q}_2) &= \frac{K.R_1^2 \cdot \cos^2 \mathbf{a}_1}{\sin \mathbf{a}_1} \cdot \cos \mathbf{q}_2 \\ \Delta_b(\mathbf{q}_2) &= K.R_1^2 \cdot \cos \mathbf{a}_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \mathbf{a}_1} \right) \cdot \cos \mathbf{q}_2\end{aligned}\tag{c.147}$$

Com relação a estas expressões é importante destacar que:

- i) os resultados são válidos apenas para pequenas curvaturas ($K.R_1 \ll 1$);
- ii) a metodologia proposta (para a obtenção dos coeficientes das funções aproximadoras) pode ser estendida, se for desejável, para incluir outros termos da série de Fourier, como $\sin 2\mathbf{q}_1$, $\cos 2\mathbf{q}_1$, etc;
- iii) as parcelas de energia de deformação do tendão devidas às variações de curvatura e de torção foram consideradas desprezíveis face à energia de deformação devida a sua extensibilidade;
- iv) as expressões obtidas recuperam as expressões propostas por Féret; Bournazel [20] e por Féret; Leroy; Estrier [21], uma vez desprezadas as variações de raio e do ângulo de assentamento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALEXANDER, J.C.; ANTMAN, S.S. The ambiguous twist of Love. **Quarterly of Applied Mathematics**, v.40, April, 1982, pp.83-92.
- [2] ALGOR, Manual do usuário.
- [3] ARANHA, J.A.P.; PESCE, C.P.; MARTINS, C.A. **Mecânica de cabos submersos. I - Comportamento estrutural estático**. São Paulo, PMC/EPUSP, 1992. (Monografia nº 75/92, Depto. de Eng. Mecânica, jun. 1992, 28 p.)
- [4] ARANHA, J.A.P.; PESCE, C.P.; MARTINS, C.A. **Mecânica de cabos submersos. II - Comportamento dinâmico**. São Paulo, PMC/EPUSP, 1992. (Monografia nº 76/92, Depto. de Eng. Mecânica, jun. 1992, 60 p.)
- [5] ARANHA, J.A.P.; PESCE, C.P.; MARTINS, C.A. **Mecânica de cabos submersos. III - Efeito local de flexão via teoria de camada limite**. São Paulo, PMC/EPUSP, 1992. (Monografia nº 77/92, Depto. de Eng. Mecânica, jun. 1992, 23 p.)
- [6] ARANHA, J.A.P.; PESCE, C.P.; MARTINS, C.A.; ANDRADE, B.L.R. Mechanics of submerged cables: asymptotic solution and dynamic tension. In: 3rd International Offshore & Polar Engineering Conference, Singapore, Jun. 6-11, 1993. **Proceedings**. v. II, p.345-356.
- [7] ARANHA, J.A.P. et al. **Estudo de comportamento estrutural de um cabo umbilical 9+3+1, vol. III: Avaliação preliminar de susceptibilidade ao fenômeno de "kink" nos cabos elétricos de cabos umbilicais**. São Paulo, Convênio Pirelli/EPUSP-PNV, 1998. (Relatório técnico, fev. 1998, 13 p.)

- [8] ARANHA, J.A.P.; PINTO, M.O. Dynamic tension in risers and mooring lines: an algebraic approximation for harmonic excitation. **Applied Ocean Research**, v.23, 2001, pp.63-81.
- [9] ARANHA, J.A.P.; PINTO, M.O.; SILVA, R.M.C. On the dynamic compression of risers: an analytic expression for the critical load. **Applied Ocean Research**, v.23, 2001, pp.83-91.
- [10] ATANACKOVIC, T.M. **Stability theory of elastic rods**. World Scientific Publishing Co., Singapura, 1997.
- [11] BOULOS, P.; ZAGOTTIS, D.L. **Mecânica e Cálculo: um curso integrado**. São Paulo, Edgard Blücher, 1991. v.1.
- [12] BROWN, P.A.; SOLTANAHMADI, A.; CHANDWANI, R. Problems encountered in detailed design of flexible riser systems. **Engineering Structures**, v. 11, p.234-241, oct. 1989
- [13] CLAYDON, P.; COOK, G.; BROWN, P.A.; CHANDWANI, R. A theoretical approach to prediction of service life of unbonded flexible pipes under dynamic loading conditions. **Marine Structures**, v. 5, p.399-429, 1992.
- [14] COCKS, P.J. Testing and structural integrity of flexibel pipes. **Engineering Structures**, v. 11, p.217-222, oct. 1989.
- [15] COSTELLO, G.A. Large deflections of helical spring due to bending, **Journal of the Engineering Mechanics Division**, Technical Notes, v.103, Jun. 1977, p.481-487.

- [16] COSTELLO, G.A. **Theory of wire rope**, New York, Springer Verlag, 1990.
- [17] COYNE, J. Analysis of the formation and elimination of loops in twisted cable, **IEEE Journal of Oceanic Engineering**, v.15, no 2., Apr.1990, pp. 72-83.
- [18] CUSTÓDIO, A.B.; VAZ, M.A.; ESTEFEN, S. F. Análise local do comportamento de umbilicais submarinos sob carregamento axissimétrico. Sociedade Brasileira de Engenharia Naval, SOBENA-98, 12 p.
- [19] CRUZ, F.T.L. **Análise estrutural de linhas flexíveis pelo método dos elementos finitos**. São Paulo, 1996. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [20] FÉRET, J.J. & BOURNAZEL, C.L. Calculation of stresses and slip in structural layers of unbonded flexible pipes. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v. 109, p.263-269, (1987).
- [21] FÉRET, J.; LEROY, J.M.; ESTRIER, P. Calculation of stresses and slips in flexible armour layers with layers interaction. **Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, vol. V, Pipeline Technology, 1995, p.469-474.
- [22] GOTO, Y; OKAMOTO, T.; ARAKI, M.; FUKU, T. Analytical study of the mechanical strength of flexible pipes. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v.109, Aug. 1987, p.249-253.
- [23] GOTTLIEB, O.; PERKINS, N.C. Local and global bifurcation analyses of a spatial cable elastica. **Journal of Applied Mech.**, v. 66, 1999, pp. 352-360.

- [24] HIBBELER, R.C. **Mechanics of Materials**, 3rd ed., Prentice Hall, Inc., (1997).
- [25] HILL, R.T.; MEASAMER, J.C. Advanced flexible pipe materials for aggressive hydrocarbon service. **Proceedings of the Third International Offshore and Polar Engineering Conference**, Singapore, 1993. Publ. by The International Society of Offshore and Polar Engineers, USA, p.359-364, (1993).
- [26] HUANG, N.C. Finite extension of an elastic strand with a central core. **Journal of Applied Mechanics**, v.45, Dec. 1978, p.852-858.
- [27] **Informativo do Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo**, Ano VIII, nº 43, maio/julho 1996.
- [28] JUVINALL, R.C.; MARSHEK, K.M. **Fundamentals of machine component design**, 2nd ed, John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- [29] KNAPP, R.H. Derivation of a new stiffness matrix for helically armoured cables considering tension and torsion. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, p.515-529 (1979).
- [30] KNAPP, R.H. Structural modeling of undersea cables. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v.111, Nov. 1989, p.323-330.
- [31] LANTEIGNE, J. Theoretical estimation of the response of helically armored cables to tension, torsion, and bending. **Journal of Applied Mechanics**, v. 52, Jun. 1985, p.423-432.

- [32] LE, T.T.; KNAPP, R.H. A finite element model for cables with nonsymmetrical geometry and loads. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v. 116, feb. 1994, p.14-20.
- [33] LEGALLAIS, L.; STRATFOLD, M.; HARDY, J. A new generation of umbilical hoses. **Field drilling and development systems proceedings - 25th Annual Offshore Technology Conference**, pt 4. Publ. by Offshore Technology Conference, Dallas, Texas, USA, p.115-123, (1993).
- [34] LEKHNITSKII, S.G. **Theory of Elasticity of an Anisotropic Body**, Mir Publishers, Moscow, 1981.
- [35] LOVE, A.E.H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**, 4th ed.. New York, Dover Publications, (1944).
- [36] LU, C.L.; PERKINS, N.C. Nonlinear spatial equilibria and stability of cables under uni-axial torque and thrust. **Journal of Applied Mechanics**, Vol. 61, p.879-886, Dec. 1994.
- [37] LU, C.L.; PERKINS, N.C. Complex spatial equilibria of U-joint supported cables under torque, thrust and self-weight. **Int. J. Non-linear Mechanics**, Vol. 30, nº. 3, p.271-285, 1995.
- [38] MAKINO, Y. et al. Development of light-weight flexible riser pipe. **Field drilling and development systems proceedings - 25th Annual Offshore Technology Conference**, v. 3. Publ. by Offshore Technology Conference, Dallas, Texas, USA, p.523-530, (1993).

- [39] MOORE, F. Materials for flexible riser systems: problems and solutions. **Engineering Structures**, v. 11, p.208-216, oct. 1989.
- [40] O'BRIEN, P.J.; MCNAMARA, J.F. Significant characteristics of three-dimensional flexible riser analysis. **Engineering Structures**, v. 11, p.223-233, oct. 1989.
- [41] PATEL, M.H.; SEYED, F.B. Internal flow-induced behaviour of flexible risers. **Engineering Structures**, v. 11, nº 4, p.266-280, oct. 1989.
- [42] PATEL, M.H.; SEYED, F.B. Review of flexible riser modelling and analysis techniques. **Engineering Structures**, v. 17, nº 4, p.293-304, may 1995.
- [43] PATEL, M.H.; WITZ, J.A.; TAN, Z. **A flexible riser design manual**, 2nd ed. Bentham Press, London, 1994.
- [44] PESCE, C.P.; ARANHA, J.A.P.; MARTINS, C.A.; TANAKA, D.; TANIGUCHI, C. **Estudos preliminares visando o desenvolvimento de métodos de previsão de vida útil de cabos umbilicais e tubos flexíveis para operação offshore**. Programa básico de pesquisa e desenvolvimento. Relatório Técnico 02, EPUSP, out. 1993. Convênio USP/Pirelli, 50 p.
- [45] PESCE, C.P. **Cabos e tubos submersos em configuração de catenária: elementos de análise e dimensionamento na situação de operação**. Monografia, EPUSP, 1994, 51 p.
- [46] PESCE, C.P. **Cabos e tubos submersos em configuração de catenária: elementos de análise e dimensionamento; fadiga**. Monografia, EPUSP, 1994, 42 p.

- [47] PESCE, C.P.; MARTINS, C.A.; ARANHA, J.A.P. **Tubo flexível de produção. Modelo simplificado de comportamento estrutural sob carregamento localizado pela ação de lagartas de tração durante o lançamento.** Parte I - “Crushing”. Convênio EPUSP/Pirelli: Desenvolvimento de produtos da linha petróleo-*offshore*; relatório técnico, 1995.
- [48] PESCE, C.P.; MARTINS, C.A.; ARANHA, J.A.P. **Tubo flexível de produção. Modelo simplificado de comportamento estrutural sob carregamento localizado pela ação de lagartas de tração durante o lançamento.** Parte II - Efeito do “*squeezing*” e carregamento ao longo da linha. Convênio EPUSP/Pirelli: Desenvolvimento de produtos da linha petróleo-*offshore*; relatório técnico, 1995.
- [49] PESCE, C.P., RAMOS JR., R.; ARANHA, J.A.P. **Desenvolvimento de métodos de previsão de vida útil de produtos da linha petróleo-*offshore*,** Fase I, Projeto 1.3.1: Distribuição de esforços solicitantes na seção, vol. I, modelo analítico, Relatório técnico Pirelli-FI-RT-1.3.1, 1996, 76 p.
- [50] PESCE, C.P.; RAMOS JR., R.; ARANHA, J.A.P. **Desenvolvimento de métodos de previsão de vida útil de produtos da linha petróleo-*offshore*.** Fase I, Projeto 1.3.1: Distribuição de esforços solicitantes na seção, vol. II, aplicação do método dos elementos finitos, Rel. técnico Pirelli-FI-RT-1.3.1, fev. 1997, 60 p.
- [51] PESCE, C.P. **Mecânica de cabos e tubos submersos lançados em “catenária”:** uma abordagem analítica e experimental. São Paulo, 1997. Tese (Livre Docência) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [52] PESCE, C.P. et al. **Estudo de comportamento estrutural de um cabo umbilical 9+3+1,** vol. I: Avaliação de vida útil e análise em condições estáticas e dinâmicas. Convênio Pirelli/EPUSP-PNV, relatório técnico, fev. 1998, 26 p.

- [53] PESCE, C.P.; MARTINS, C.A.; ARANHA, J.A.P.; RAMOS JR., R. **Desenvolvimento de modelos voltados à mecânica estrutural de cabos umbilicais e tubos flexíveis**. Workshop Rede de Pesquisa em Tecnologia Submarina, RECOPE - TECSUB, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, 1998.
- [54] PHILLIPS, J.W. & COSTELLO, GA. Contact stresses in twisted wire cables, **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 99, april 1973, p.331-341.
- [55] PHILLIPS, J.W. & COSTELLO, G.A. Analysis of wire ropes with internal-wire-rope cores, **Journal of Applied Mechanics**, v. 52, sep. 1985, p.510-516.
- [56] PROGELHOF, R.C. & THRONE, J.L. **Polymer engineering principles: Properties, processes and tests for design**. Hanser Publishers, 1993.
- [57] RAMOS JR., R. PESCE, C.P.; SANTOS, M.F. **Estudo de instabilidade estrutural de uma mangueira reforçada por carcaça intertravada para uso em cabo umbilical**, vol. II: Cálculo da distribuição de pressão ao longo da carcaça por elementos finitos. Convênio Pirelli/EPUSP-PNV, rel. técnico, set. 1997.
- [58] RAMOS JR., R. et al. **Estudo de comportamento estrutural de um cabo umbilical 9+3+1**, vol. II: Estudo de instabilidade estrutural das veias do núcleo elétrico em cabos umbilicais. Determinação do campo de deformações axiais nas veias do núcleo elétrico por elementos finitos. Convênio Pirelli/EPUSP-PNV, relatório técnico, fev. 1998.
- [59] RICARDO, O.G.S. **Teoria das Estruturas**, McGraw-Hill, (1978).

- [60] SAEVIK, S. A finite element model for predicting stresses and slip in flexible pipe armouring tendons. **Computers & Structures**, v. 46, n. 2, p. 219-230, (1993).
- [61] SEYED, F.B.; PATEL, M.H. Mathematics of flexible risers including pressure and internal flow effects. **Marine Structures**, v. 5, p. 121-150, (1992).
- [62] SHAMES, I.H.; DYM, C.L. **Energy and finite element methods in structural mechanics**. McGraw-Hill Book Co., (1985).
- [63] SOUZA, A.P.F., ESTEFEN, S.F., VAZ, M.A.; ALVES, T.M.J. **Colapso de dutos flexíveis sob pressão externa**. Sociedade Brasileira de Engenharia Naval, SOBENA-98, 8 p.
- [64] SOUZA, L.A.L. **Rigidez à flexão de cabos umbilicais submarinos**. Rio de Janeiro, RJ, 1998. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.
- [65] STUMP, D.M.; FRASER, W.B. The writhing of circular cross-sections rods: undersea cables to DNA supercoils. **Proc. R. Soc. Lond. A**, 454, p.2123-2156, 1998.
- [66] STUMP, D.M.; FRASER, W.B. Multiple solutions for writhed rods: implications for DNA supercoiling. **Proc. R. Soc. Lond. A**, 456, p.455-467, 2000.
- [67] SUGIER, A. et al. Weight reduction of flexible pipes using aluminium alloys. **Proceedings of the Third International Offshore and Polar Engineering Conference**, Singapore, 1993. Publ. by The International Society of Offshore and Polar Engineers, USA, p.194-200, (1993).

- [68] TIMOSHENKO, S.P. **Resistência dos Materiais**, v. 2. Traduzido por Domício Falcão Moreira. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1976.
- [69] TIMOSHENKO, S.P., KRIEGER, S.W. **Theory of plates and shells**, 26^a edição, McGraw-Hill Co - Singapore, 1959.
- [70] TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. **Teoria da Elasticidade**, 3^a ed., Guanabara Dois, 1980.
- [71] TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.E. **Mecânica dos Sólidos**, v.2, Tradução e coordenação técnica de José Rodrigues de Carvalho. Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1984.
- [72] WITZ, J.A.; TAN, Z. On the axial-torsional structural behaviour of flexible pipes, umbilicals and marine cables. **Marine Structures**, v. 5, p.205-227, (1992).
- [73] WITZ, J.A.; TAN, Z. On the flexural structural behaviour of flexible pipes, umbilicals and marine cables. **Marine Structures**, v. 5, p.229-249, (1992).
- [74] WITZ, J.A. A case study in the cross-section analysis of flexible risers. **Marine Structures**, v. 9, p.885-904, (1996).

