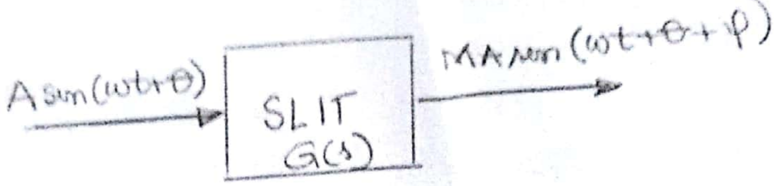
TEORIA

1) O diagrama de Bode é um traçado da resposta em frequência de uma função de transferência de um SLIT à uma entrada senoidal.



A onda senoidal é escolhida uma vez que, pela teoria de Fourier, sabe-se que qualquer sinal que entre no sistema pode ser representado por uma soma, geralmente infinita, de ondas senoidais com diferentes frequências e amplitudes.

Particularmente para SLIT, uma entrada senoidal a uma determinada frequência ω gera, como saída, uma senóide de mesma frequência, mas diferente magnitude e fase.

Dessa forma, os diagramas de Bode são compostos por dois gráficos:

(1) Diagrama de Módulo x Frequência

$$|G(j\omega)| \times \omega$$

(2) Diagrama de Fase x Frequência

$$\angle G(j\omega) \times \omega$$

Em geral, $|G(j\omega)|$ é dado em decibels, a frequência em rad/s e o ângulo de fase em graus.

2)

A resposta em frequência tem sido estudada há muito tempo e, portanto, foi necessário desenvolvimento de técnicas manuais capazes de apresentar resposta em frequência rapidamente. A técnica manual mais útil foi desenvolvida por Hendrik Wade Bode (1905-1982) no Bell Laboratories (sim, Bell vem de A. Graham Bell.) entre 1932 e 1942. Essa técnica permite um traçado rápido e, ainda assim, preciso o suficiente para um projeto de sistemas de controle.

Apesar do fácil acesso dos computadores que os projetistas atuais têm, entender as técnicas de traçado dos diagramas de Bode por vários motivos:

- permite ao engenheiro não apenas lidar com problemas simples, mas também executar verificações nos resultados computacionais para os casos mais complicados;
- aproximações podem ser usadas para esboçar rapidamente a resposta em frequência e deduzir a estabilidade, bem como determinar a forma das compensações dinâmicas necessárias;

- uma compreensão do método de traçado é útil na interpretação de resposta em frequência de dados que foram gerados experimentalmente

3) Os fatores básicos são:

→ K_0, que é o ganho em $\omega=0$. É também igual ao ganho DC do sistema

→ $(j\omega)^{\pm n}$, que são zeros ou polos na origem. É o único fator que afeta a inclinação em baixas frequências.

→ $(j\omega\tau+1)^{\pm m}$, que são zeros ou polos reais.

→ $[(j\omega/\omega n)^2 + 2\zeta(j\omega/\omega n) + 1]^{\pm n}$, que representam os zeros e polos complexos conjugados, que não podem ser representados pela composição de dois ou mais termos de primeira ordem.

4) Sistemas oscilatórios de segunda ordem não podem ser construídos com uma cascata de dois sistemas de primeira ordem, que irão resultar sempre em sistemas superamortecidos.

Por exemplo, supõe-se dois sistemas

$$G_a(s) = \frac{K_a}{\tau_a s+1} \quad e \quad G_b(s) = \frac{K_b}{\tau_b s+1}$$

Onde τ_a, τ_b são constantes de tempo e, ∴,

$$\tau_a, \tau_b > 0$$

Os dois sistemas em cascata resultam em:

$$\frac{K_a K_b}{\tau_a \tau_b s^2 + (\tau_a + \tau_b) s + 1} = \frac{K_a K_b / \tau_a \tau_b}{s^2 + \frac{(\tau_a + \tau_b)}{\tau_a \tau_b} + \frac{1}{\tau_a \tau_b}}$$

$$\frac{1}{\tau_a \tau_b} = \omega_n^2 \quad e \quad \frac{\tau_a + \tau_b}{\tau_a \tau_b} = 2\zeta\omega_n$$

$$\therefore \zeta = \frac{1}{2} \frac{(\tau_a + \tau_b)}{\tau_a \tau_b} \sqrt{\tau_a \tau_b}$$

$$\therefore \zeta = \frac{1}{2} \frac{(\tau_a + \tau_b)}{\sqrt{\tau_a \tau_b}} < 1$$

$$(\tau_a + \tau_b)^2 < 4 \tau_a \tau_b$$

$$\tau_a^2 + 2 \tau_a \tau_b + \tau_b^2 - 4 \tau_a \tau_b < 0$$

$$(\tau_a^2 - 2 \tau_a \tau_b + \tau_b)^2 < 0$$

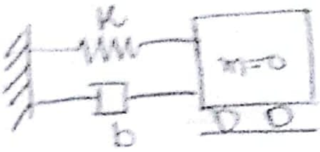
$$\boxed{(\tau_a - \tau_b)^2 < 0}$$

não válido se τ_a, τ_b são reais.

Isto é, matematicamente o sistema pode oscilar, mas há uma restrição física. Por exemplo, o sistema

$\frac{1}{s+j}$, com polo em $s = -j$ poderia representar mecanicamente um sistema massa-mola-amortecedor ⑤

com massa nula,



$$G(s) = \frac{1}{bs+K}$$

e, obviamente, os parâmetros b e K não podem ser imaginários

5)

a) $G(s) = \dfrac{6}{(s+1)(s+10)}$

1. Reescrever a função em seus fatores básicos,

$$G(j\omega) = \frac{6}{10} \frac{1}{(j\omega+1)(j\omega/3+1)}$$

2. Separe a função em seus fatores básicos

$K_0 = 0{,}6$, constante

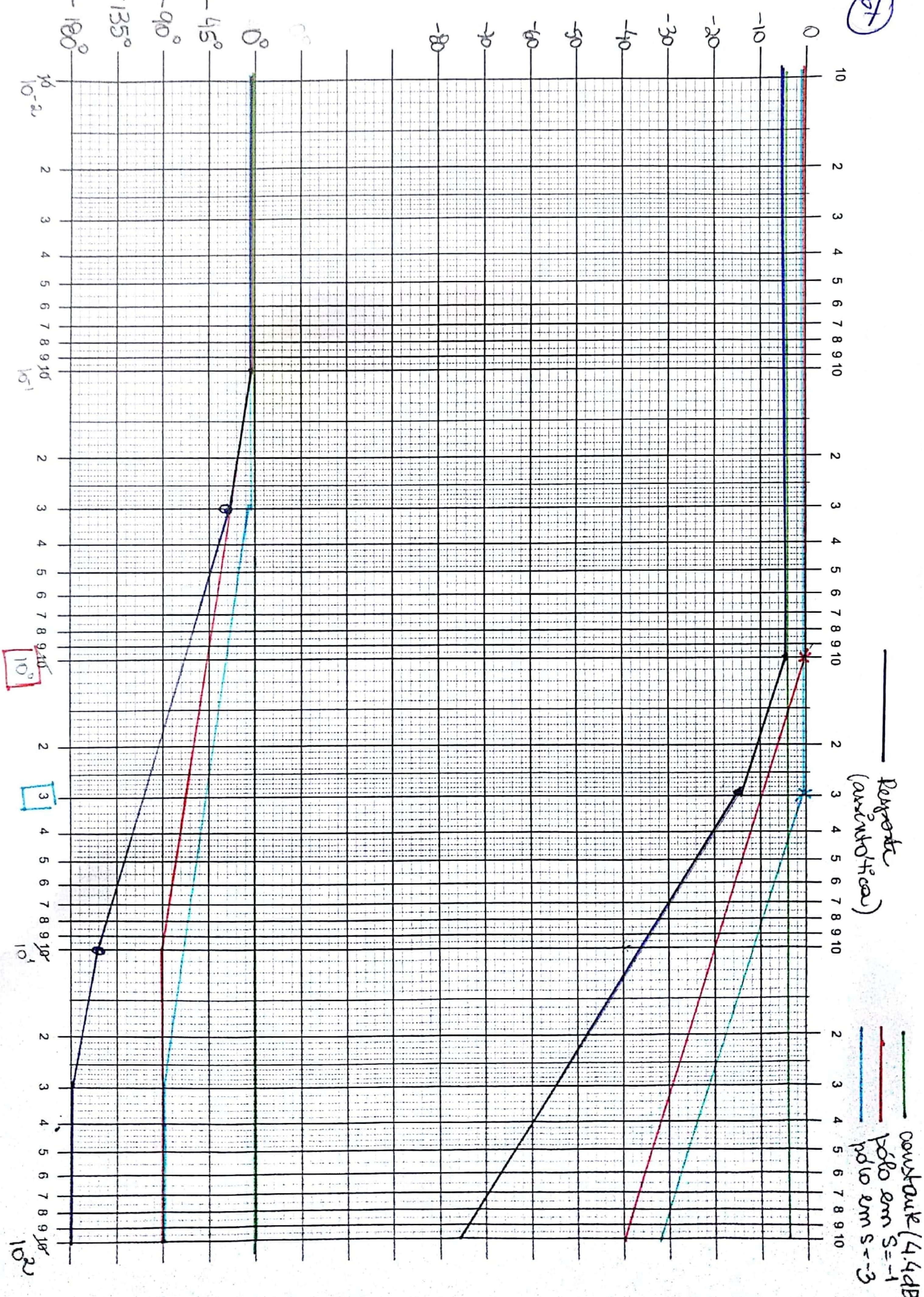
$(j\omega+1)^{-1}$, um pólo real em $s=-1$

$(j\omega/3+1)^{-1}$, um pólo real em $s=-3$

Vamos organizar os "pontos de quebra" da curva, na ordem,

TERMO	FREQ. CANTO	MODULO	FASE
$K_0 = 0{,}6$	—	~ -4.4 dB (constant)	0° (constante)
$(j\omega+1)^{-1}$	$\omega = 1/\tau = 1$	até $\omega=1$, 0dB $\omega>1$ −20dB/dec	até $\omega=0.1$: 0° a partir $\omega=10$: −90°
$(j\omega/3+1)^{-1}$	$\omega = 1/\tau = 3$	até $\omega=3$, 0dB $\omega>3$ −20dB/dec	até $\omega=0.3$: 0° a partir $\omega=30$: −90°

3. Desenhar cada fator e somar. Você pode desenhar até cada frequência de corte a resposta, porém, a chance de cometer um erro é maior.


0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
0°
-45°
-90°
-135°
-180°
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
3
10^{1}
10^{2}
Resposta (assintótica)
constante (4.4dB)
pólo em s=-1
pólo em s=-3

b) $G(s) = 10 \dfrac{s+10}{s^2+3s}$

1. Reescrever a função na forma apropriada (conhecida como forma de Bode ou em fatores básicos)

$$G(j\omega) = \frac{10\times 10}{3} \frac{(j\omega/10+1)}{(j\omega)\ (j\omega/3+1)}$$

2. Separe a função em seus fatores básicos,

→ $K_0 = \frac{100}{3} = 33{,}3$, constante

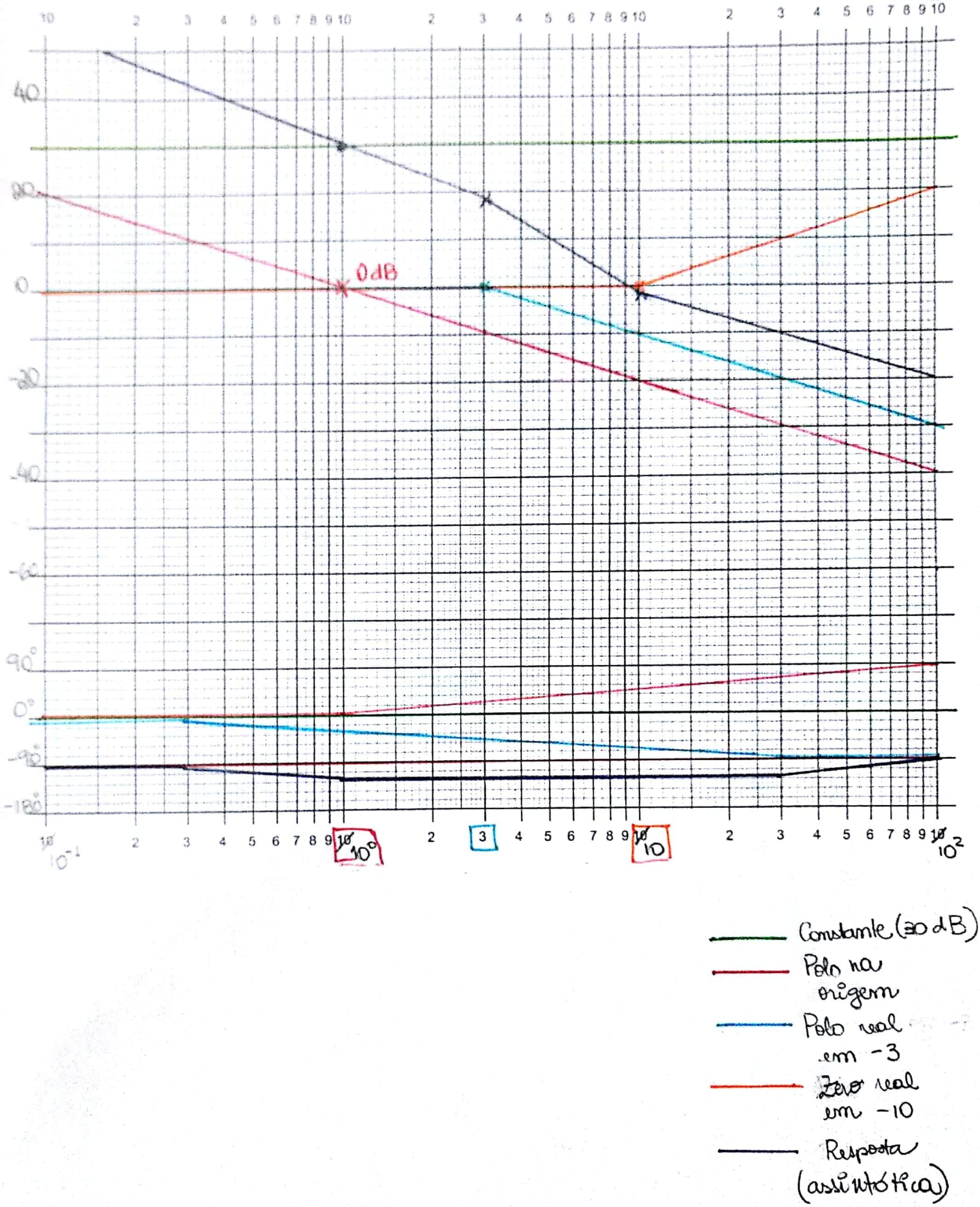
→ $(j\omega)^{-1}$, um pólo na origem $s=0$

→ $(j\omega/3+1)^{-1}$, um pólo real em $s=-3$

→ $(j\omega/10+1)^{1}$, um zero real em $s=-10$

Vamos definir os "pontos de quebra" da curva, na ordem,

TERMO	FREQ CANTO	MÓDULO	FASE
$K_0 = 33{,}3$	—	$\sim 30dB$ (constante)	$0°$ (constante)
$(j\omega)^{-1}$	$\omega = 1 \rightarrow 0dB$ (referência para reta)	$-20dB/dec$ (constante)	$-90°$ (constante)
$(j\omega/3+1)^{-1}$	$\omega = 1/\tau = 3$	até $\omega = 3$, $0dB$ $\omega > 3$ $-20dB/dec$	até $\omega = 0{,}3$: $0°$ a partir de $\omega = 30$: $-90°$
$(j\omega/10+1)^{1}$	$\omega = 1/\tau = 10$	até $\omega = 10$, $0dB$ $\omega > 10$ $+20dB/dec$	até $\omega = 0{,}1$: $0°$ a partir de $\omega = 100$: $+90°$


40
20
0
-20
-40
-60
90°
0°
-90°
-180°
0dB
10^-1
10^0
3
10
10^2
Constante (20 dB)
Polo na origem
Polo real em -3
Zero real em -10
Resposta (assintótica)

Um ponto importante é que a curva será transladada para cima 30 dB desde as frequências mais baixas por causa de K_0.

Quando se tem um zero/pólo na origem e um fator constante, pode-se unir os dois fatores básicos, de modo a escrever $K_0(j\omega)^{\pm 1}$ em uma só reta.

As características dessa reta são:

- declividade constante de $\pm$ 20 dB/dec
- em $\omega = 1$, $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |K_0|$

Ou seja, desenha-se a curva de pólo/zero na origem normalmente, porém, em $\omega = 1$ (referência da curva), ao invés de 0 dB, tem-se o valor do módulo de K_0, em dB.

Sempre utilize o Matlab para verificar suas respostas

c) $G(s) = 4 \dfrac{(s^2+s+25)}{s^3+100s^2}$

1) $G(s) = \dfrac{4 \times 25}{100} \dfrac{\left(\frac{s^2}{25} + \frac{s}{25} + 1\right)}{s^2\left(\frac{s}{100}+1\right)} = \dfrac{\frac{s^2}{25} + \frac{s}{25} + 1}{s^2\left(\frac{s}{100}+1\right)}$

2) 4 fatores básicos,

constante $K_0 = 1$

pólo duplo na origem s^2

pólo real em $s = 100$

Par de zeros complexos conjugados s^2+s+25

$\omega_n = 5$

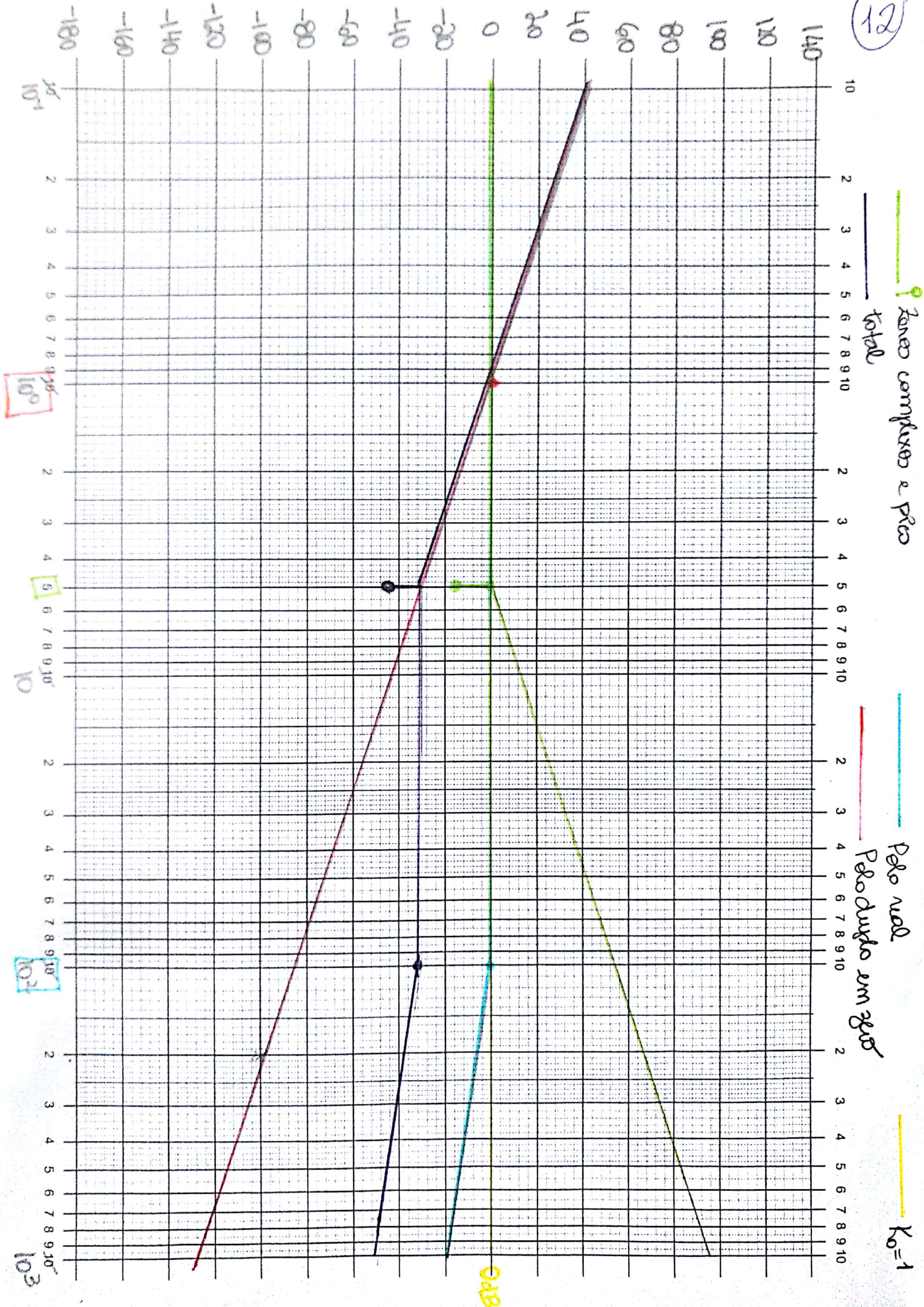
$\dfrac{2\zeta}{\omega_n} = \dfrac{1}{25} \Rightarrow \zeta = \dfrac{5}{50} = 0{,}1$

Amplitude do pico

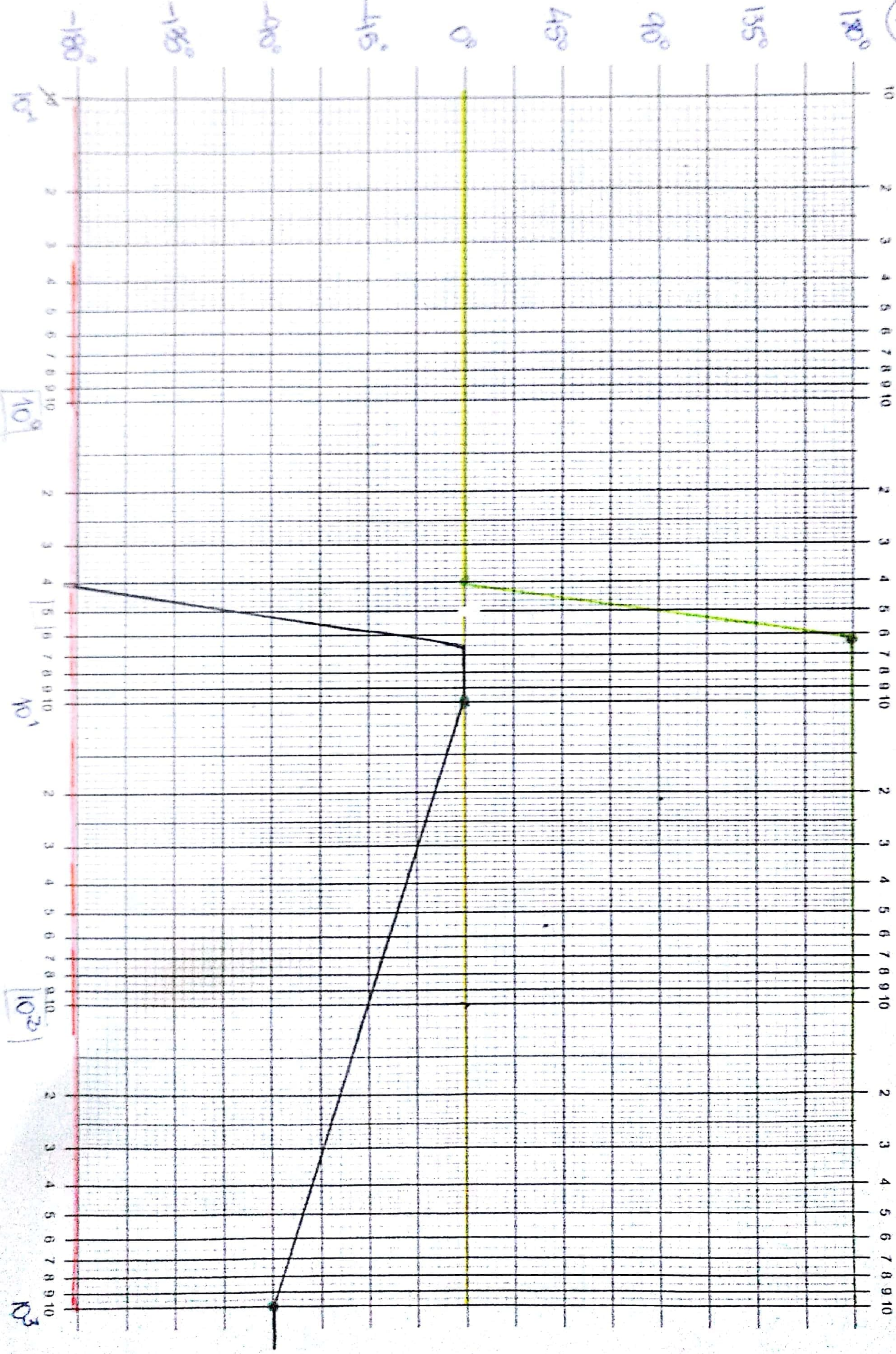
$|G(j)|_{dB} \cong 20 \log 2\zeta = 20 \log 0{,}2$

$\cong -14 dB$

Fator	FREQ DE CANTO	MÓDULO	FASE
$K_0 = 1$	—	0dB	0°
Pólo duplo na origem	$\omega = 1$ rad/s $\|G(j)\|_{dB} = 0dB$	-40dB/dec	$-180°$
Pólo Real	$\omega_c = 100$ rad/s	-20 dB/dec	0° até $\omega_c/10 = 10$ rad/s $-90°$ a partir $10\omega_c = 1000$ rad/s
Zeros complexos			0° até $10^{-\zeta}\omega_c = 4$ rad/s 180° a partir $10^{\zeta}\omega_c = 6{,}3$ rad/s


Zero complexo e Pico
Total
Polo real
Polo duplo em zero
$K_0=1$
0dB

13



d) $G(s) = \frac{100}{S+30} e^{-0,01S}$

1)

$$G(s) = \frac{10\not{0}}{3\not{0}} \frac{1}{\left(\frac{S}{30}+1\right)} e^{-0,01S}$$

2) Constante $K_0 = 10/3 = 3,33$

- Polo real em $S = 30$
- Retardo de transporte de 0,01s

Fator	FREQ CANTO	MÓDULO	FASE
constante $K_0 = 3,33$	—	10,5 dB	0°
Polo real	$\omega_c = 30 \text{ rad/s}$	0 dB até ω_c; -20 dB/dec acima de ω_c	0° até $\frac{\omega_c}{10} = 3 \text{ rad/s}$; $-90°$ a partir de $10\omega_c = 300 \text{ rad/s}$
Retardo de Transporte	—	0 dB	$-0.01\omega \times \frac{180}{\pi}$

$\omega = 0.1 \rightarrow \angle = -0.05°$

$\omega = 20 \rightarrow \angle \cong -10°$

$\omega = 50 \rightarrow \angle \cong -30°$

$\omega = 70 \rightarrow \angle \cong -40°$

$\omega = 100 \rightarrow \angle \cong -60°$

$\omega = 200 \rightarrow \angle \cong -115°$

$\omega = 300 \rightarrow \angle \cong -170°$

$\omega = 700 \rightarrow \angle \cong -400°$

Para o polo real $3 < \omega < 300$,

$\boxed{\angle = -45.\omega + 21,47}$

$\omega = 50 \rightarrow \angle \cong -55°$

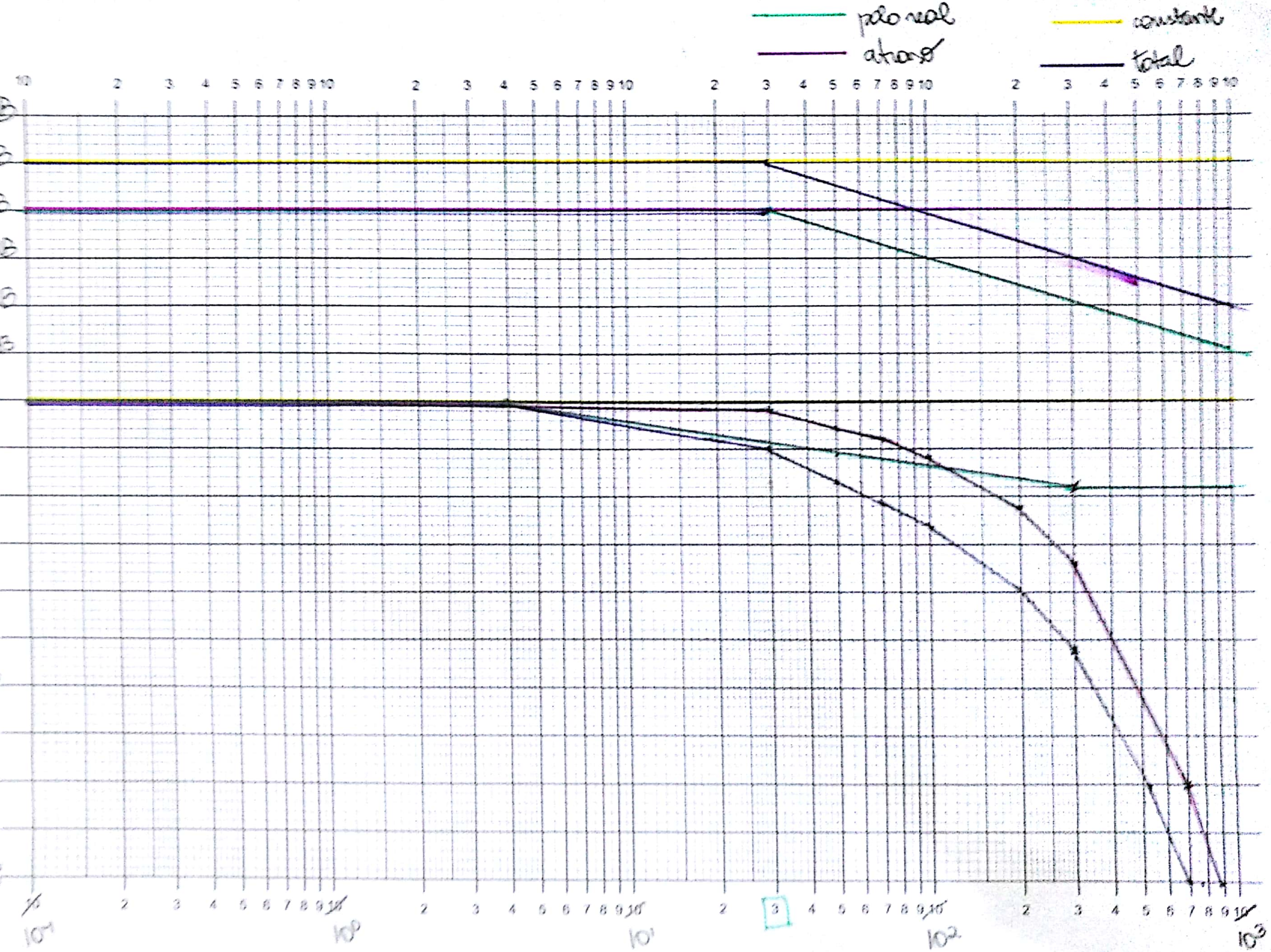
$\omega = 70 \rightarrow \angle \cong -62°$

$\omega = 100 \rightarrow \angle \cong -68°$

$\omega = 200 \rightarrow \angle \cong -82°$

$\omega = 300 \rightarrow \angle \cong -90°$

$-90°$ $\omega = 700 \rightarrow \angle \cong -90°$


polo real
atraso
constante
total
20dB
10dB
0dB
-10dB
-20dB
-30dB
0°
-100°
-200°
-300°
-400°
-500°
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}

7)

a) Analisando a curva, tem-se:

1. Uma queda de -20dB/dec e fase -90° curva durante a baixas frequências significa polo na origem, s^{-1}

2. O polo na origem leva a 0dB em $\omega=1$. Porém, tem-se $\omega=1$ com aprox 14 dB. Portanto, tem-se uma constante, $|K_0|_{dB} = 14$ $\quad K_0 = 10^{14/20} \cong 5$

3. Em $\omega = 2$ rad/s a curva passa a ter uma queda de -40 dB. Isto é, tem-se um polo real, $\left(\frac{s}{2}+1\right)^{-1}$

4. Em $\omega = 10$ rad/s a curva volta a -20 dB/dec. Portanto, tem-se um zero real, $\left(\frac{s}{10}+1\right)$.

5. Em $\omega = 50$ rad/s a curva passa a -40dB/dec de inclinação. A curva real mostra um pico de aprox. 10dB um pouco antes da frequência de 50rad/s, indicando polos complexos

Do pico tem-se que $-20 \log 2\zeta = 10$

$$2\zeta = 10^{-1/2}$$

$$\therefore \zeta \cong 0.32$$

A equação dos polos complexos será:

$$\left(\frac{s^2}{50^2} + 0,0126\,s + 1\right)^{-1}$$

6. Dessa forma, a função $G(s)$ é dada por,

$$G(s) = \frac{5 \times (s+10) \times 2 \times 50^2}{s \times 10 \times (s+2)\,(s^2+31,5s+2500)} = \frac{50^2\,(s+10)}{s(s+2)(s^2+31,5s+50^2)}$$

b) A curva de módulo da figura mostra 0dB até, aprox, 2rad/s e, em seguida, uma queda de 20 dB/dec. Portanto, tem-se um polo real em $s=2$,

$$\left(\frac{1}{2}s+1\right)^{-1}$$

Apesar da curva de módulo indicar somente um polo real, o crescimento da curva de módulo sugere a presença de atraso.

Pela presença do polo real deve-se ter $-90°$ em $\omega=20$. Tem-se,

1,67 — 90

0,34 — x

aprox,

Como $\angle = T\omega$, onde T é o atraso,

$T\omega \cong 20$ em $\omega = 20$.

$$\boxed{\therefore T \cong 1s}$$

$$\therefore \boxed{G(s) = \frac{2e^{-s}}{(s+2)}}$$

c)

- Curva inicial com inclinação de +20dB/dec, indicando zero na origem $(s)^{-1}$

- Em $\omega = 1$

$|H(j\omega)|_{dB} = 20$, portanto $K_0 = 10$ é a constante.

- Em $\omega = 10$ há um pico de 10dB

$\therefore -20 \log 2\zeta = 10$

$\log 2\zeta = -\frac{1}{2} \quad \therefore \quad 2\zeta = 10^{-1/2}$

$\zeta = 0.16$

Sugerindo um polo complexo,

$$\left(\frac{s^2}{10^2} + 0{,}0316s + 1\right)^{-1}$$

Porém a queda é de -40 dB/dec e a mudança da fase é $-(180° + 90°)$. Isso sugere a presença de um polo em $s=10$ para anular a subida do zero na origem e acrescentar $-90°$ na fase.

$$\therefore \quad G(s) = \frac{10 \cdot s}{\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s^2}{10^2} + 0.0316s + 1\right)}$$

$$\boxed{G(s) = 10^4 \frac{s}{(s+10)(s^2 + 3.16s + 100)}}$$

9) Pelo gráfico, tem-se uma amplificação de ~ -25 dB
um pico em $\omega = 3$ rad/s de ~ 4 dB. Depois do
pico percebe-se uma queda de -40 dB por
década

Esse gráfico é característico de polos complexos
conjugados + constante

POLO COMPLEXO,

$$G_1(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$$

ω_n é, aproximadamente, a freq de pico, $\omega_n = 3 \frac{rad}{s}$

O pico tem magnitude de $\approx -20 . \log 2\zeta = 4 dB$

$$2\zeta = 10^{4/20}$$

$$\zeta = 0{,}31$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{2 \times 0{,}61}{4} = 0.3$$

$$\therefore G_1(s) = \frac{1}{\frac{1}{9}s^2 + 0.3s + 1}$$

A constante de -25 dB equivale a,

$$20 \log |K_0| = -25$$

$$K_0 = 10^{-25/20} = 0.05$$

$$\therefore \boxed{G(s) = \frac{0.05}{\frac{1}{9}s^2 + 0.3s + 1}}$$

Lembrando das seguintes relações,

$$\omega_n^2 = \frac{K}{m} = 9$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{b}{m} = 0.3$$

$$\frac{1}{K} = K = \frac{1}{0.05} = 20$$

$$\therefore \boxed{K = 20}$$

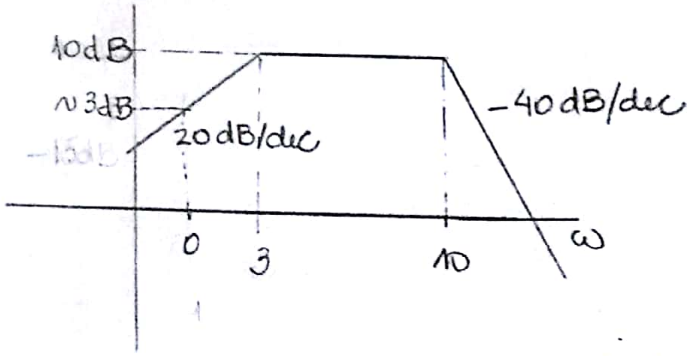
$$\boxed{m = \frac{20}{9} = 2{,}2}$$

$$b = 0.3 \times m = 0{,}3 \times 2{,}2 = \boxed{0{,}67}$$

10)

$$G(s) = \frac{Ks}{(s+a)(s+10)^2}$$

A subida de 20dB/década refere-se ao zero na origem. A aprox. $\omega \cong 3$ tem-se o polo referente a $(s+a)$ e em $\omega = 10$ tem-se o polo duplo de $(s+10)$.



Portanto, o primeiro polo real é $\left(\frac{1}{3}s+1\right)^{-1} = \frac{3}{(s+3)}$

Os polos duplos referem-se a $(s+10)^{-2}$.

Como regra, o zero na origem tem 0dB em $\omega = 1$. Porém, o gráfico mostra 3dB. Essa diferença está relacionada ao ganho. Isto é,

$$dB = 20 \log|K| \quad \therefore K_0 = 10^{(3/20)} \cong 1{,}4$$

Mas, K_0 refere-se ao valor da constante quando os termos estão escritos na forma de fatores básicos. Portanto, a relação entre K_0 e K é:

$$K = K_0 \times 3 \times 10^2 = 300\,K_0 = \boxed{420}$$