

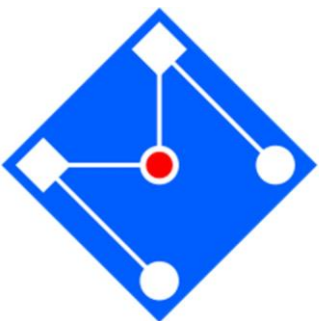
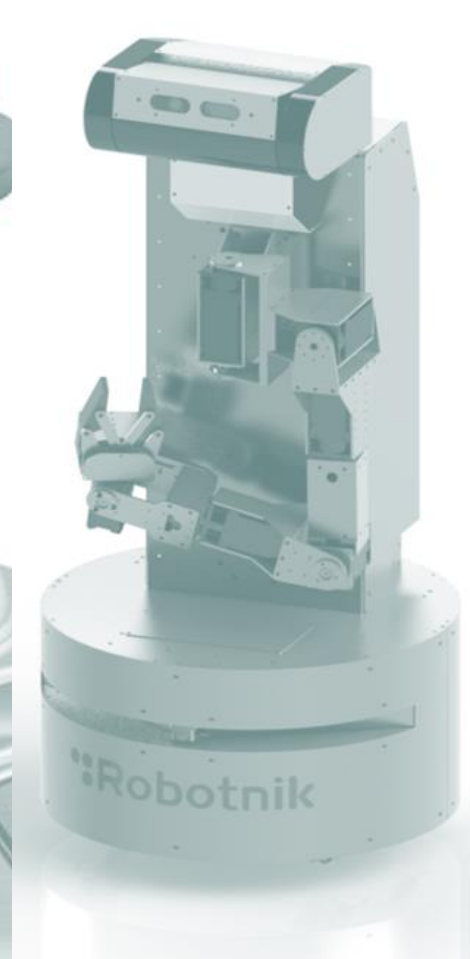
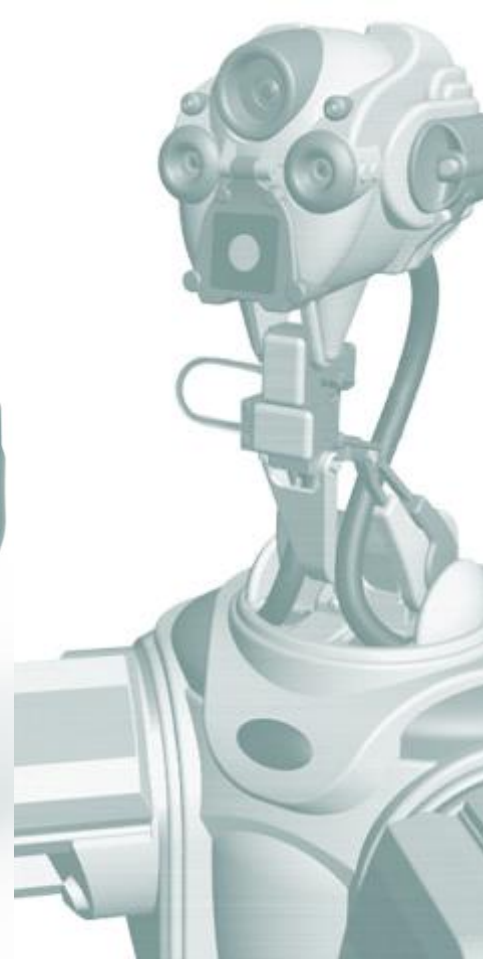


DIAGRAMA DE BODE

Larissa Driemeier
driemeie@usp.br



FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA: LAPLACE

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

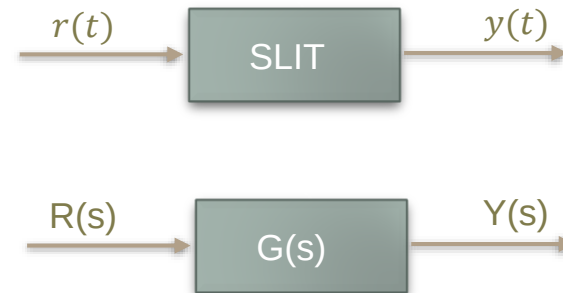
Quociente da transformada de Laplace ($\mathcal{L}$) do sinal de saída pela transformada de Laplace do sinal de entrada considerando nulas as condições iniciais

$$G(s) = \left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{c.i.=0}$$

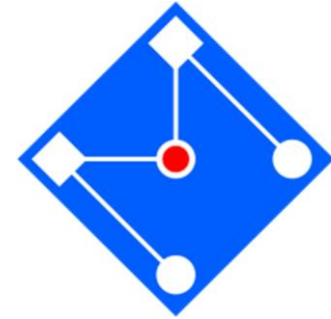
Para condições iniciais nulas



$$Y(s) = G(s)R(s)$$



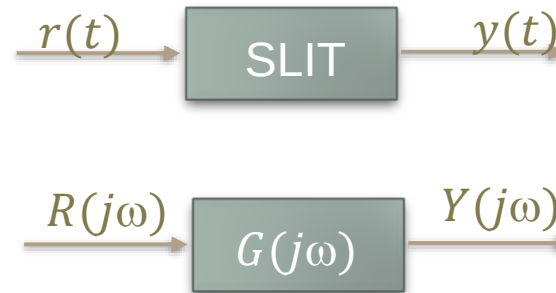
- A função de transferência é um conceito importante para descrever o comportamento de sistemas do ponto de vista de entrada/saída
- Para SLITs, a função de transferência caracteriza completamente o sistema do ponto de vista de entrada-saída



FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA: FOURIER

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Quociente da transformada de Fourier ($\mathcal{F}$) do sinal de saída pela transformada de Fourier do sinal de entrada, considerando nulas as condições iniciais



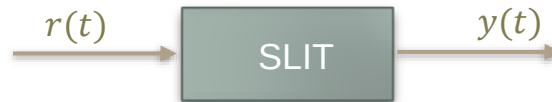
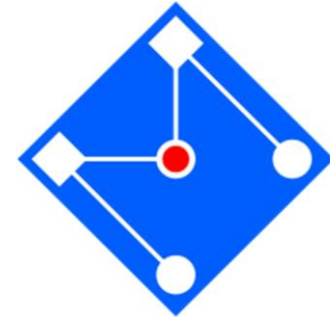
$$G(s) = \left. \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \right|_{c.i.=0}$$

Para condições iniciais nulas



$$Y(j\omega) = G(j\omega)R(j\omega)$$

RESPOSTA NO TEMPO



Dados

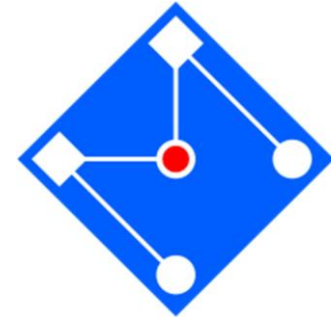
- a equação diferencial que representa um modelo do SLIT
- a entrada $r(t)$
- as condições iniciais

Pretende-se:

- Conhecer a evolução temporal da saída, $y(t)$

Uma maneira de resolver o problema

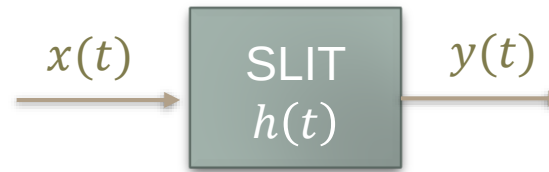
Resolver a equação diferencial que é a representação do comportamento de entrada-saída



RESPOSTA IMPULSO E CONVOLUÇÃO

O sistema é completamente caracterizado pela função resposta ao impulso, $h(t)$. A saída $y(t)$, é obtida no domínio do tempo por Convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau$$



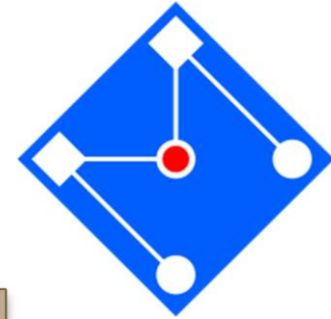
(a transformada da convolução é o produto das transformadas)

Ou, no domínio da frequência,

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

onde $H(s)$ é a resposta em frequência do sistema.

SISTEMAS DE 1ª ORDEM



$$c\dot{y} + ky = u(t)$$



Aplica-se a Transformada de Laplace em ambos os lados da equação

$$csY(s) + kY(s) = U(s)$$

$$\tau = \frac{c}{k} \text{ e } K = \frac{1}{k}$$

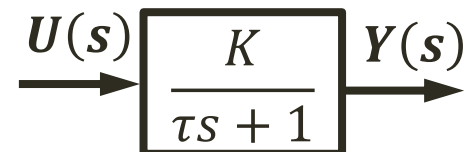


$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

τ é a constante de tempo

É uma medida da
velocidade de
reação do sistema à
uma excitação

Diagrama de blocos



EQUILÍBRIO DINÂMICO

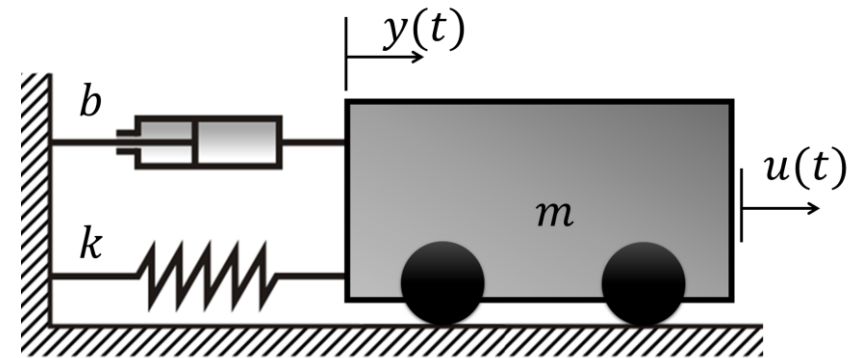
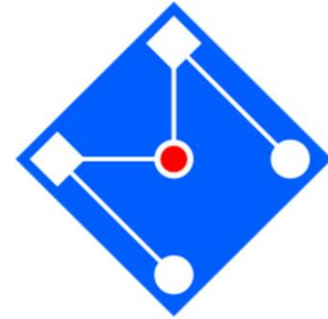
Princípio d'Alembert: a massa m desenvolve uma força de inércia proporcional à sua aceleração e oposta à ela.

$$F = m\ddot{y}$$

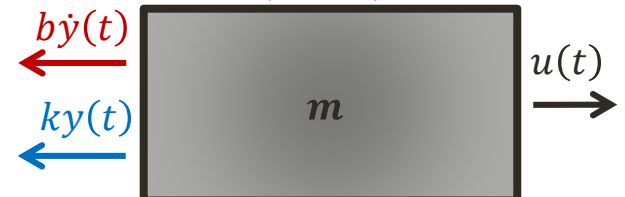
Forças de inércia

$$u(t) - b\dot{y}(t) - ky(t) = m\ddot{y}(t)$$

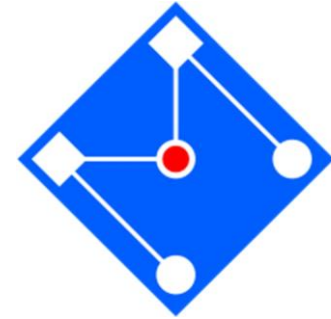
$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$



Forças de amortecimento (viscoso)



Forças elásticas



RESPOSTA DE SISTEMAS DE 2^A ORDEM

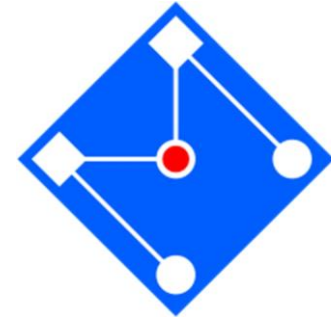
OU RETARDO QUADRÁTICO

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u(t)$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u(t)$$

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad \frac{b}{m} = 2\zeta\omega_n = 2\sigma \quad \frac{1}{k} = K$$

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2y = K\omega_n^2u(t)$$



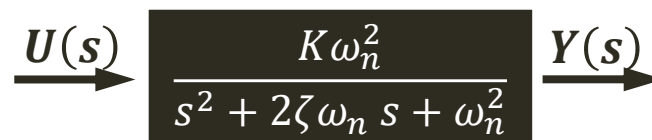
FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$s^2 Y(s) + 2\zeta \omega_n s Y(s) + \omega_n^2 Y(s) = K \omega_n^2 U(s)$$

$$(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2) Y(s) = K \omega_n^2 U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

Diagrama de blocos



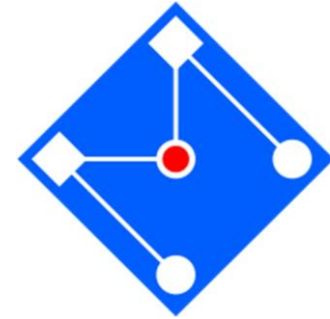


RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

O termo ***resposta em frequência*** significa a resposta em regime permanente de um Sistema a uma entrada senoidal.

[Ogata]

ONDA SENOIDAL



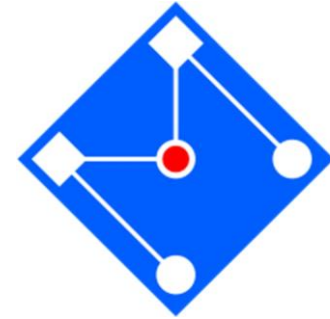
Para Sistema **LIT**, se a entrada é uma onda senoidal a uma frequência particular, então a saída será também uma onda sinusoidal na mesma frequência, mas com diferente fase e amplitude.



$$X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

$$A(\omega) = \text{Re}[X(\omega)]$$

$$B(\omega) = \text{Im}[X(\omega)]$$



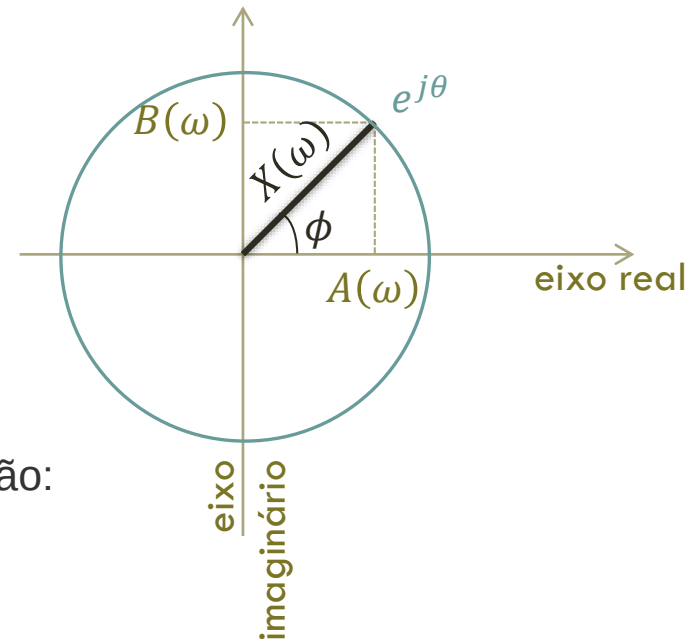
$$X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |X(\omega)| \angle \phi = |X(\omega)| e^{j\phi}$$

em radianos

$$|X(\omega)| = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2}$$

em graus

$$\phi = \text{atan} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$$



Produto e Divisão

$$\frac{A \angle \theta}{C \angle \phi} = \frac{A}{C} \angle (\theta - \phi)$$

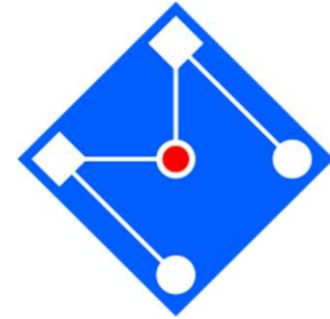
$$A \angle \theta \cdot C \angle \phi = A \cdot C \angle (\theta + \phi)$$

Potenciação e radiciação:

$$(A \angle \theta)^a = A^a \angle (\theta \cdot a)$$

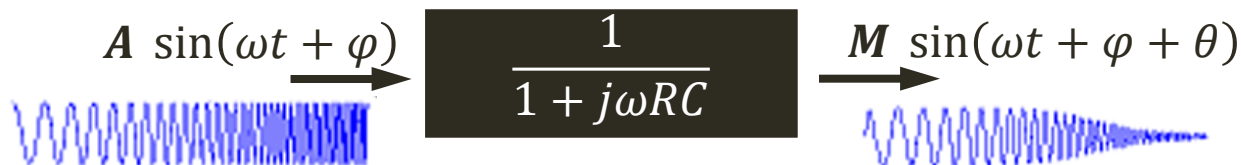
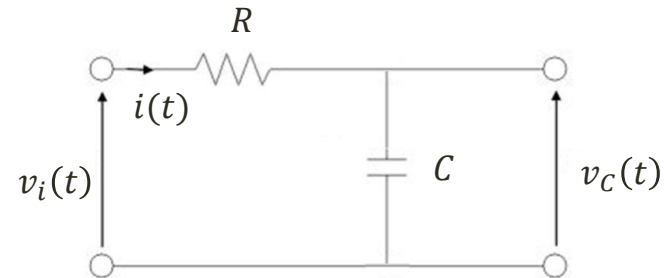
$$\sqrt[a]{A \angle \theta} = \sqrt[a]{A} \angle (\theta \div a)$$

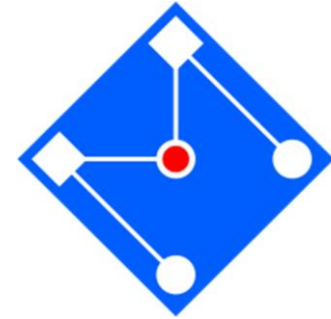
RESPOSTA EM FREQUENCIA DE UM SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM



Função de transferência,

$$H(j\omega) = \frac{V_C(j\omega)}{V_0(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$





RESPOSTA VS ESTÍMULO SENOIDAL

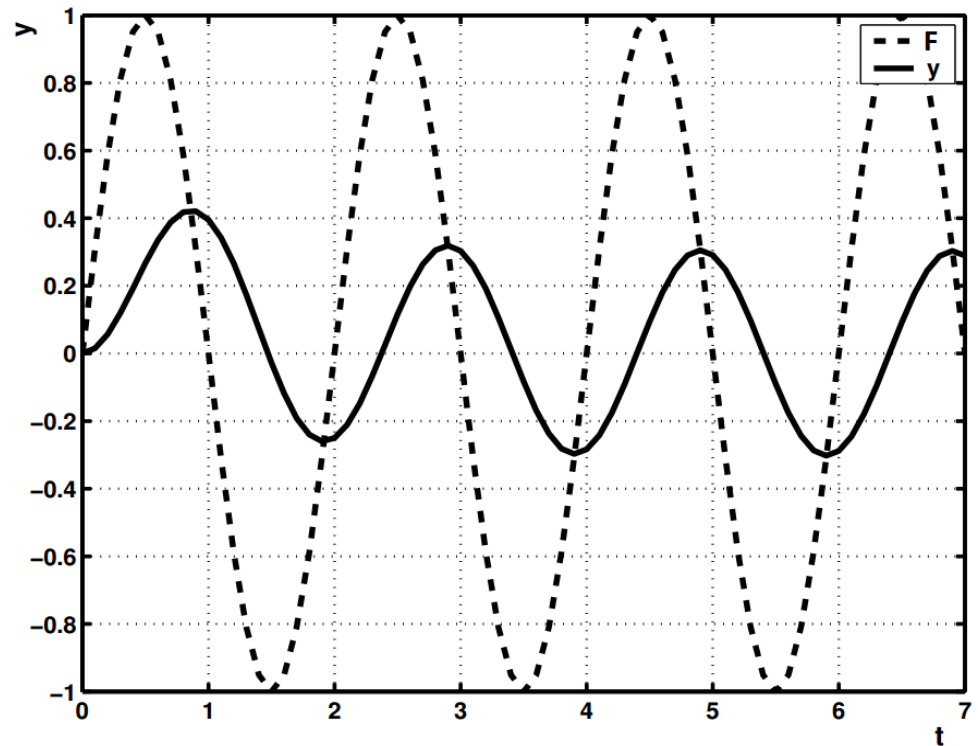
Razão de amplitude, $M_P(\omega)$

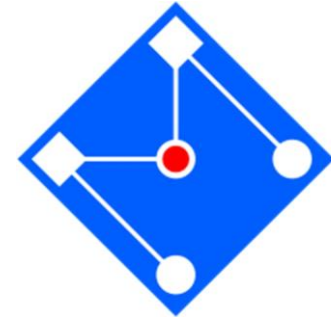
$$M_P(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

Ângulo de fase,

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \omega\tau$$

a resposta é também uma onda senoidal com frequência ω igual à onda senoidal do sinal de entrada



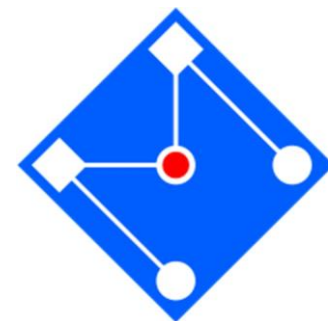
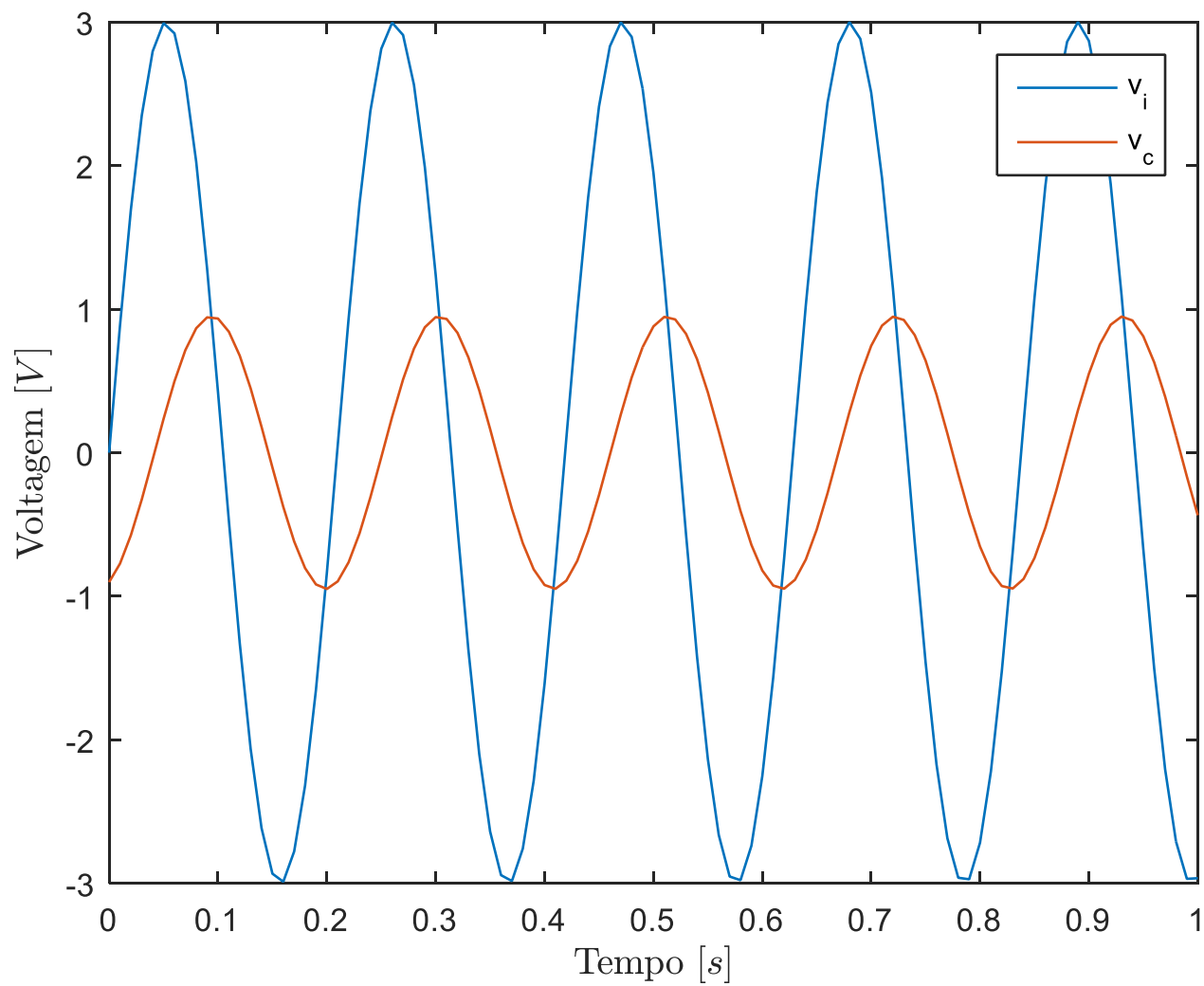


EXEMPLOS

Analisar a relação entre entrada e saída do SLIT de primeira ordem definido anteriormente para as seguintes funções:

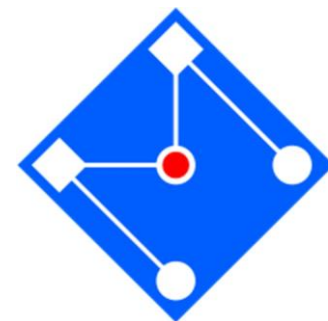
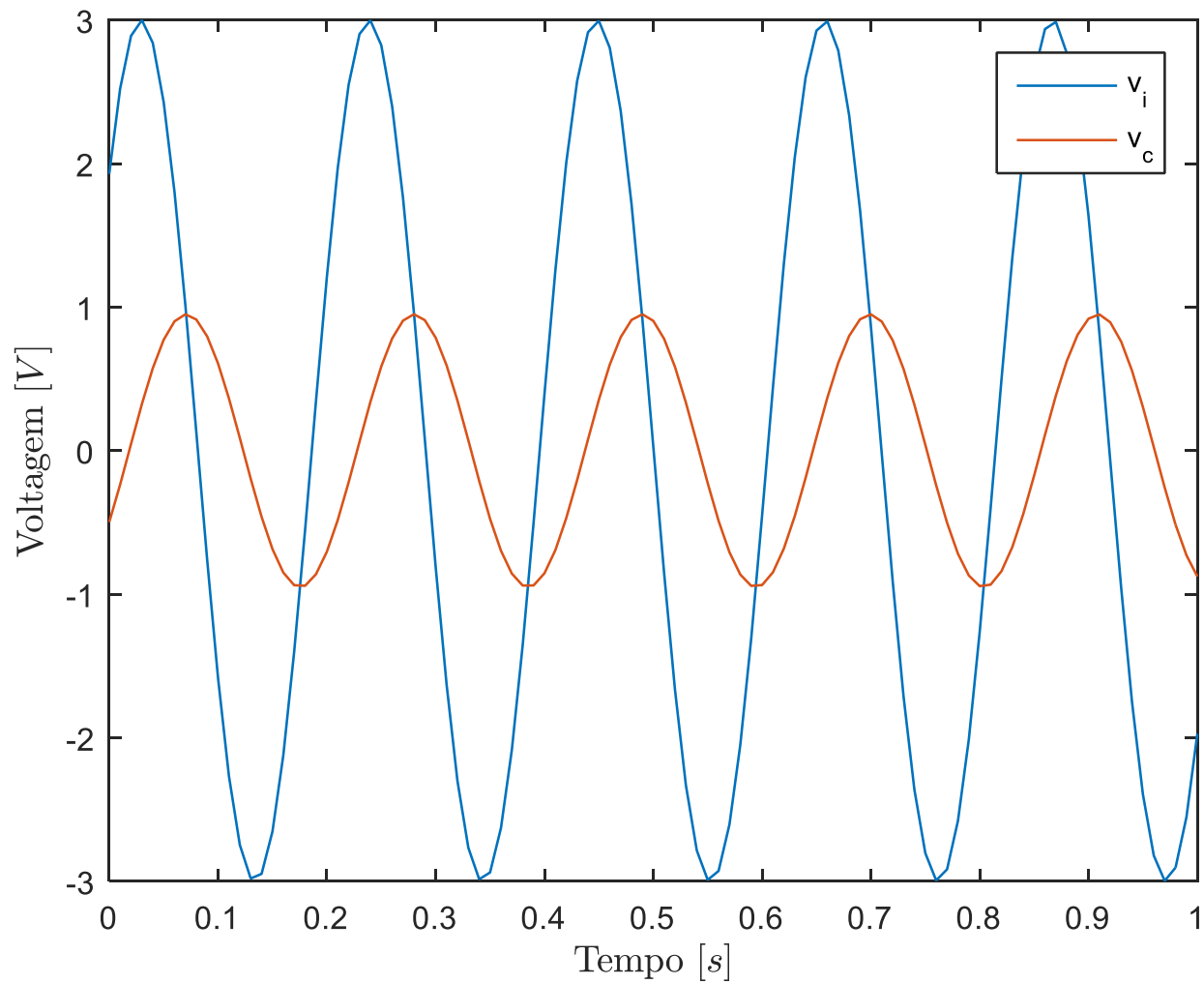
- $v_i(t) = 3 \sin 30t$
- $v_i(t) = 3 \sin(30t + 40^\circ)$
- $v_i(t) = 3 \sin(10t + 40^\circ)$
- $v_i(t) = 3 \cos(10t)$
- $v_i(t) = \sin(70t)$

Considere $R = 100\Omega$ e $C = 1mF$



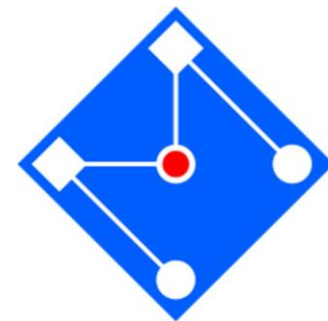
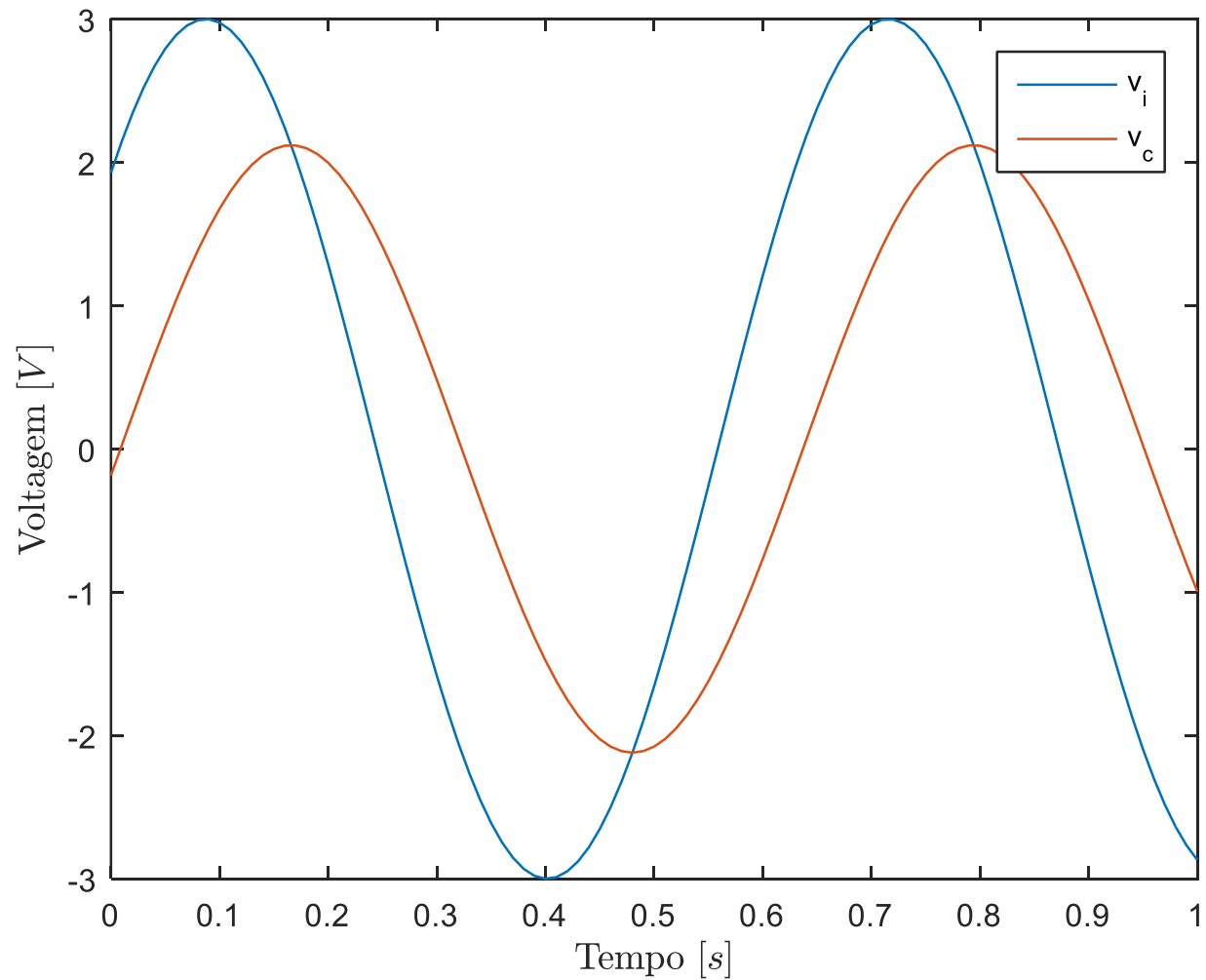
$$v_i(t) = 3 \sin 30t$$

$$v_c = 0.95 \sin(30t - 71,6^\circ)$$



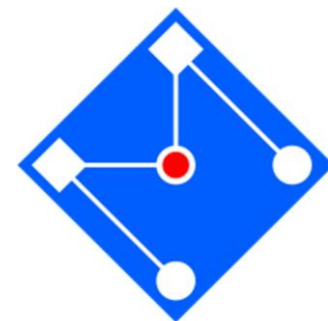
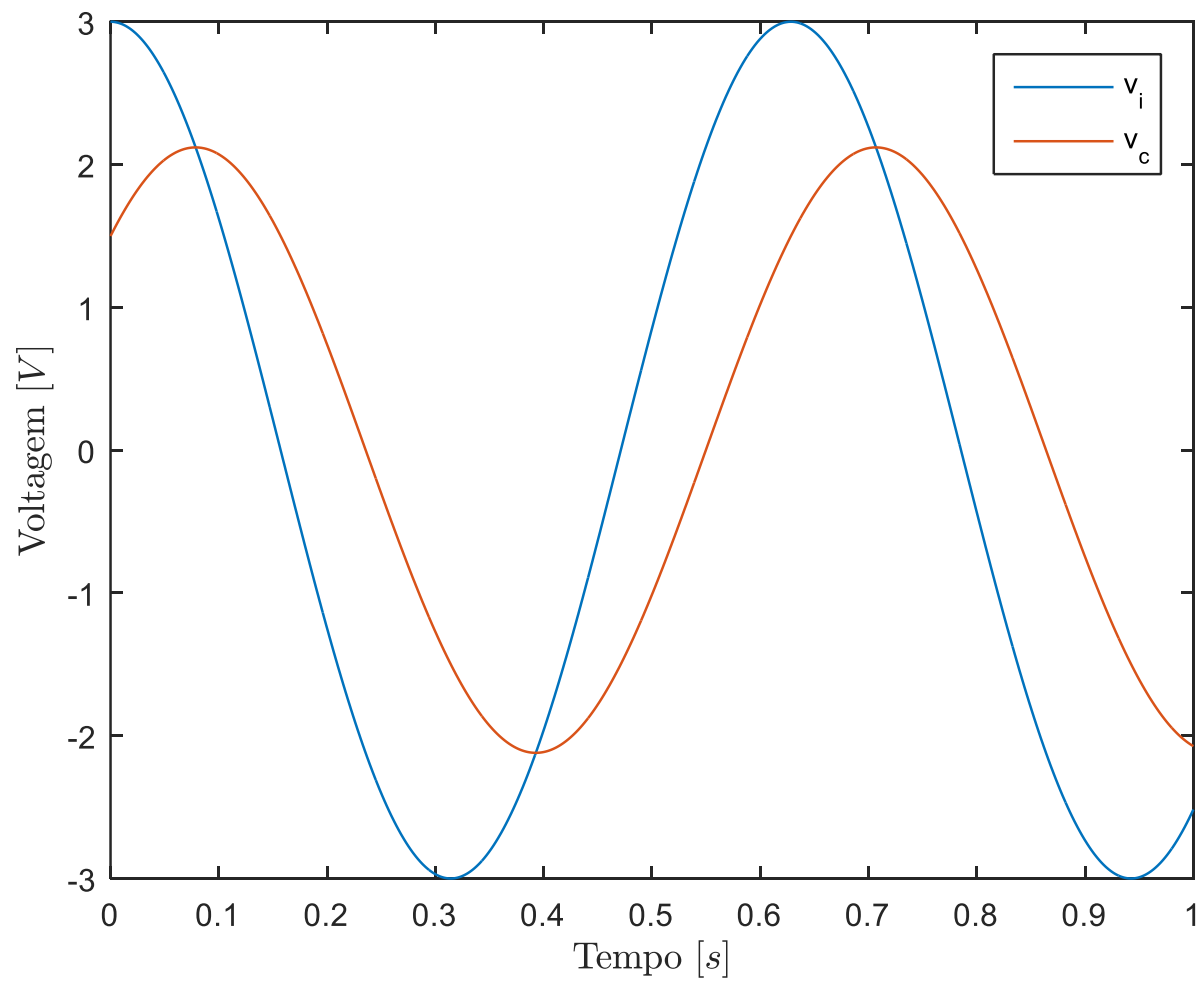
$$v_i(t) = 3 \sin(30t + 40^\circ)$$

$$v_c = 0.95 \sin(30t - 31,6^\circ)$$



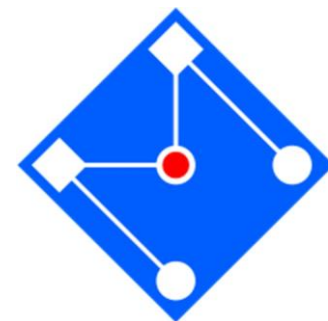
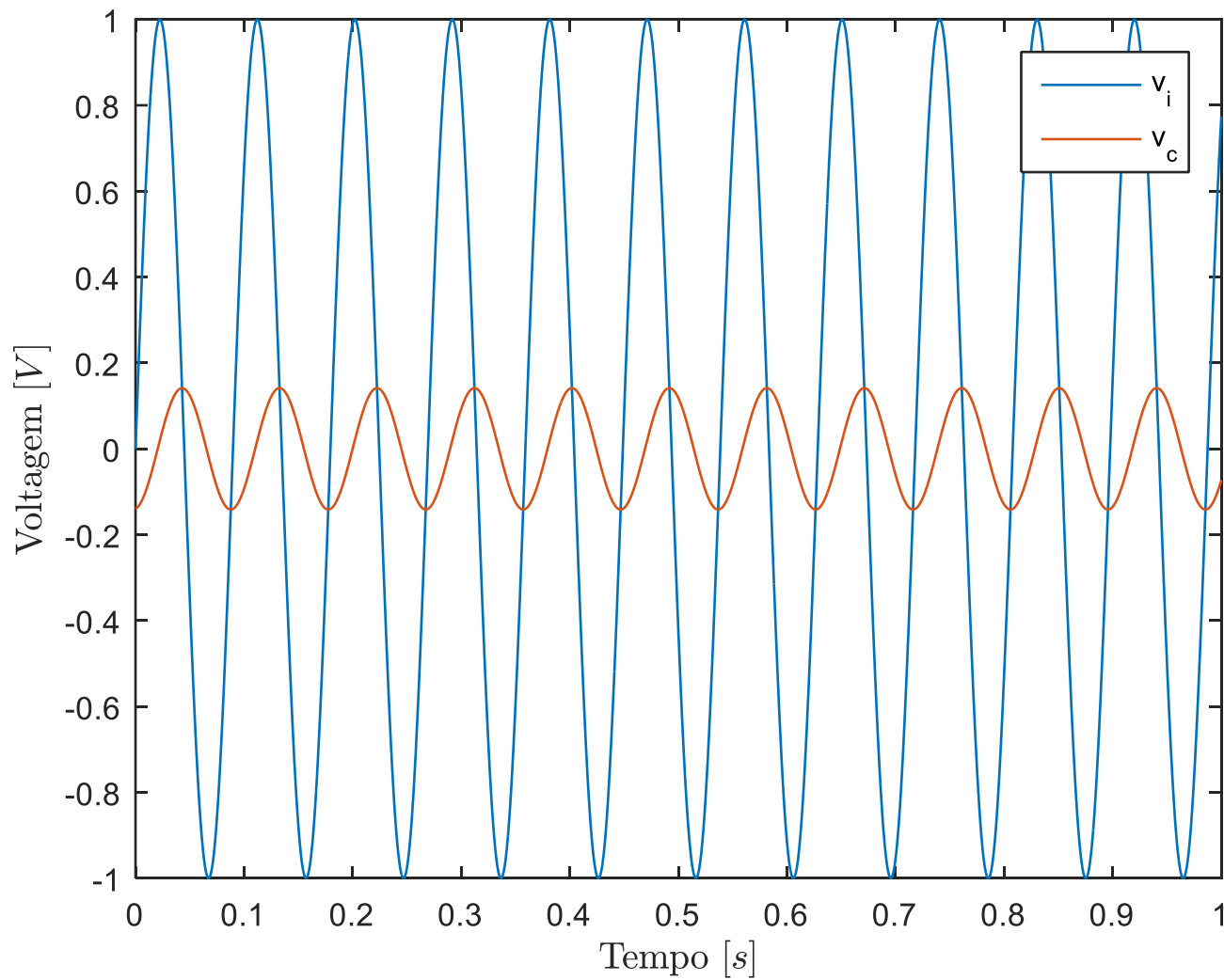
$$v_i(t) = 3 \sin(10t + 40^\circ)$$

$$v_c = 2.12 \sin(10t - 5^\circ)$$



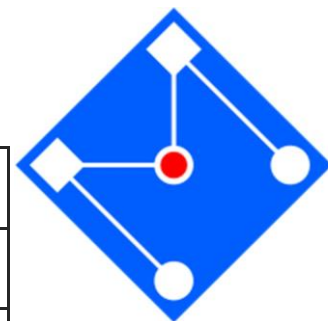
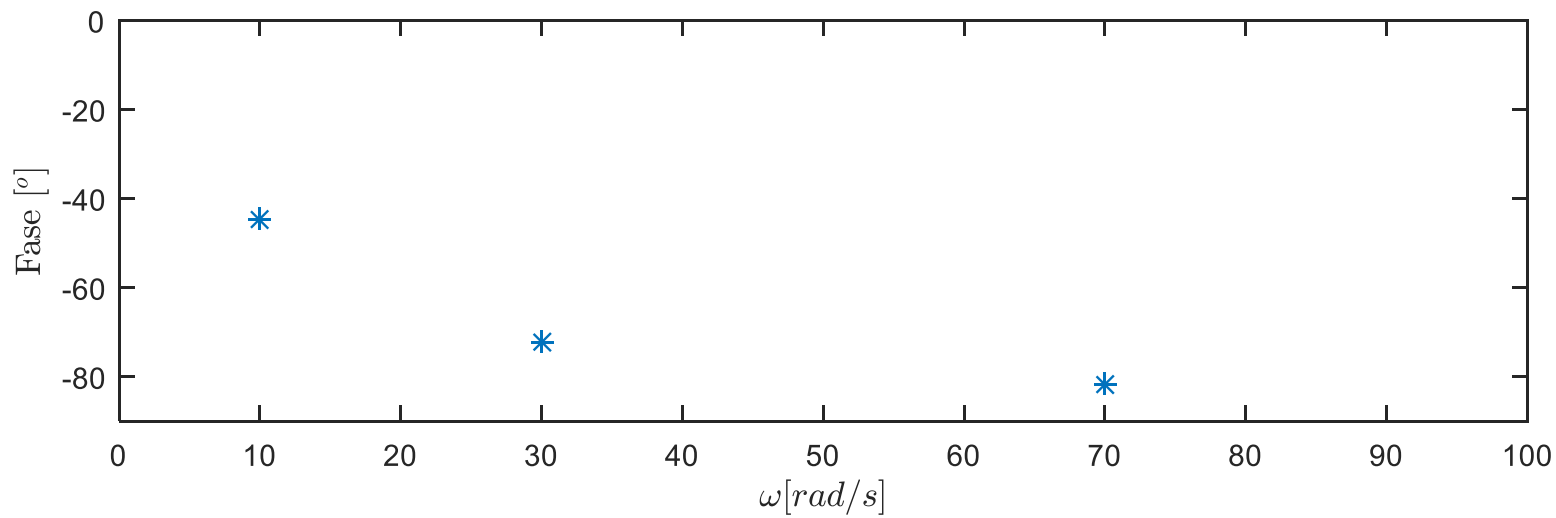
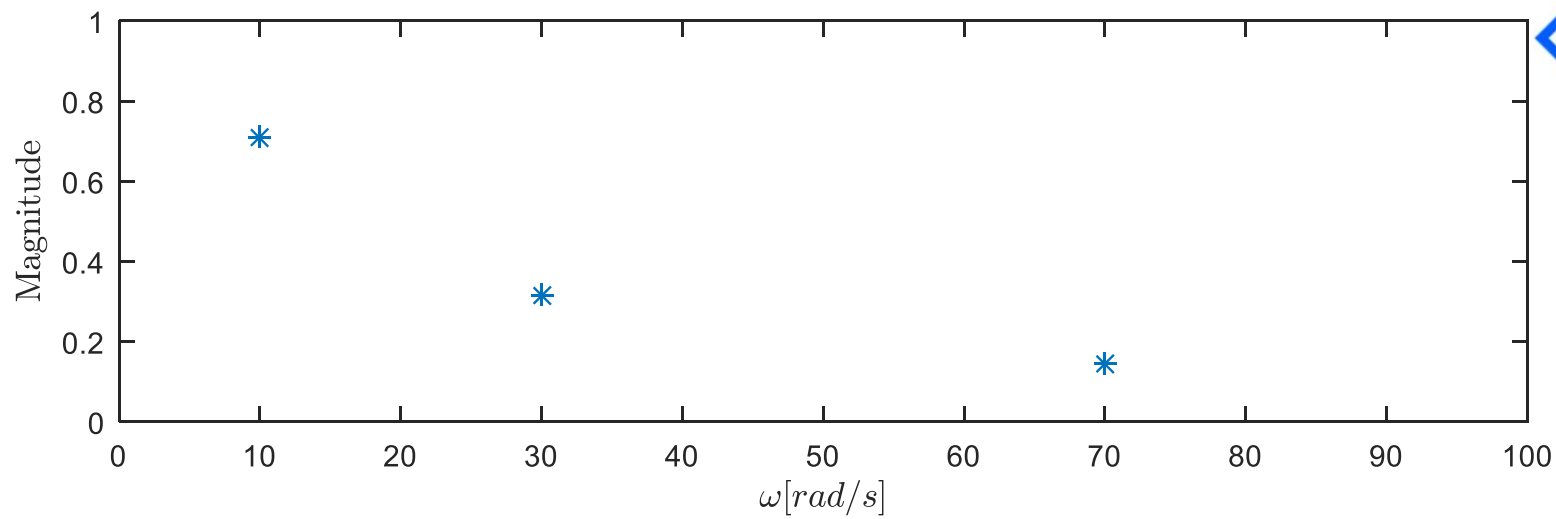
$$v_i(t) = 3 \cos(10t)$$

$$v_c = 2.12 \sin(10t + 45^\circ)$$

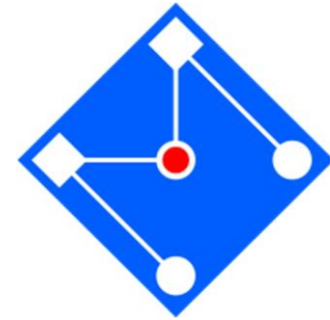


$$v_i(t) = \sin(70t)$$

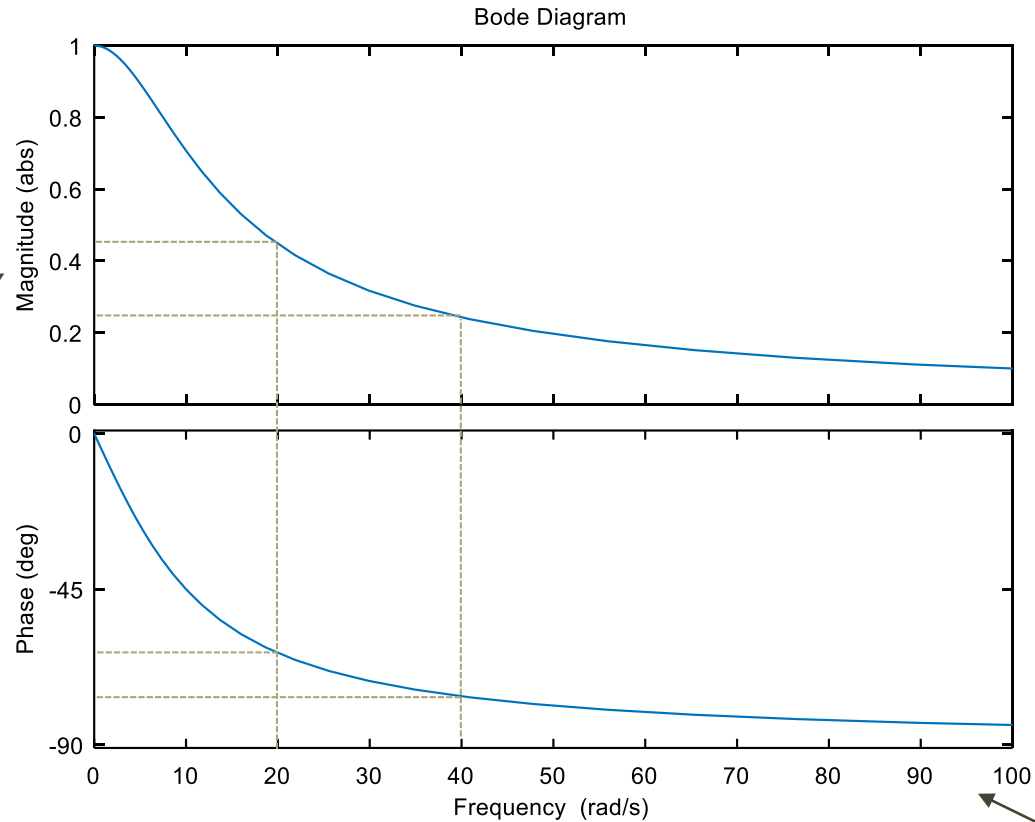
$$v_c = 0.1414 \sin(70t - 81,9^\circ)$$



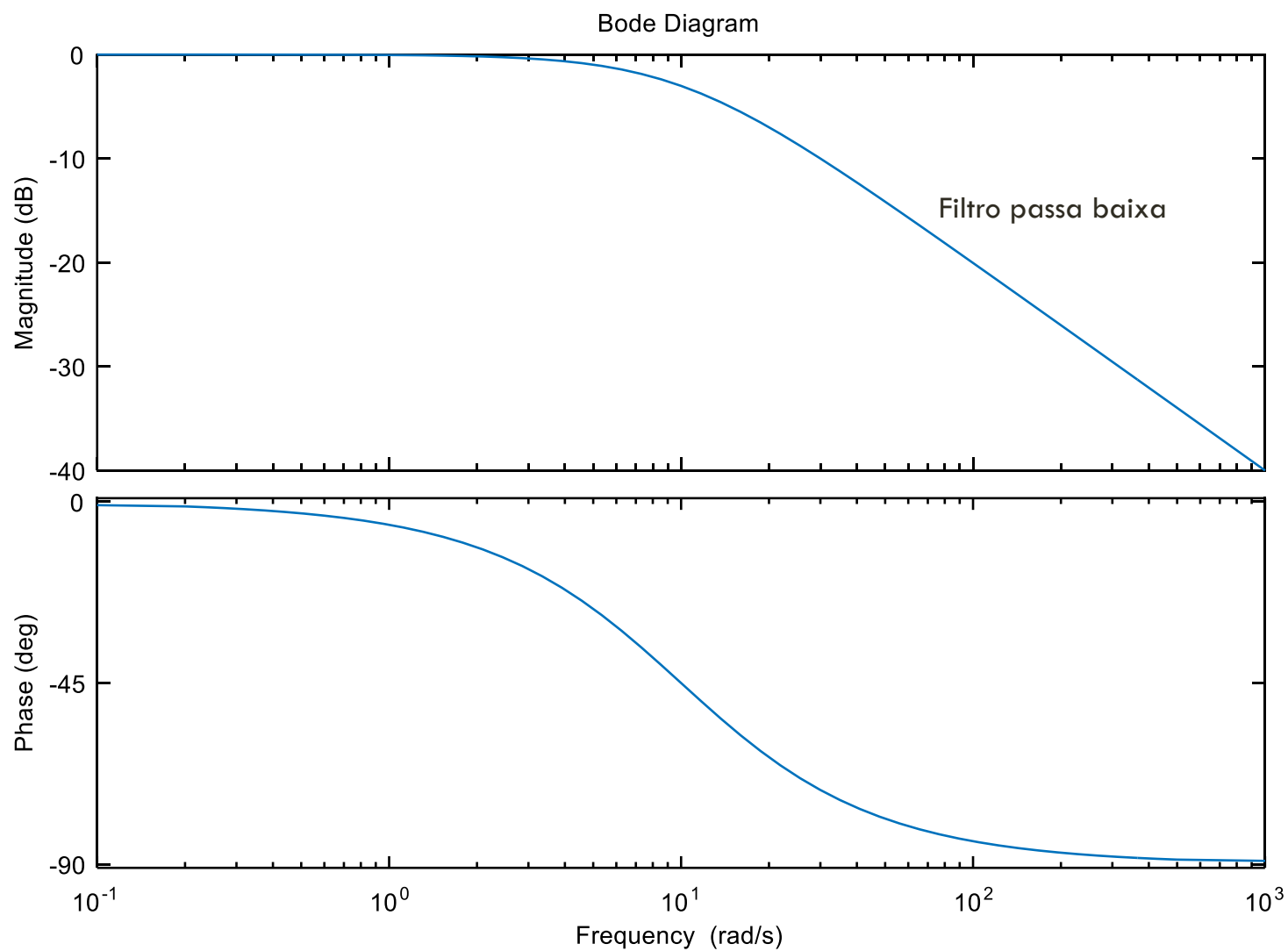
BODE

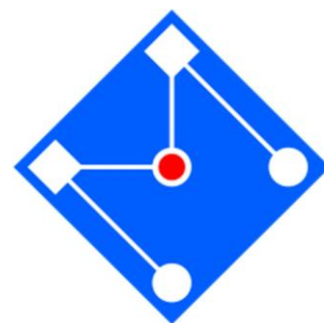
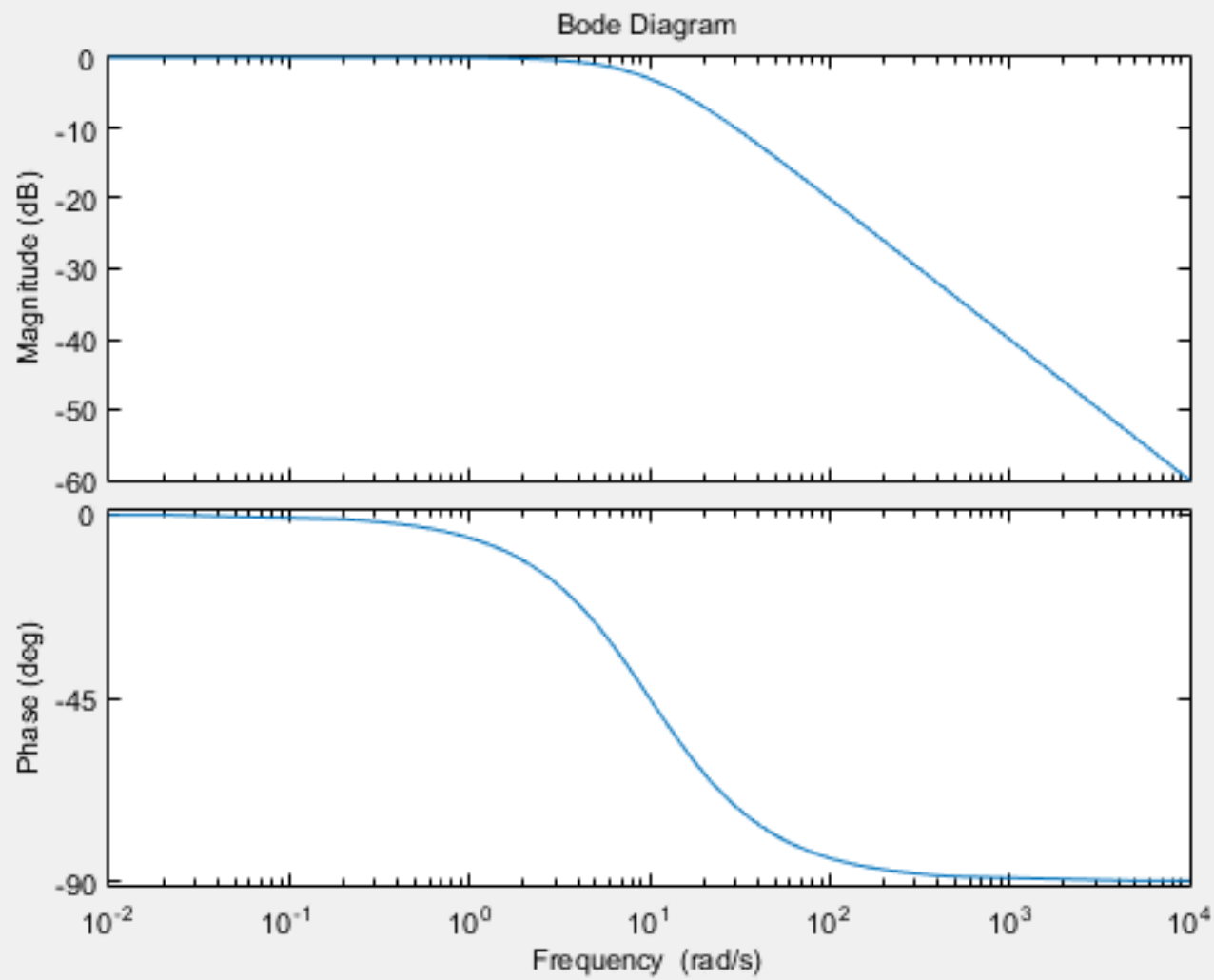


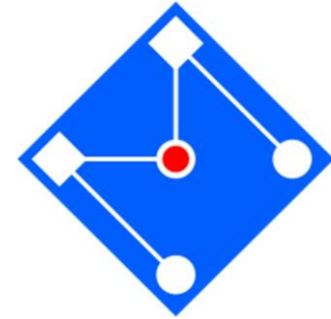
Em dB, mas
aprenderemos
mais tarde



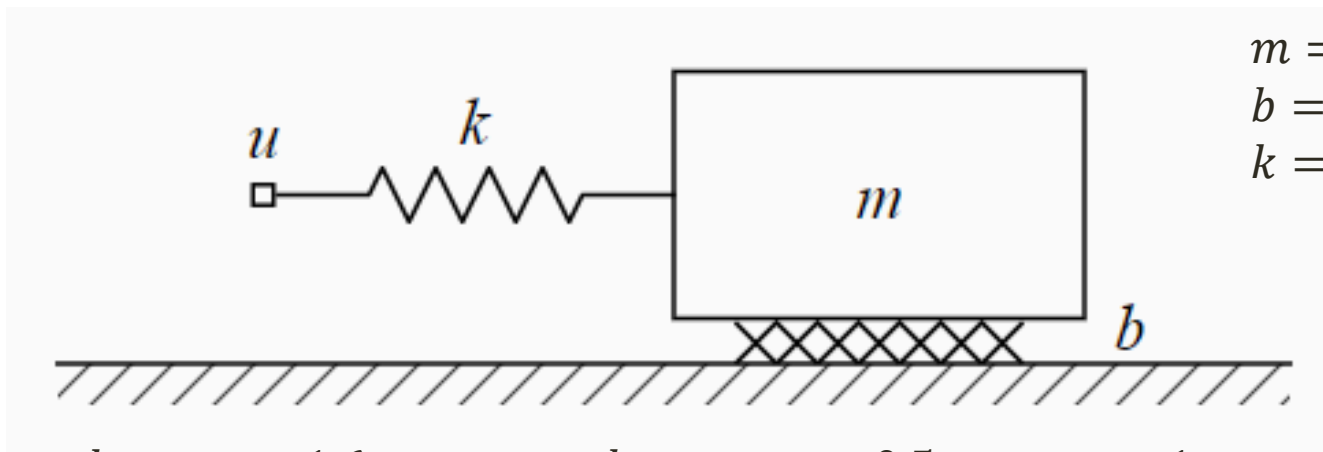
Escala Log, mas
aprenderemos
mais tarde







E UM SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM?



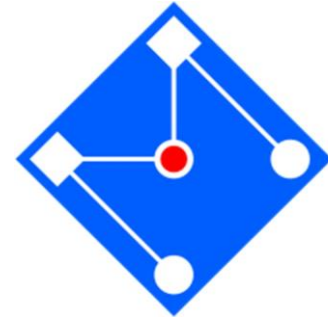
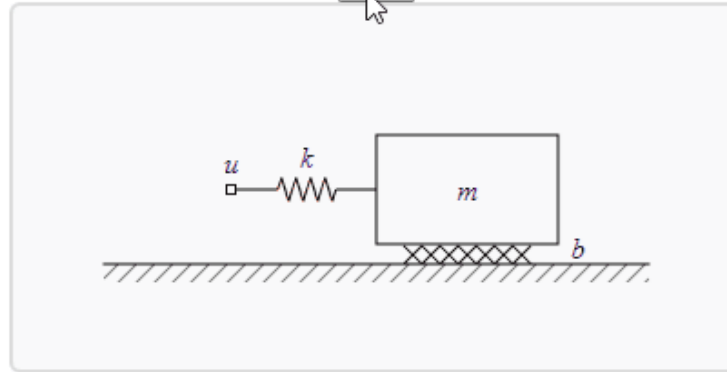
$$\begin{aligned}m &= 1 \text{ kg} \\b &= 0.5 \text{ Ns/m} \\k &= 1.6 \text{ N/m}\end{aligned}$$

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 = \frac{1.6}{1} = 1.6 \quad \frac{b}{m} = 2\zeta\omega_n = \frac{0.5}{1} = 0.5 \quad \frac{1}{k} = K = \frac{1}{1.6} = 0.625$$

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1.6}$$

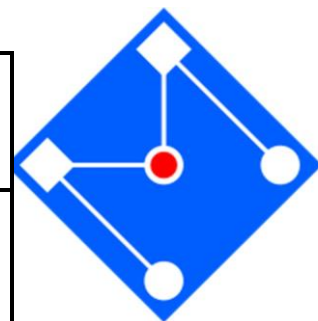
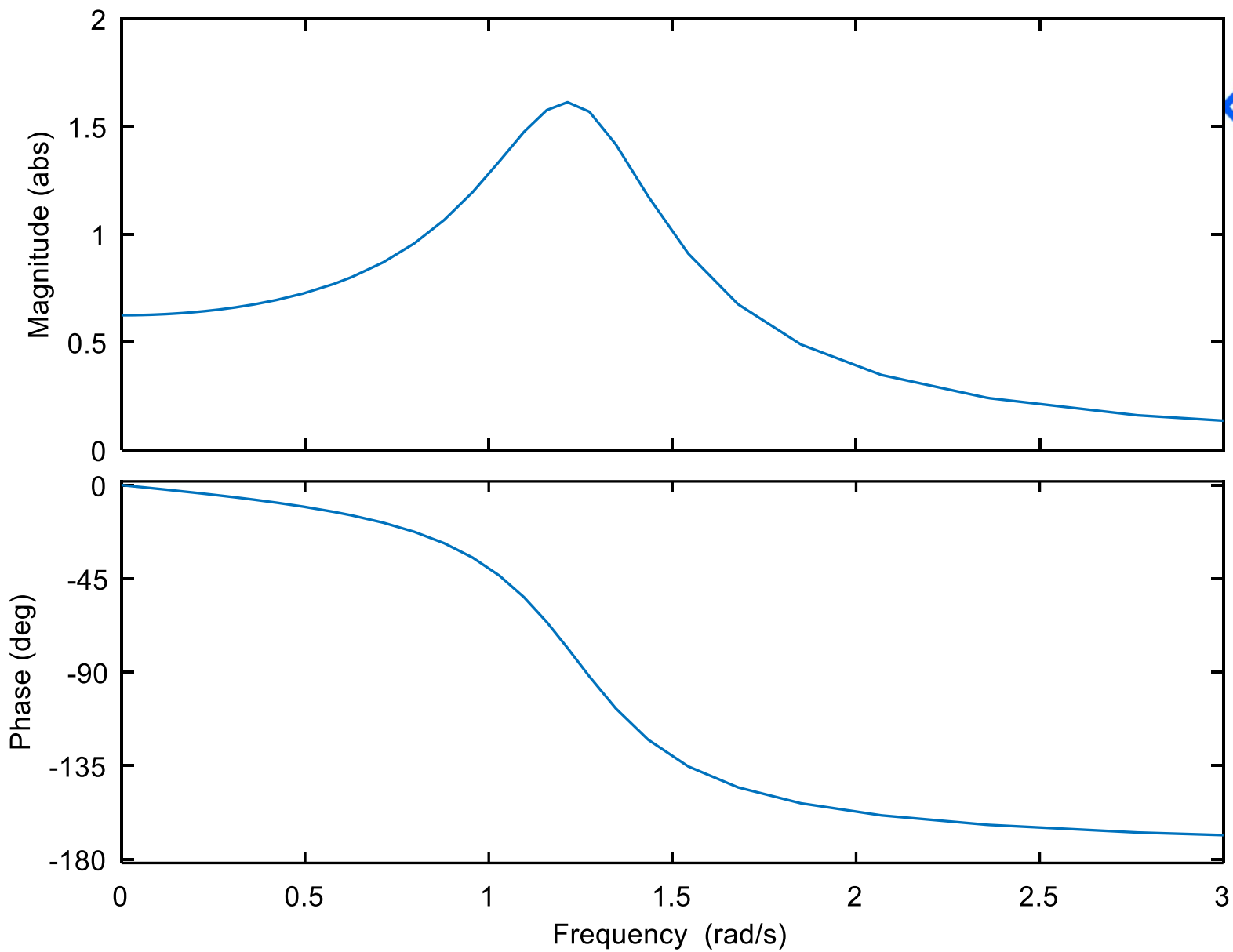
Click here for an animation of an analogous electrical system.

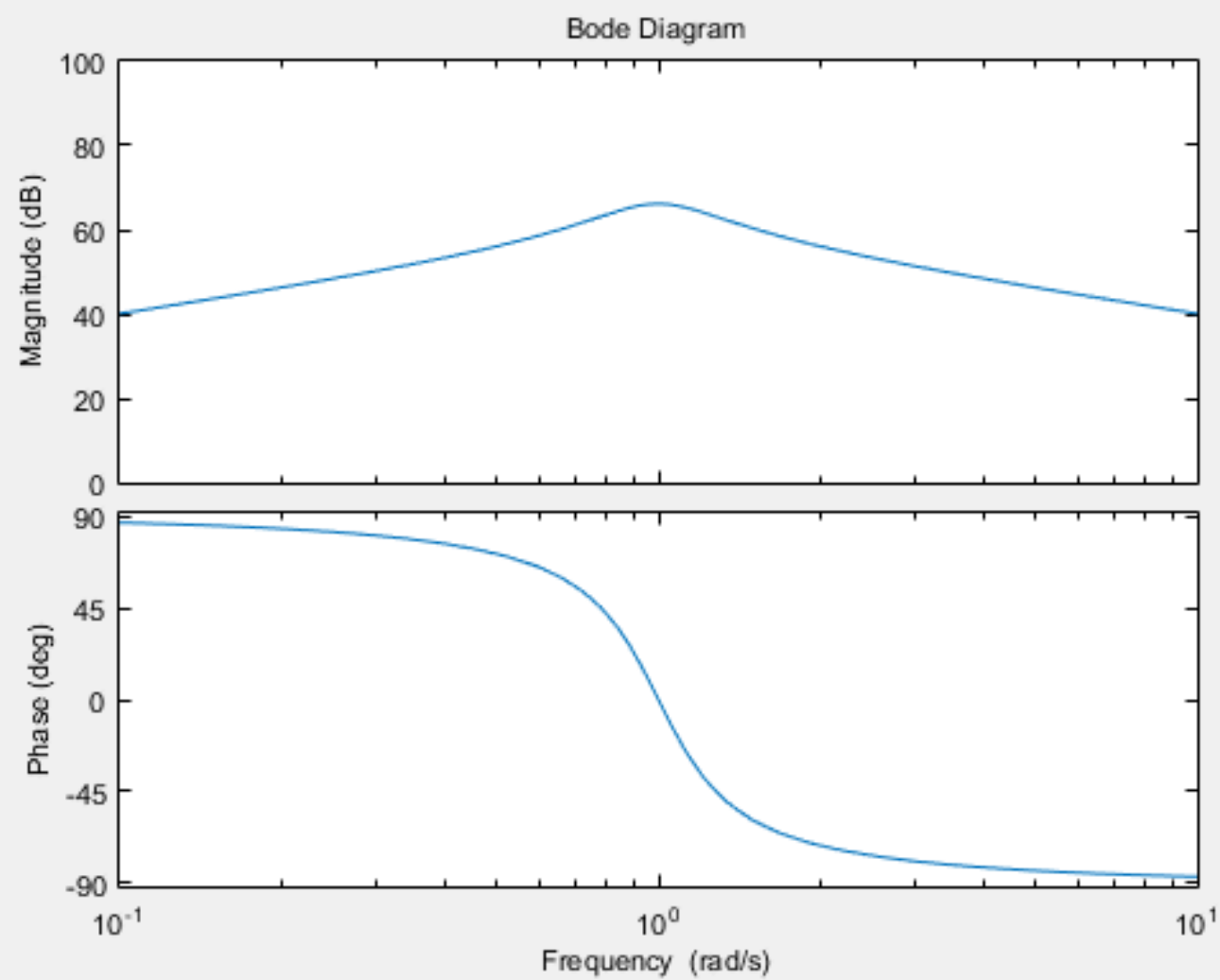
start



Animation by Ames Bielenberg

Bode Diagram





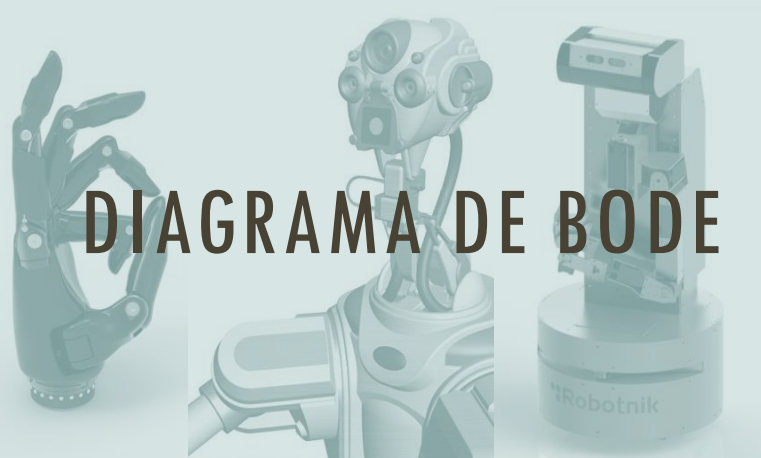
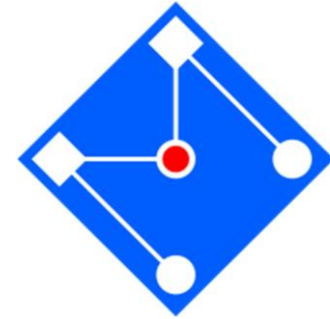


DIAGRAMA DE BODE

O que o diagrama representa????

BODE PLOTS



Os diagramas de **Bode** (de módulo e fase) são uma forma de caracterizar sinais no domínio da frequência.

Diagrama de Bode de **Módulo**

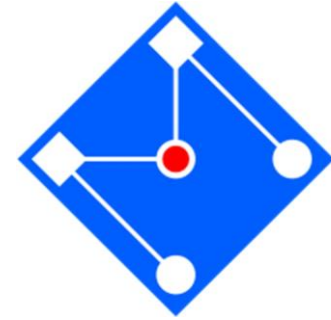
$|G(j\omega)|$ em dB $\times \omega$ (com escala logaritmica)

Diagrama de Bode de **Fase**

$\angle G(j\omega)$ em graus $\times \omega$ (com escala logaritmica)



Eng. Americano Hendrik Wade Bode
(1905-1982)



PÓLOS E ZEROS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

Equação Característica:

O polinômio $p(s)$ é chamado de *polinômio característico* de $G(s)$, ou o *polinômio característico* do sistema. A equação

$$p(s) = 0$$

é chamada de a “*equação característica*” do sistema.

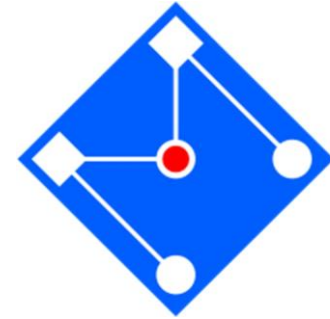
Pólos da função de transferência:

As raízes do *polinômio característico* são chamadas de *pólos* do sistema. Ou seja, os pólos são as soluções da *equação característica*.

Zeros da função de transferência:

As raízes do numerador de $G(s)$ são chamadas de *zeros* do sistema. Ou seja, os zeros são as soluções da equação $q(s) = 0$.

EXEMPLOS...



Defina os polos e zeros dos seguintes sistemas,

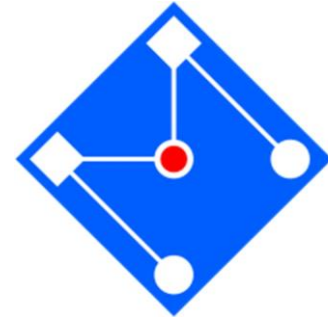
$$G(s) = \frac{2(s + 30)}{s(s + 2)(s^2 + 2s + 2)}$$

$$G(s) = \frac{10^5 s}{(s + 10)(s^2 + 100s + 10000)}$$

$$G(s) = \frac{5s^2}{(s + 10)^2(s + 10^4)(s - 8)}$$

FATORES BÁSICOS PARA CONSTRUÇÃO DE UM DIAGRAMA DE BODE

em S



O ganho de Bode, K

Os fatores integrativos (polos na origem) $\left(\frac{1}{s}\right)^n$

Os fatores derivativos (zeros na origem) s^n

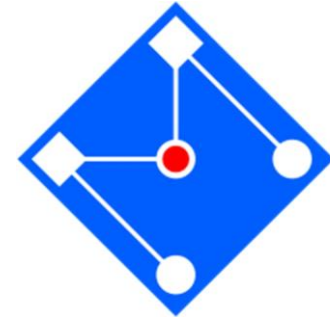
Fatores de primeira ordem tipo *polos reais* $\left(\frac{1}{\tau s + 1}\right)^n$

Fatores de primeira ordem tipo *zeros reais* $(\tau s + 1)^n$

Fatores de segunda ordem ou quadráticos tipo *polos complexos* $\left(\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}\right)^n$

Fatores de segunda ordem ou quadráticos tipo *zeros complexos* $\left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^n$

EXEMPLO

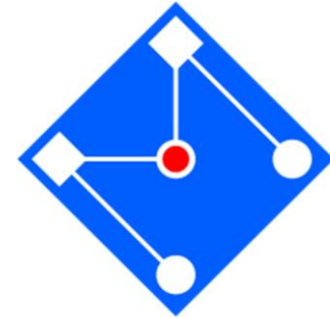


Escreva a função de transferência abaixo inteiramente em termos de fatores básicos,

$$G(s) = \frac{2(s + 30)}{s(s + 2)(s^2 + 2s + 2)}$$

FATORES BÁSICOS PARA CONSTRUÇÃO DE UM DIAGRAMA DE BODE

em $j\omega$



O ganho de Bode, K

Os fatores integrativos (polos na origem) $\left(\frac{1}{j\omega}\right)^n$

Os fatores derivativos (zeros na origem) $j\omega^n$

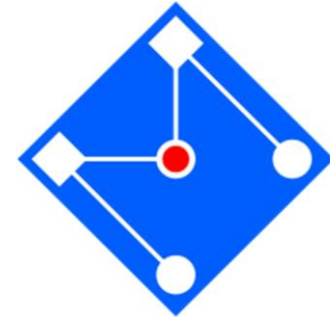
Fatores de primeira ordem tipo *polos reais* $\left(\frac{1}{j\omega\tau+1}\right)^n$

Fatores de primeira ordem tipo *zeros reais* $(\tau s + 1)^n$

Fatores de segunda ordem ou quadráticos tipo *polos complexos* $\left(\frac{1}{1+2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n}+\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}}\right)^n$

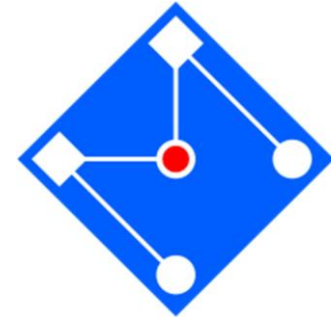
Fatores de segunda ordem ou quadráticos tipo *zeros complexos* $\left(1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right)^n$

EXEMPLO...



Escreva a função de transferência $G(s)$ abaixo na forma de fatores básicos em $j\omega$

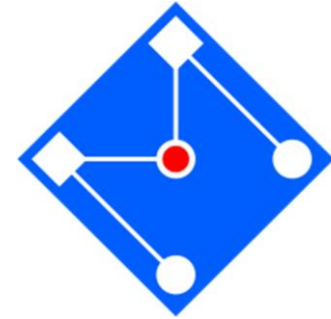
$$G(s) = \frac{2(s + 30)}{s(s + 2)(s^2 + 2s + 2)}$$



IDEIA...

Uma vez familiarizados com os gráficos dos diagramas de Bode dos fatores básicos que apresentados, é possível utilizá-los na construção dos diagramas de Bode das demais funções de transferência.

Portanto, agora vamos mostrar os diagramas de Bode (**módulo** e **fase**) para cada um dos fatores básicos vistos.



MSC – TU – dB

Miles of Standard Cable (MSC)

1 MSC correspondia à perda de potência ao longo de 1 milha (aproximadamente 1,6 km) de cabo telefônico padrão, a uma frequência de 5000 rad/s (795,8 Hz), que se aproximava da menor atenuação média detectável para o ouvido humano.

Transmission Unit (TU)

Em 1924, o *Bell Telephone Lab* recebeu uma resposta favorável à uma nova definição de unidade entre membros do Comitê Consultivo Internacional de Telefonia de Longa Distância na Europa e substituíram o MSC pela Unidade de Transmissão (TU).

1 TU foi definido de tal forma que o número de TUs era dez vezes o logaritmo base-10 da proporção de potência medida para um nível de potência de referência, $1 \text{ MSC} \cong 1.056 \text{ TU}$,

$$TU = 10 \log \left(\frac{P_0}{P_i} \right)$$

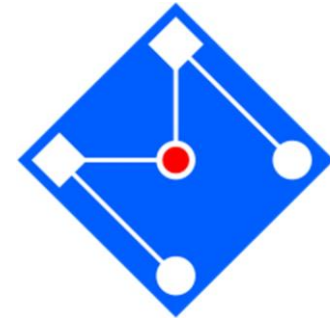
Decibel (dB)

Em 1928, em homenagem ao pioneiro de telecomunicações Alexander Graham Bell, o *Bell Telephone Lab* renomeou a TU para decibel. Em termos de potência,

$$\text{Ganho (dB)} = 10 \log \left(\frac{P_0}{P_i} \right)$$

Em termos de voltagem,

$$\text{Ganho (dB)} = 20 \log \left(\frac{V_0}{V_i} \right)$$



VALORES COMUNS...

$$20 \log_{10} \sqrt{2} \cong 3 \text{ dB}$$

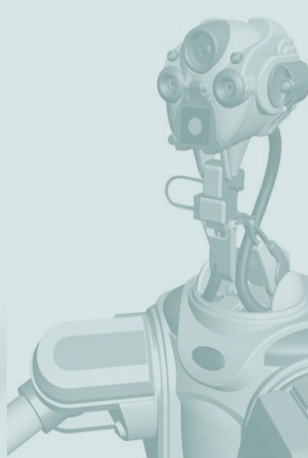
$$20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} \cong -3 \text{ dB (half power = } 10 \log_{10} \frac{1}{2})$$

$$20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB}$$

$$20 \log_{10} 100 = 40 \text{ dB}$$

20 dB para cada fator de 10
na potência

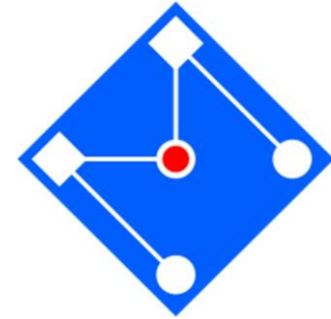
Um número maior que uma unidade apresenta um valor positivo em dB, enquanto um número menor que a unidade apresenta valor negativo.



GANHO



K



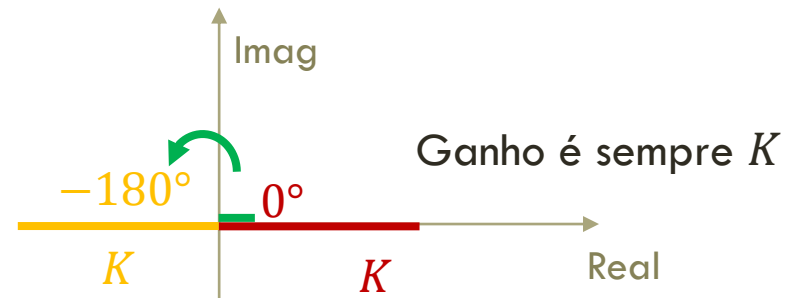
O GANHO K

Como $G(j\omega) = K$ é uma constante (não varia com ω),

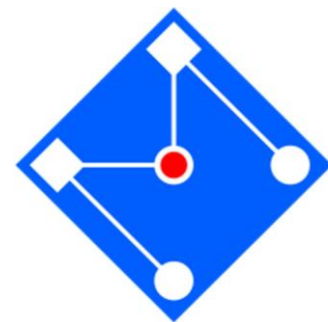
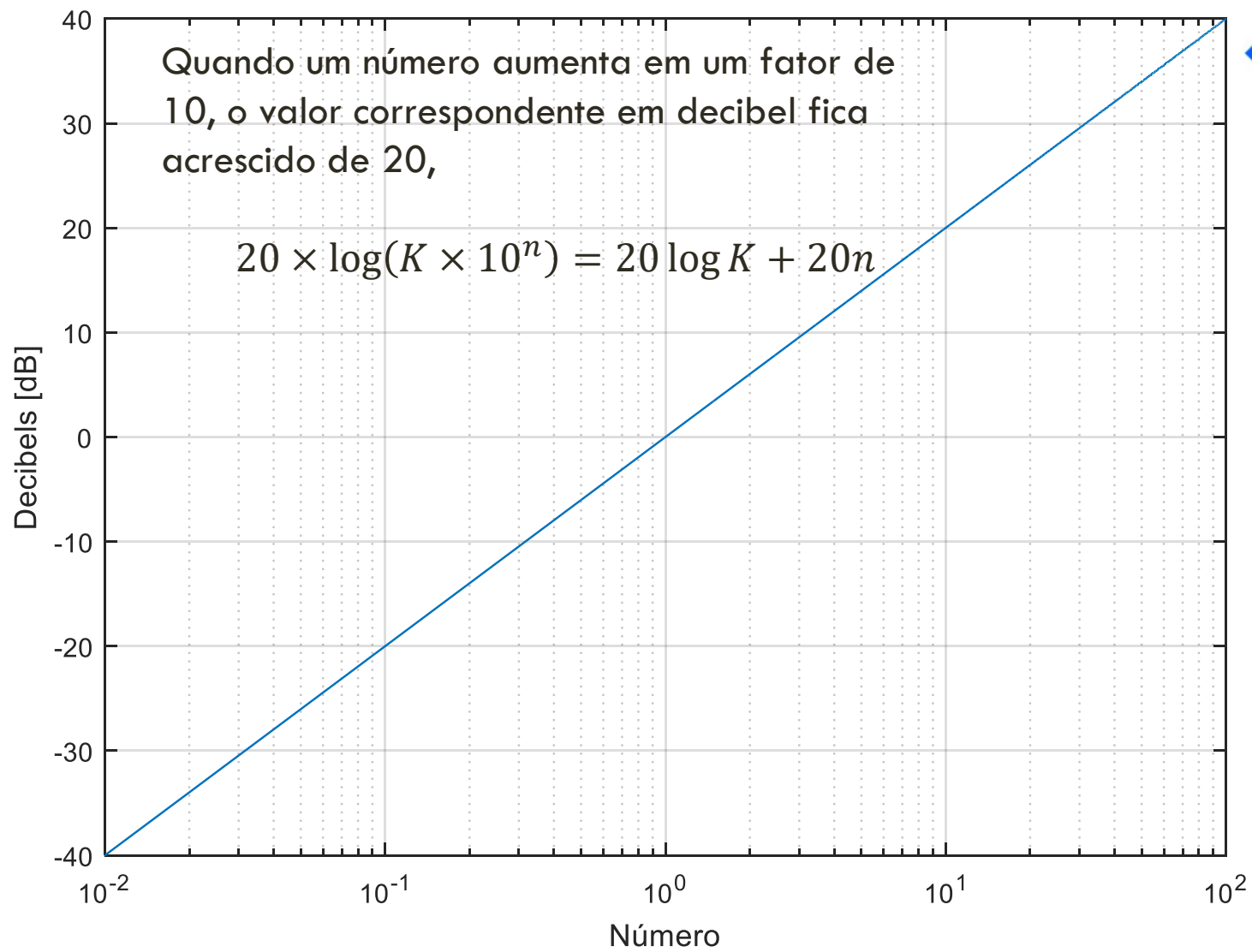
$$|K|_{dB} = 20 \log|K|$$

$$\angle K = 0^\circ \text{ para } K > 0$$

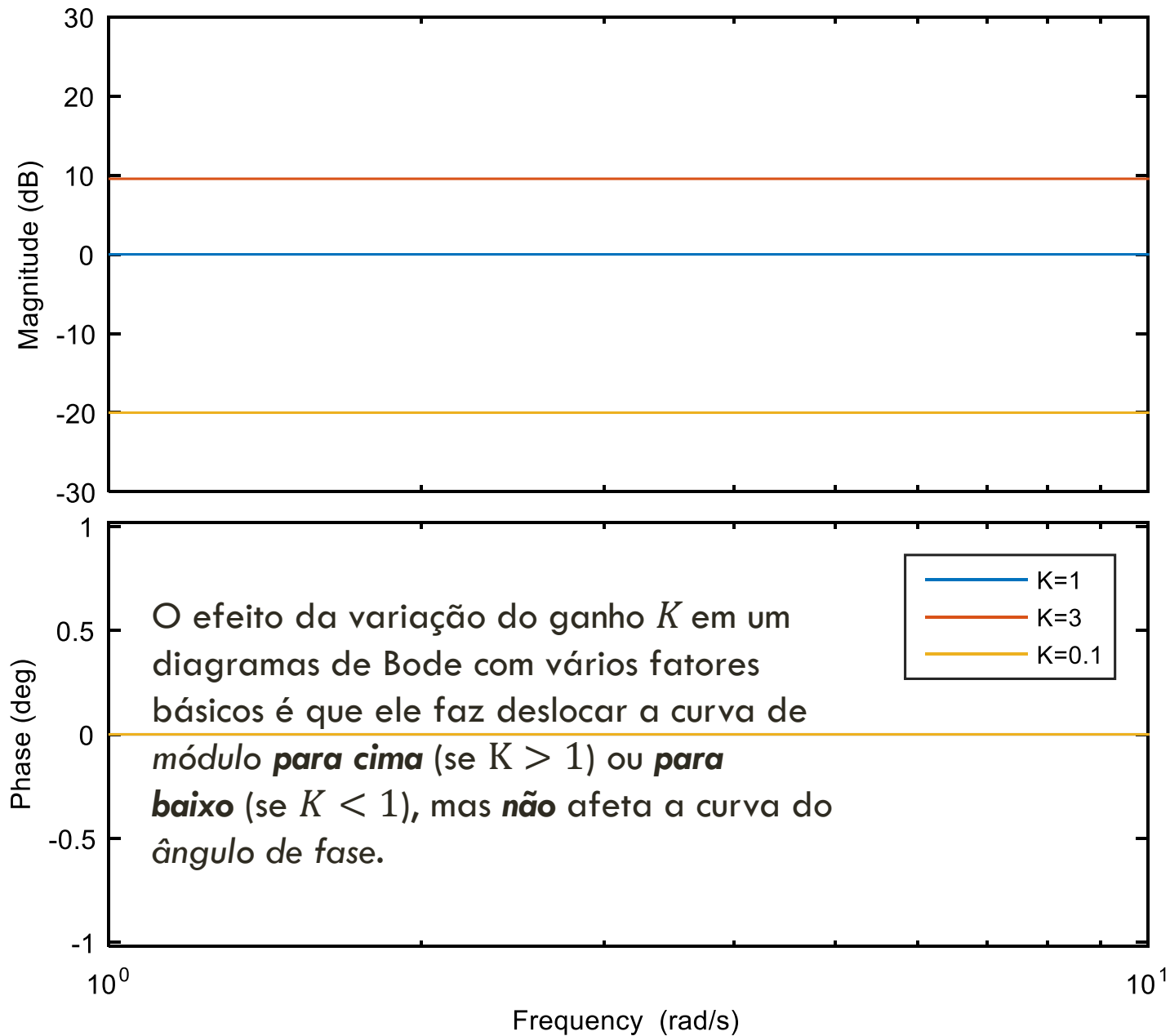
$$\angle K = -180^\circ \text{ para } K < 0$$



A curva de módulo em dB de um ganho constante K é uma reta de valor $20 \log|K|$ dB.



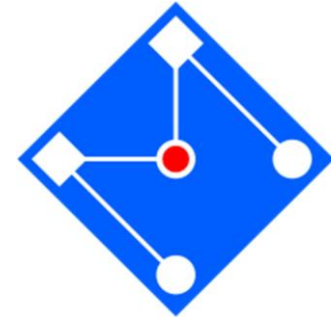
Bode Diagram





FATORES INTEGRAL E DERIVATIVO

$$(j\omega)^{\pm 1}$$



FATOR INTEGRAL

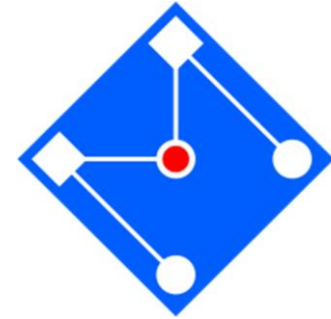
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB}$$
$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} = -\angle \frac{j}{\omega} = -90^\circ$$

No diagrama de Bode as relações entre as frequências são dadas em termos de oitavas ou décadas:

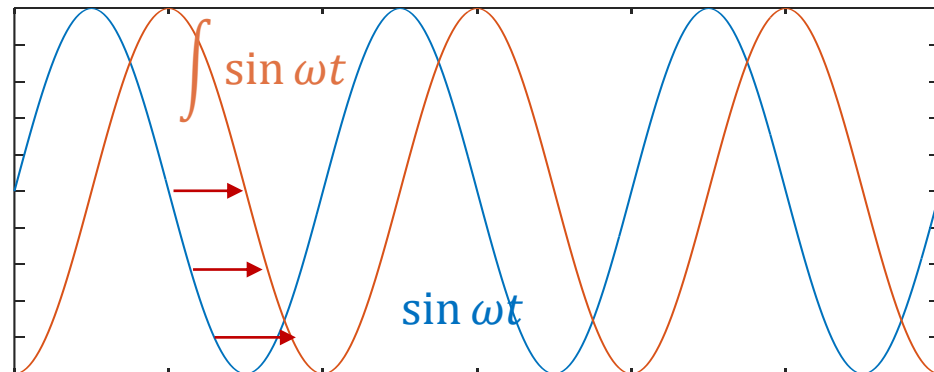
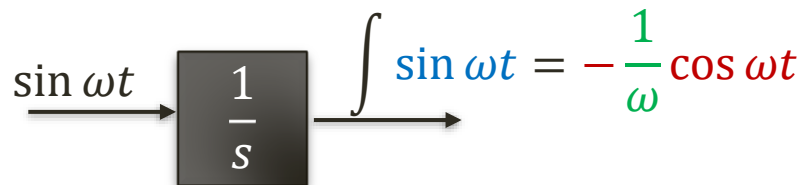
- Uma oitava é um intervalo compreendido entre ω e 2ω .
- Uma década é um intervalo compreendido entre ω e 10ω .

ω é qualquer valor de frequência (lembre-se que na escala logaritmica, qualquer relação de frequência dada pode ser representada pela mesma distância horizontal)..



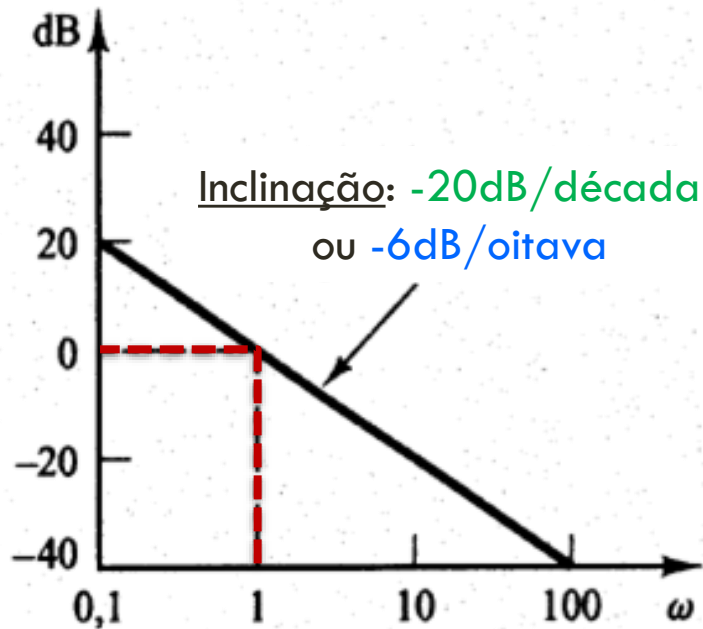
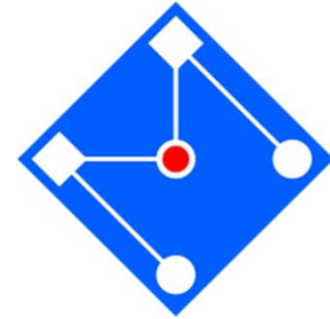
ESSA RESPOSTA É ESPERADA DE UM SISTEMA INTEGRAL...

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = 20 \log \frac{1}{\omega} \text{ dB}$$
$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} = -\angle \frac{j}{\omega} = -90^\circ$$



90°

$\omega = 1$



$$G(j\omega) = -20 \log \omega \text{ dB}$$

$$|G(j\omega)| = 0 \text{ em } \omega = 1$$

$$\text{para } \omega = 0,01 \quad G(j\omega) = 40 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 0,10 \quad G(j\omega) = 20 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 1,00 \quad G(j\omega) = 0 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 10,0 \quad G(j\omega) = -20 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 100 \quad G(j\omega) = -40 \text{ dB}$$

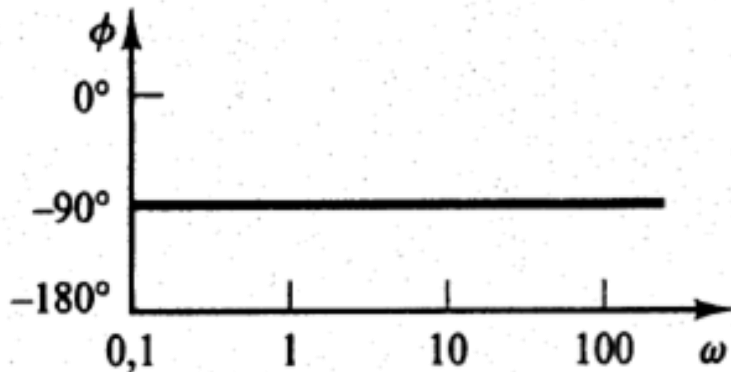


Diagrama de Bode
de $G(j\omega) = 1/j\omega$

(Ogata)

$$\text{para } \omega = 0,5 \quad G(j\omega) = 6,0206 \cong 6 \text{ dB}$$

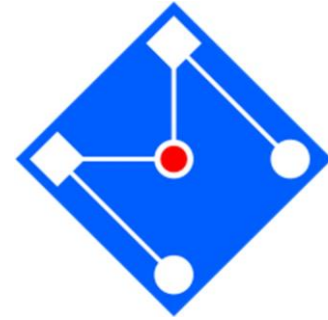
$$\text{para } \omega = 1,0 \quad G(j\omega) = 0 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 2,0 \quad G(j\omega) = -6,0206 \cong -6 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 4,0 \quad G(j\omega) = -12,0412 \cong -12 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 8,0 \quad G(j\omega) = -18,0618 \cong -18 \text{ dB}$$

FATOR DERIVATIVO $G(j\omega) = j\omega$



$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ dB}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle j\omega = 90^\circ$$

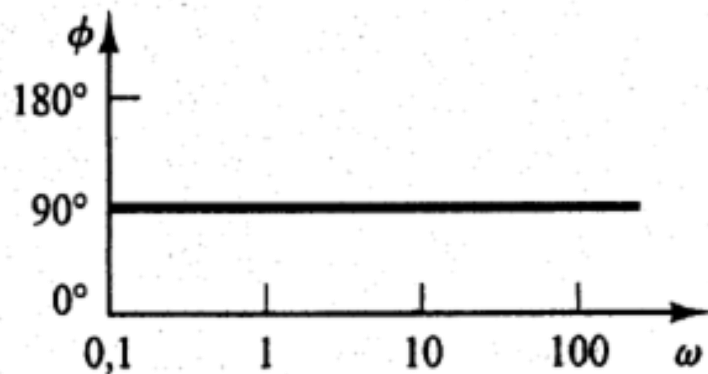
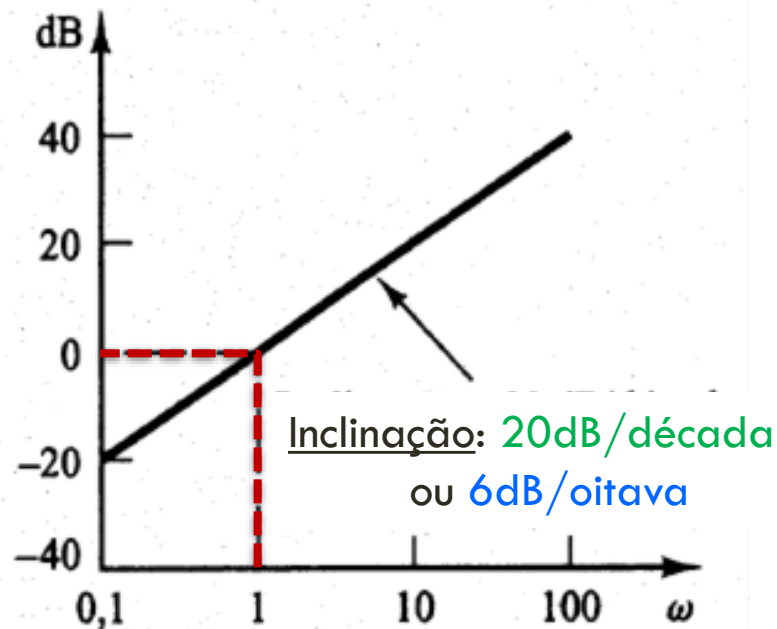


Diagrama de Bode
de $G(j\omega) = j\omega$



$$G(j\omega) = 20 \log \omega \text{ dB}$$

$$|G(j\omega)| = 0 \text{ em } \omega = 1$$

$$\text{para } \omega = 0,10 \quad G(j\omega) = -20 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 1,00 \quad G(j\omega) = 0 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 10,0 \quad G(j\omega) = 20 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 100 \quad G(j\omega) = 40 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 0,5 \quad G(j\omega) = -6,0206 \cong -6 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 1,0 \quad G(j\omega) = 0 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 2,0 \quad G(j\omega) = 6,0206 \cong 6 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 4,0 \quad G(j\omega) = 12,0412 \cong 12 \text{ dB}$$

$$\text{para } \omega = 8,0 \quad G(j\omega) = 18,0618 \cong 18 \text{ dB}$$

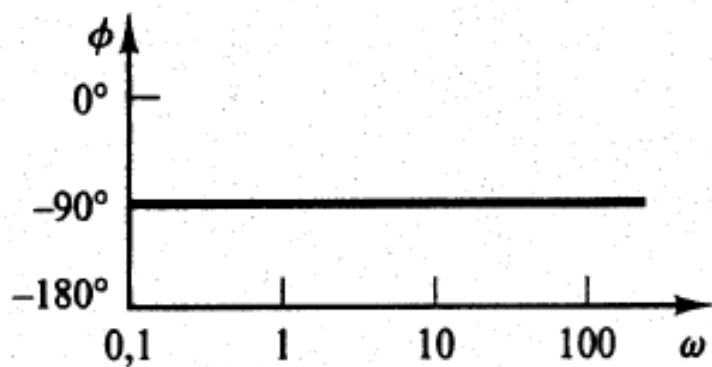
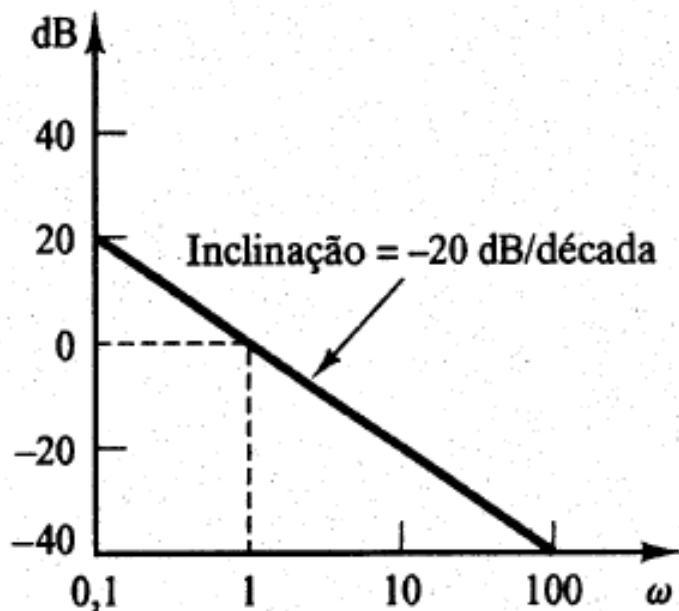


Diagrama de Bode
de $G(j\omega) = 1/j\omega$

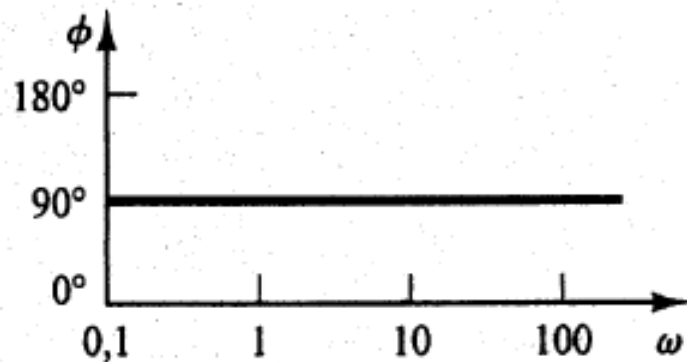
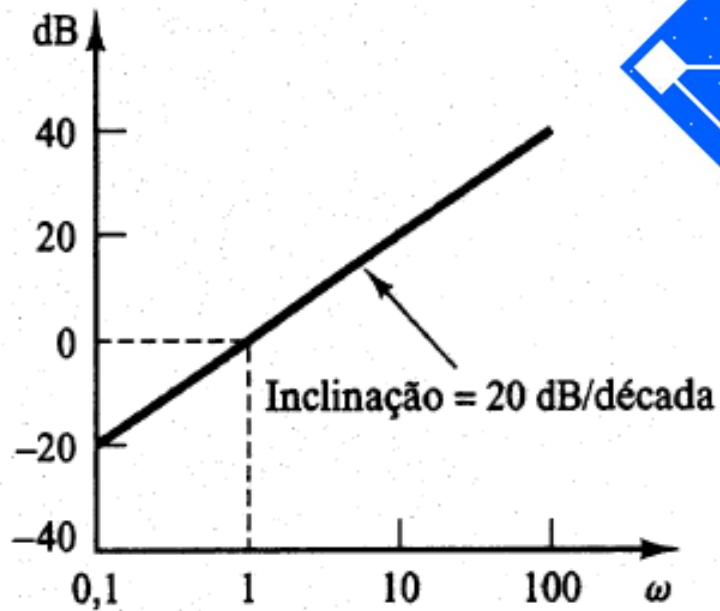
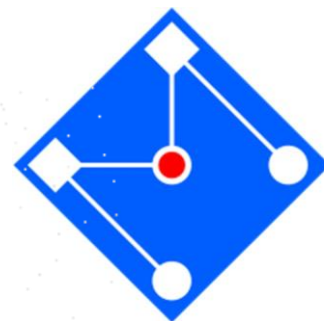
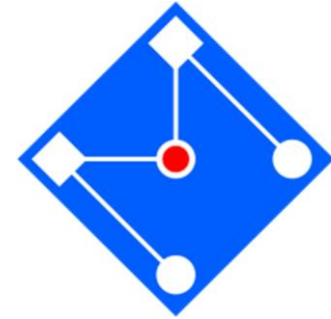


Diagrama de Bode
de $G(j\omega) = j\omega$





FATORES INTEGRAL E DERIVATIVO

$$(j\omega)^{\pm n}$$

Se a função de transferência possuir o fator $(1/j\omega)^n$ ou $(j\omega)^n$, as grandezas logarítmicas se tornarão respectivamente:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \left(\frac{1}{j\omega} \right)^n \right| = n \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20n \log \omega \text{ dB}$$

ou

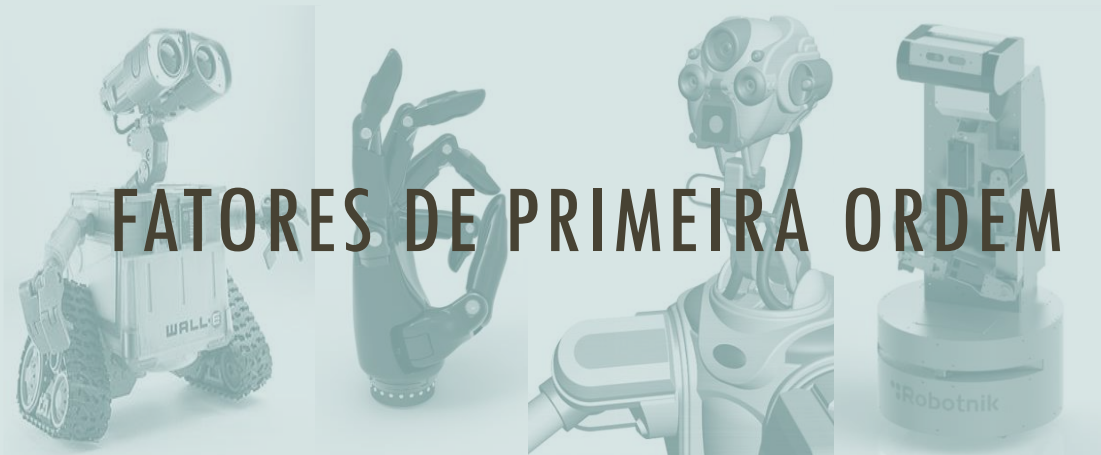
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |(j\omega)^n| = n \log |j\omega| = 20n \log \omega \text{ dB}$$

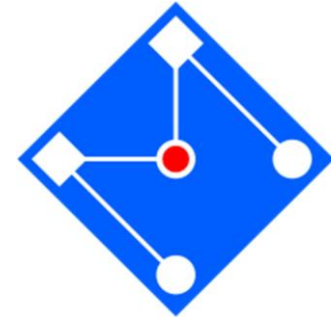
As inclinações passam a ser respectivamente $-20n$ dB/década ou $20n$ dB/década

O ângulo de fase de $(1/j\omega)^n$ é igual a $-90n$ em toda a faixa de frequência, enquanto que o de $(j\omega)^n$ é igual a $90n$ em toda a faixa de frequência.

FATORES DE PRIMEIRA ORDEM

$$(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$$





FATOR POLO DE PRIMEIRA ORDEM

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

O módulo em dB para o fator de pólo de primeira ordem é:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \text{ dB}$$

Para baixas frequências, $\omega \ll 1/\tau$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \cong -20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Para $\omega = 1/\tau$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{2} \cong -3 \text{ dB}$$

Para altas frequências, $\omega \gg 1/\tau$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \cong -20 \log \omega\tau \text{ dB}$$

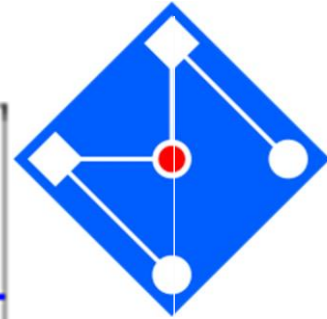
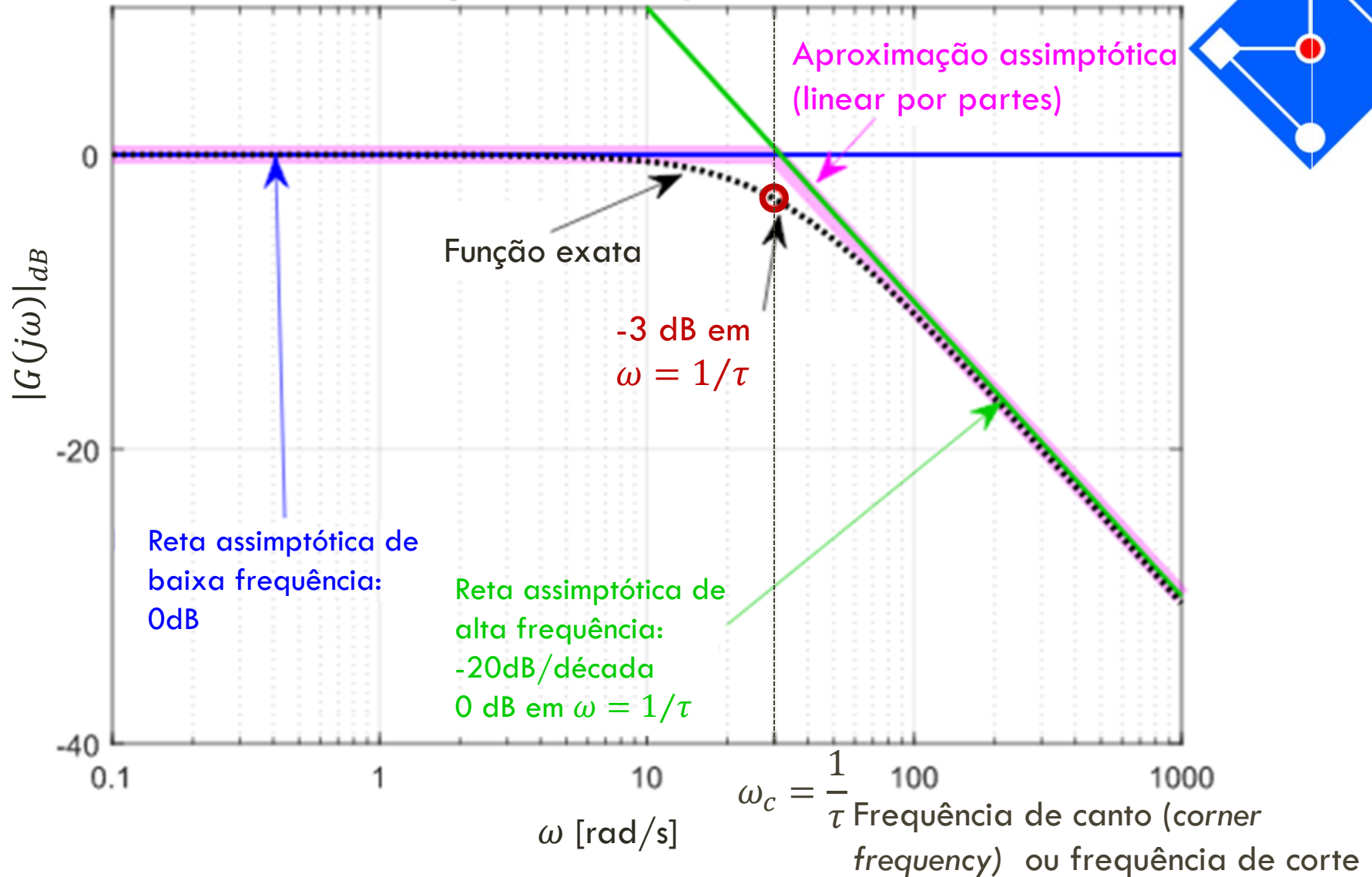
$$\omega = 1/\tau \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB}$$

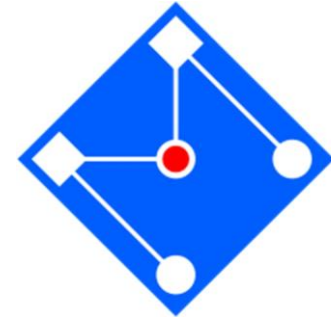
$$\omega = 10/\tau \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20 \text{ dB}$$



Decresce em 20 dB para cada década de ω

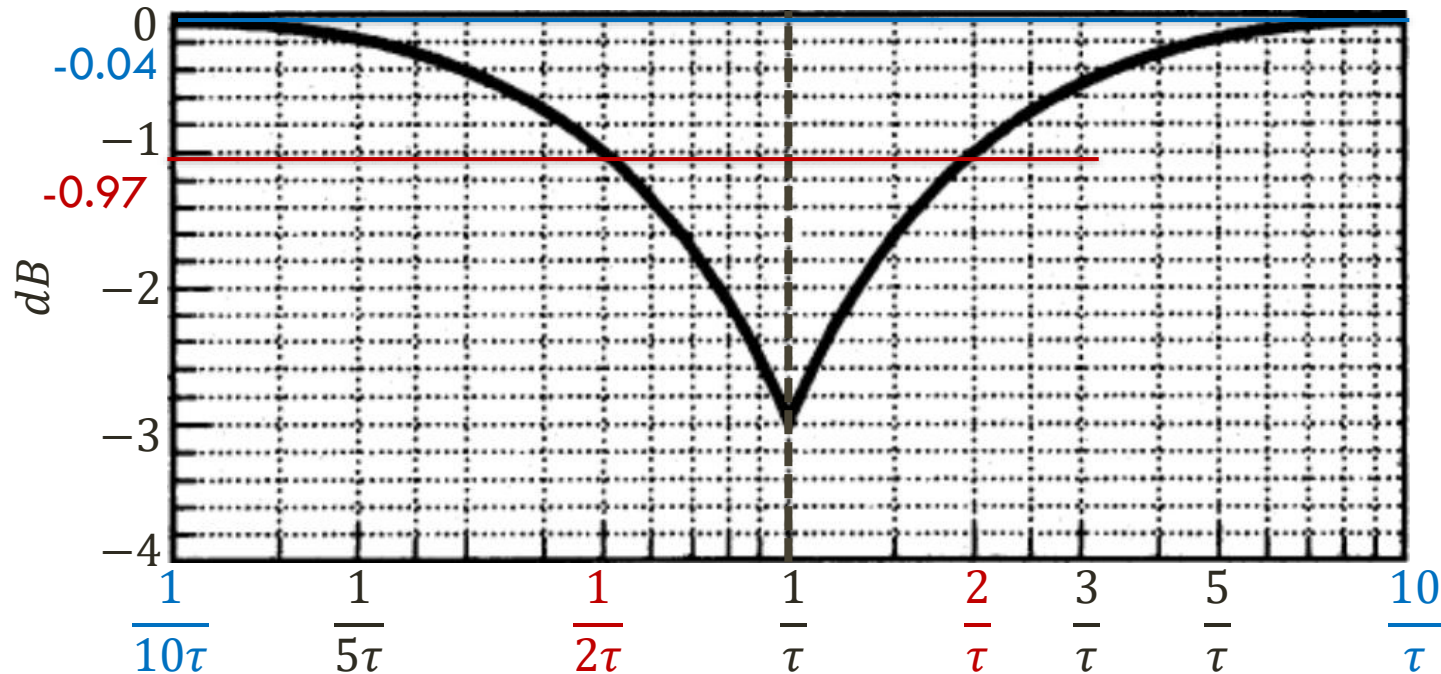
Magnitude of Simple Real Pole





ERRO DO MODULO, EM DB, NO USO DA SIMPLIFICAÇÃO BILINEAR

Frequência de corte



Uma década
abaixo da
frequência de
corte...

Uma oitava abaixo ...

ω

Uma oitava acima ...

Uma década
acima da
frequência de
corte...

FATOR POLO DE PRIMEIRA ORDEM

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$



A fase para o fator pólo de primeira ordem é:

$$\angle G(j\omega) = \angle \left(\frac{1}{1 + j\omega\tau} \right) = -\angle(1 + j\omega\tau) = -\text{atan } \omega\tau$$

Para baixas frequências, $\omega \ll 1/\tau$

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan } 0 = 0^\circ$$

Para $\omega = 1/\tau$

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan } 1 = 45^\circ$$

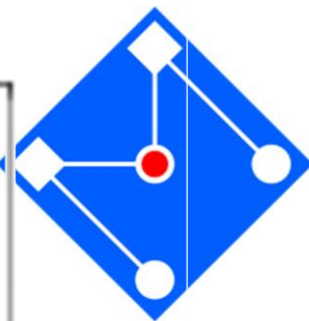
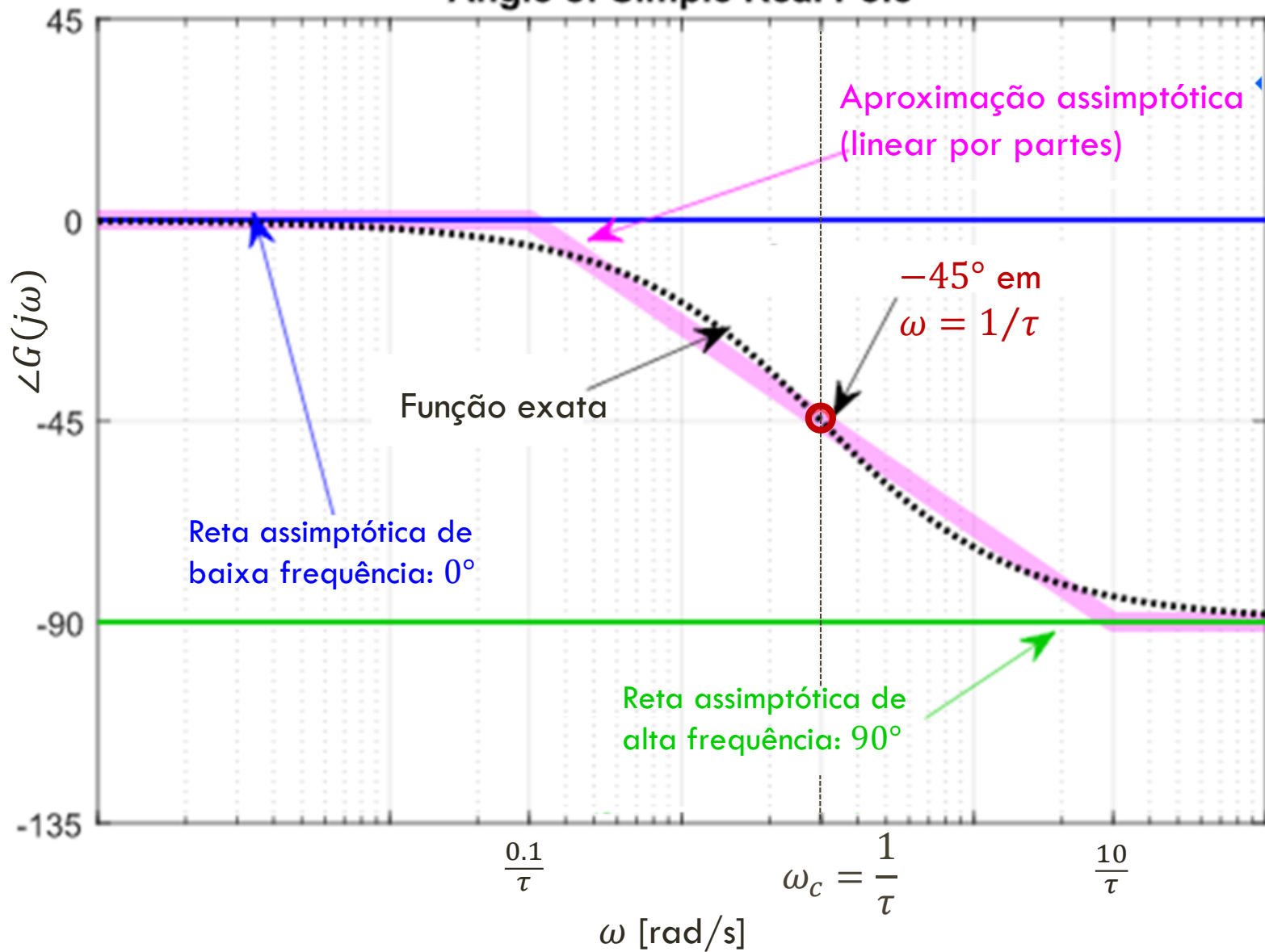
Para altas frequências, $\omega \gg 1/\tau$

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan } \infty = -90^\circ$$

$$10^{-1}/\tau < \omega < 10/\tau$$

$$\angle G(j\omega) = -\text{atan } \omega\tau$$

Angle of Simple Real Pole



FATOR ZEROS DE PRIMEIRA ORDEM

$$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

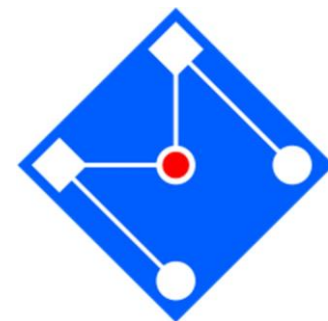
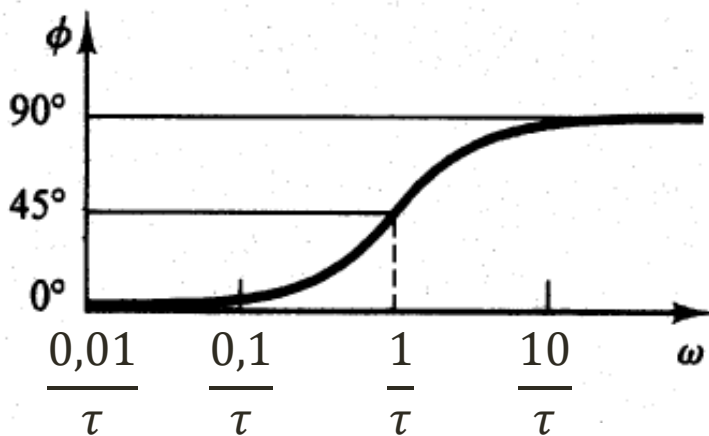
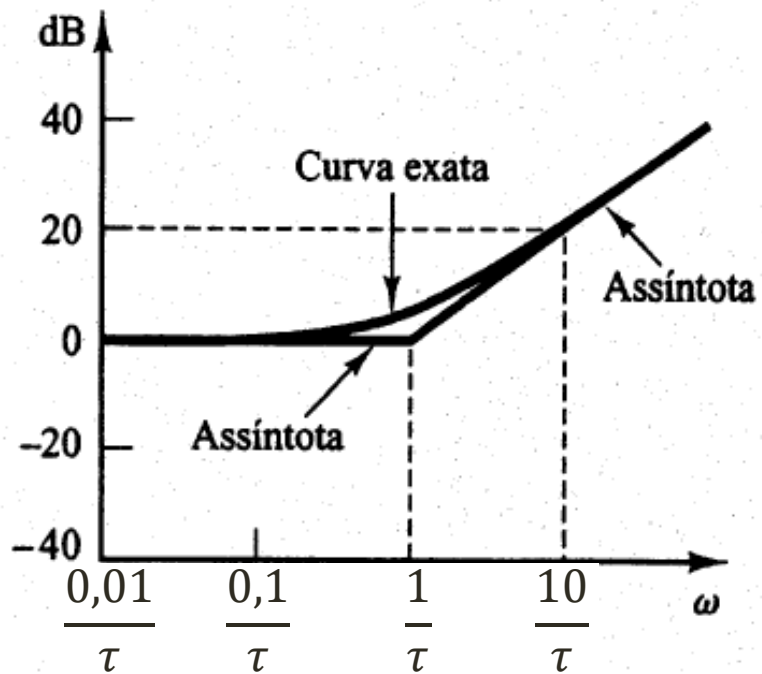


O módulo em dB para o fator de primeira ordem $(1 + j\omega\tau)$ é:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log|1 + j\omega\tau| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \text{ dB}$$

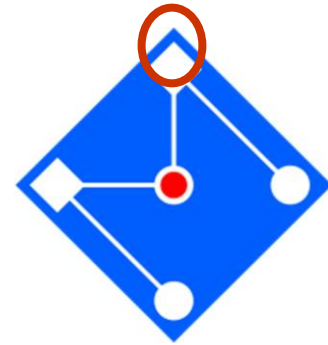
A fase para o fator de primeira ordem $(1 + j\omega\tau)$ é:

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega\tau) = \text{atan } \omega\tau$$



FATORES DE PRIMEIRA ORDEM

$$G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm n}$$



A frequência de canto ainda está em $\omega = \frac{1}{\tau}$

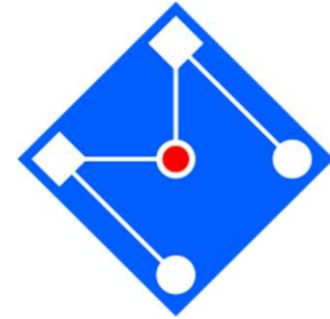
A assíntota de baixa frequência é uma reta em 0 dB.

A ssíntota de alta frequência tem inclinação de $-20n$ dB/década ou $20n$ dB/década

O erro envolvido nas expressões assintóticas é n vezes o erro correspondente a $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$

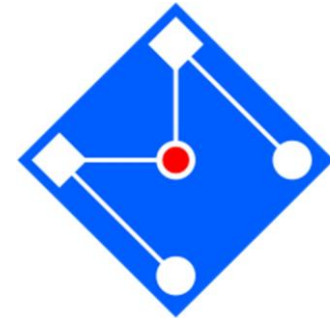
O ângulo de fase é n vezes o erro correspondente a $G(j\omega) = (1 +$

DIAGRAMA DE BODE PASSO A PASSO



Vamos desenhar passo a passo o Diagrama de Bode para seguinte função de transferência,

$$H(s) = 100 \frac{s + 1}{s^2 + 110s + 1000}$$



PASSOS 1 E 2

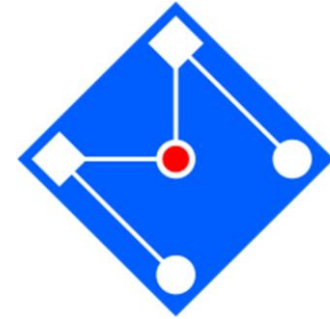
1. Reescreva a função de transferência na forma adequada

$$H(s) = 100 \frac{(s + 1)}{(s + 10)(s + 100)} = 0,1 \frac{\frac{s}{1} + 1}{\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

2. Separe a função de transferência em seus fatores básicos. Existem 7 fatores básicos: constantes, pólos na origem, zeros na origem, pólos reais, zeros reais, pólos complexos conjugados, zeros complexos conjugados. Particularmente nossa função tem

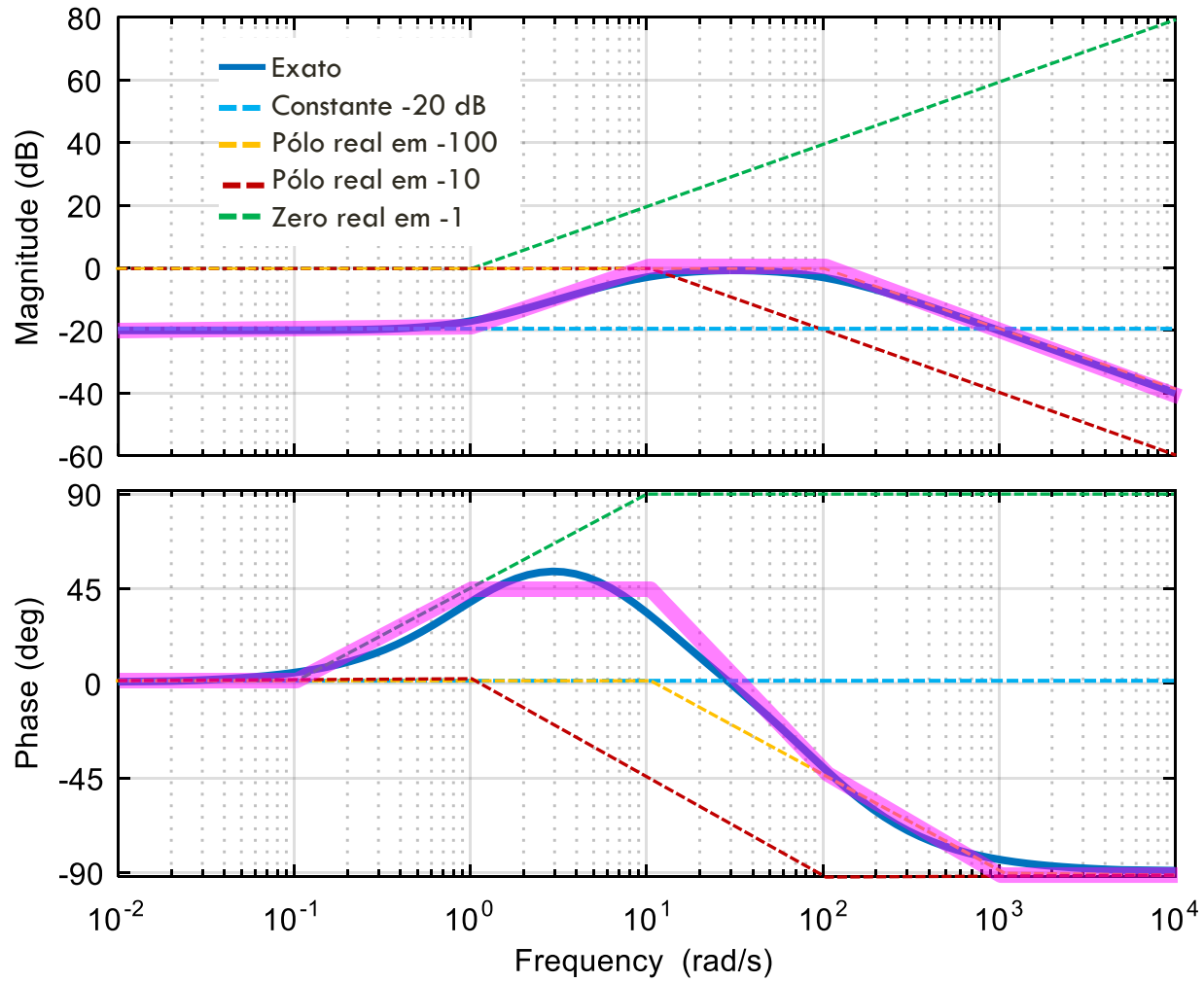
- uma constante 0,1;
- um zero em $s = -1$, constante de tempo $\tau = 1$;
- um pólo em $s = -10$, constante de tempo $\tau = 1/10$;
- um pólo em $s = -100$, constante de tempo $\tau = 1/100$.

PASSO 3

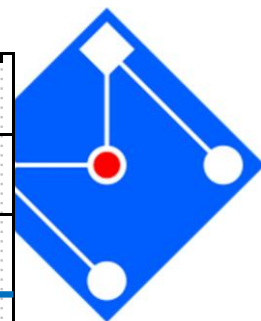
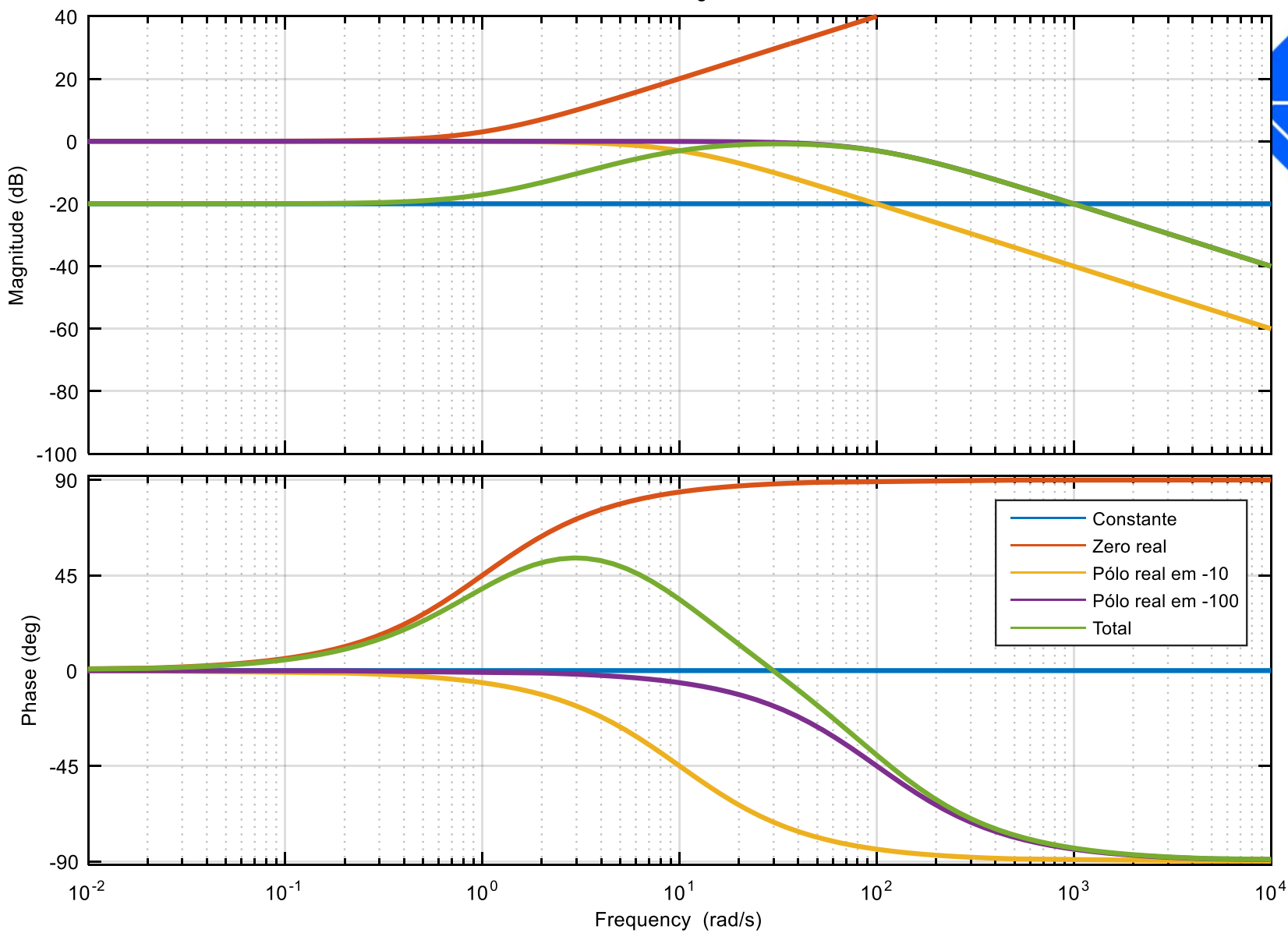


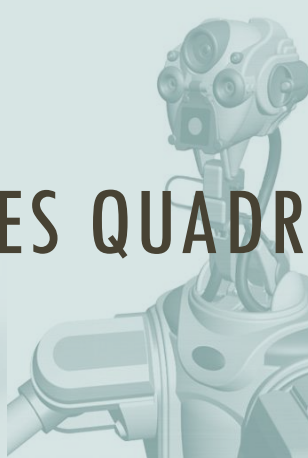
Fator básico	Parâmetros	Módulo	Fase
Constante	$K = 0,1$	$ K _{dB} = 20 \log 0,1 = -20 \text{ dB}$	$\angle K = 0^\circ$
Zero real	$\tau = 1$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em +20dB/década Conexão das assintóticas em $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$	Baixas frequências: assintótica em 0° Altas frequências: assintótica em $+90^\circ$ Conexão linear das assintóticas de $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ até $\omega = 10 \text{ rad/s}$
Pólo real	$\tau = \frac{1}{10}$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em -20dB/década Conexão das assintóticas em $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$	Baixas frequências: assintótica em 0° Altas frequências: assintótica em $+90^\circ$ Conexão linear das assintóticas de $\omega = 1 \text{ rad/s}$ até $\omega = 100 \text{ rad/s}$
Pólo real	$\tau = \frac{1}{100}$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em -20dB/década Conexão das assintóticas em $\omega_c = 100 \text{ rad/s}$	Baixas frequências: assintótica em 0° Altas frequências: assintótica em $+90^\circ$ Conexão linear das assintóticas de $\omega = 10 \text{ rad/s}$ até $\omega = 1000 \text{ rad/s}$

Bode Diagram



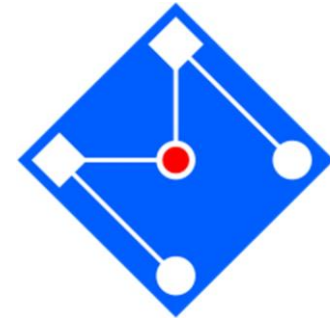
Bode Diagram





FATORES QUADRÁTICOS

$$\left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\pm n}$$



FATORES PÓLOS QUADRÁTICOS

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}$$

Pólos complexos $0 \leq \zeta < 1$

Produto de dois fatores complexos conjugados.

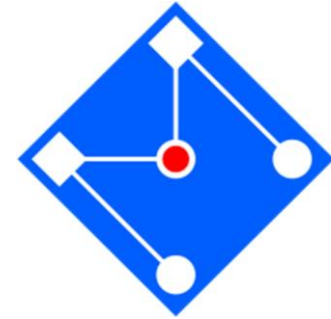
Pólos duplos $\zeta = 1$

Pólos duplos

Pólos reais distintos $\zeta > 1$

Expresso como um produto de dois fatores de primeira ordem com pólos reais.

Casos já
cobertos nos
fatores
básicos
anteriores.



FATOR PÓLO QUADRÁTICO

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^n}$$

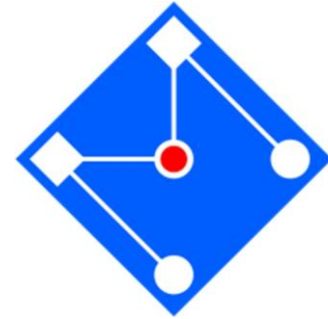
O módulo em dB para o fator pólo quadrático é:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{\left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^n} \right|$$

$$= -20n \log \left| 1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \right|$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



Para baixas frequências, $\omega \ll \omega_n$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20n \log \sqrt{1 + 0} \cong -20n \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Para altas frequências, $\omega \gg \omega_n$

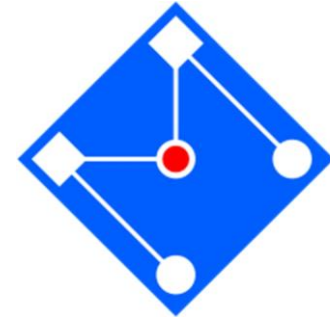
$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4} \cong -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB}$$

A assintótica de alta
frequência cruza a de
baixa frequência em
 $\omega = \omega_n$

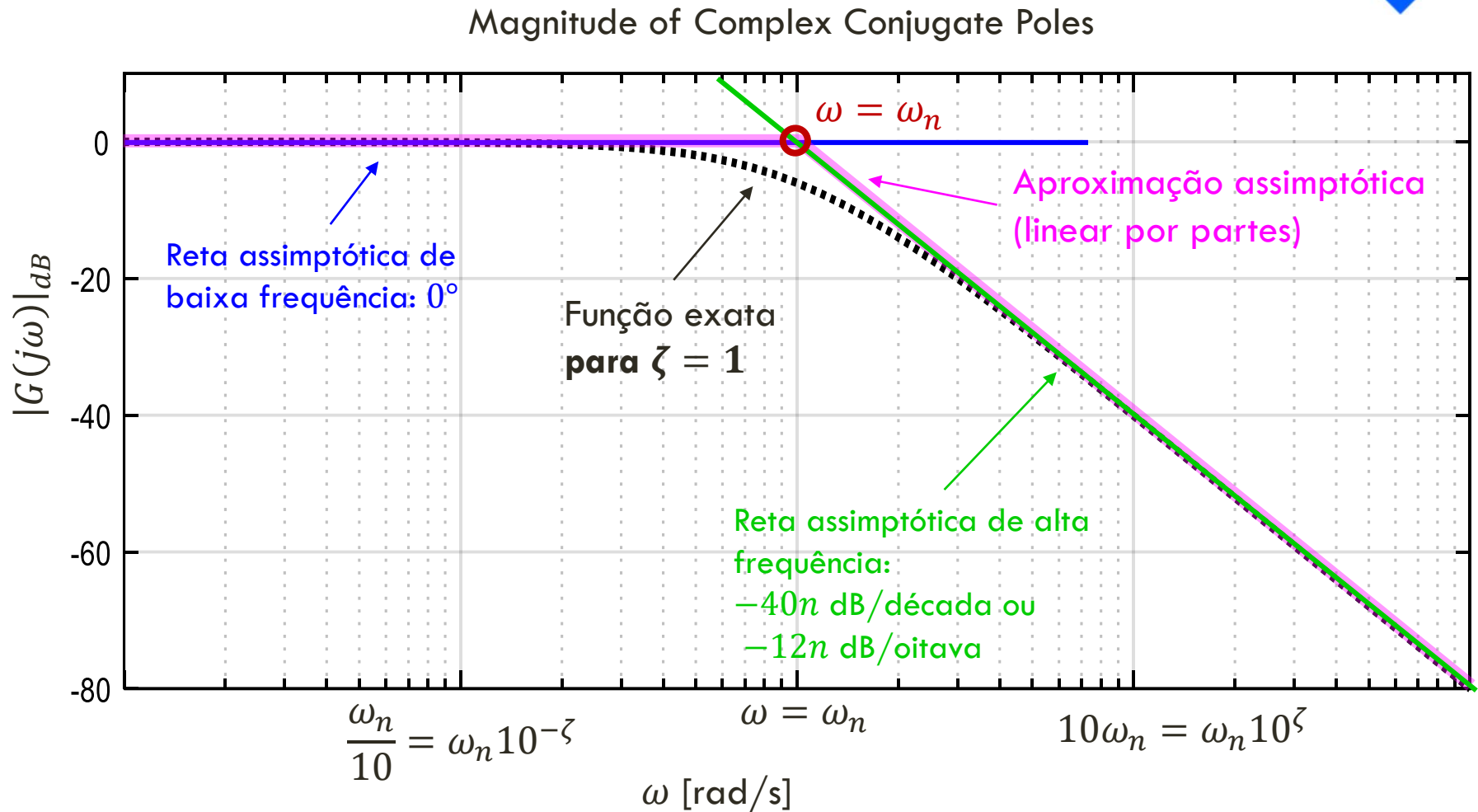
Para $\omega = \omega_n$

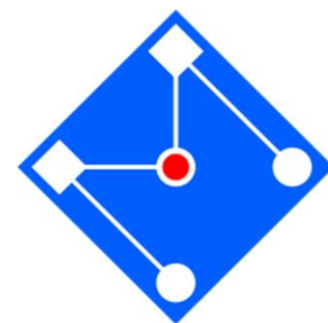
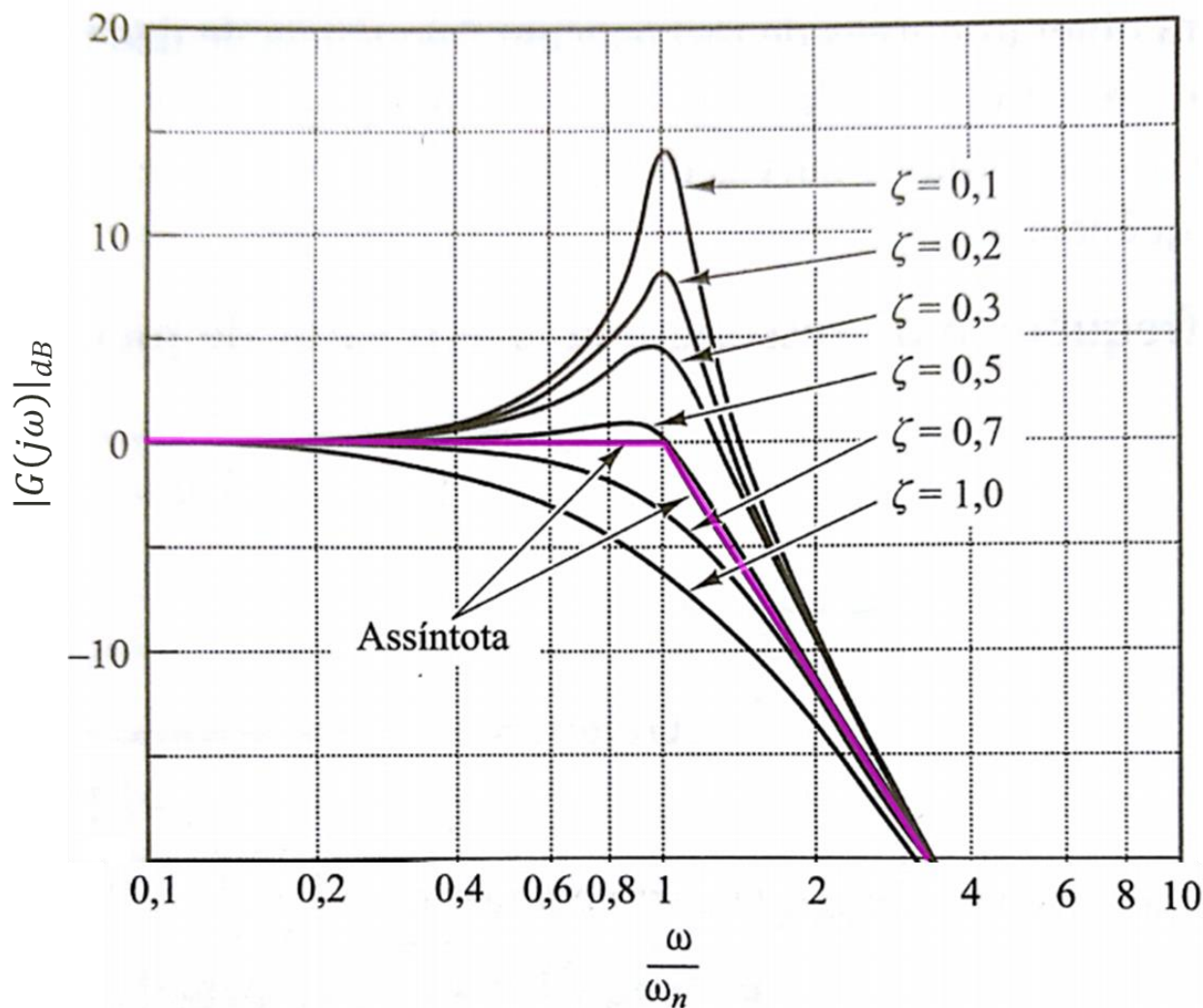
$$|G(j\omega)|_{dB} = -40 \log 1 = 0 \text{ dB}$$





Nas proximidades da frequência natural ω_n as assintóticas apenas aproximam da curva real de $|G(j\omega)|_{dB}$, apresentando um erro máximo de $\approx 6n$ dB que ocorre exatamente na frequência de corte ω_n , o ponto onde as duas assintóticas se encontram.





Amplitude do erro em relação às assintóticas dependerá do valor de ζ . Pequenos valores de ζ levam a erros maiores.

A medida que o valor de ζ diminui, as curvas de $|G(j\omega)|_{dB}$ vão ficando mais altas. E, a partir de $\zeta = \sqrt{2}/2$, surgem picos, que vão se tornando cada vez mais altos a medida que $\zeta \rightarrow 0$.

Esses picos ocorrem nas chamadas frequências de ressonância $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

FATOR PÓLO QUADRÁTICO

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^n}$$

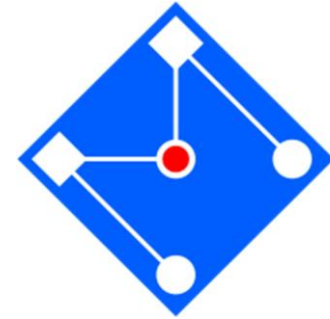


A fase para o fator pólo quadrático é:

$$\angle G(j\omega) = \angle \left(\frac{1}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} \right)^n = -\angle \left(1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \right)^n$$

$$\angle G(j\omega) = -n \operatorname{atan} \left[\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right]$$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan} \left[\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right]$$



Para baixas frequências, $\omega \ll \omega_n$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan} 0 = 0^\circ$$

Para $\omega = \omega_n$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan} \infty = -90^\circ$$

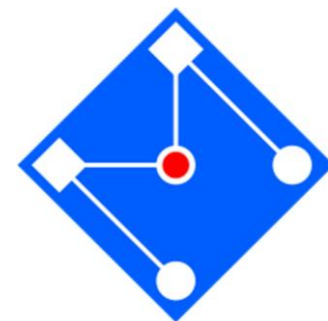
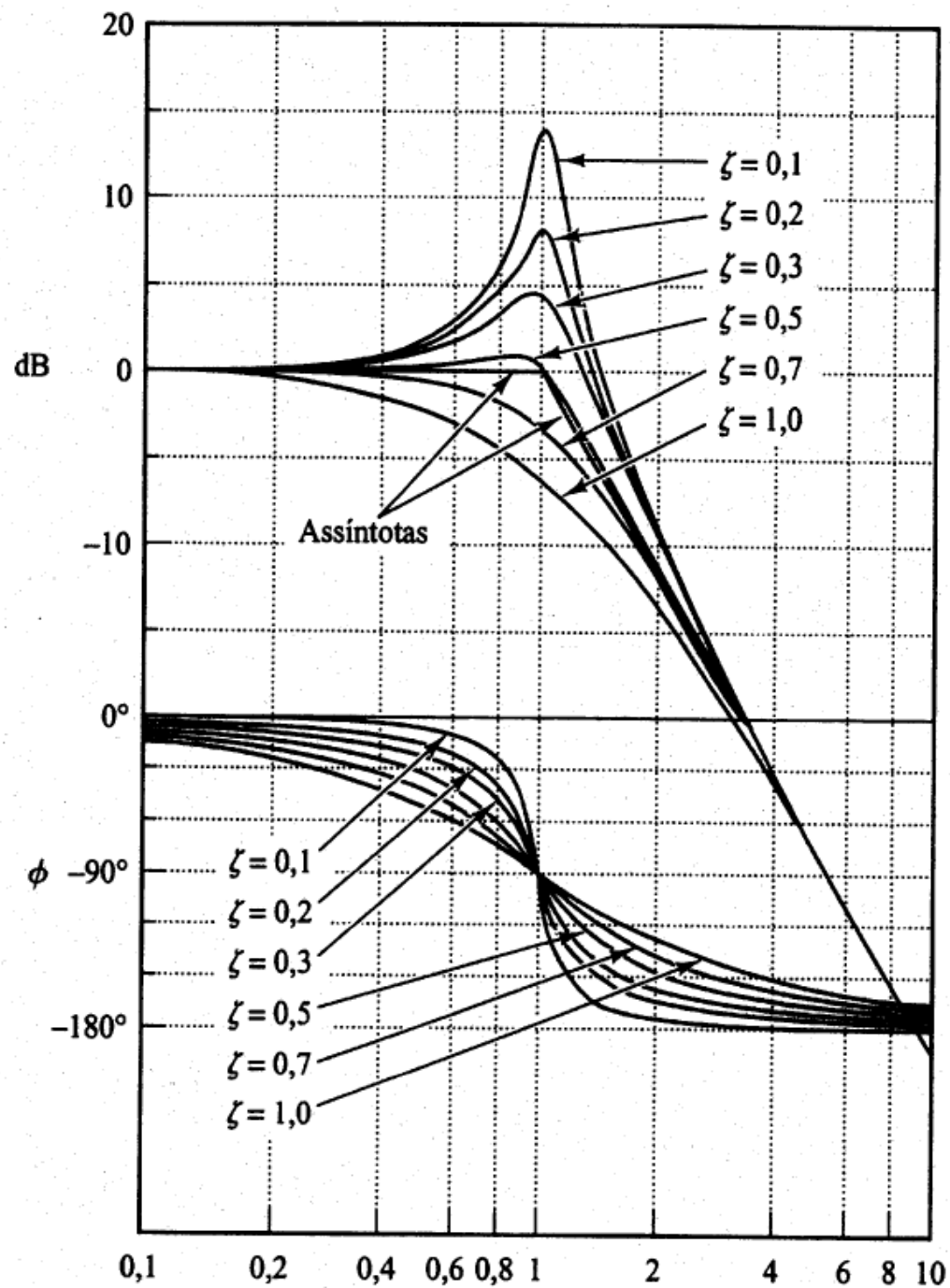
Em $\omega \gg \omega_n$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan} 0 = -180^\circ$$

O diagrama de Bode de fase se torna mais íngreme (com declive mais acentuado) a medida que $\zeta \rightarrow 0$

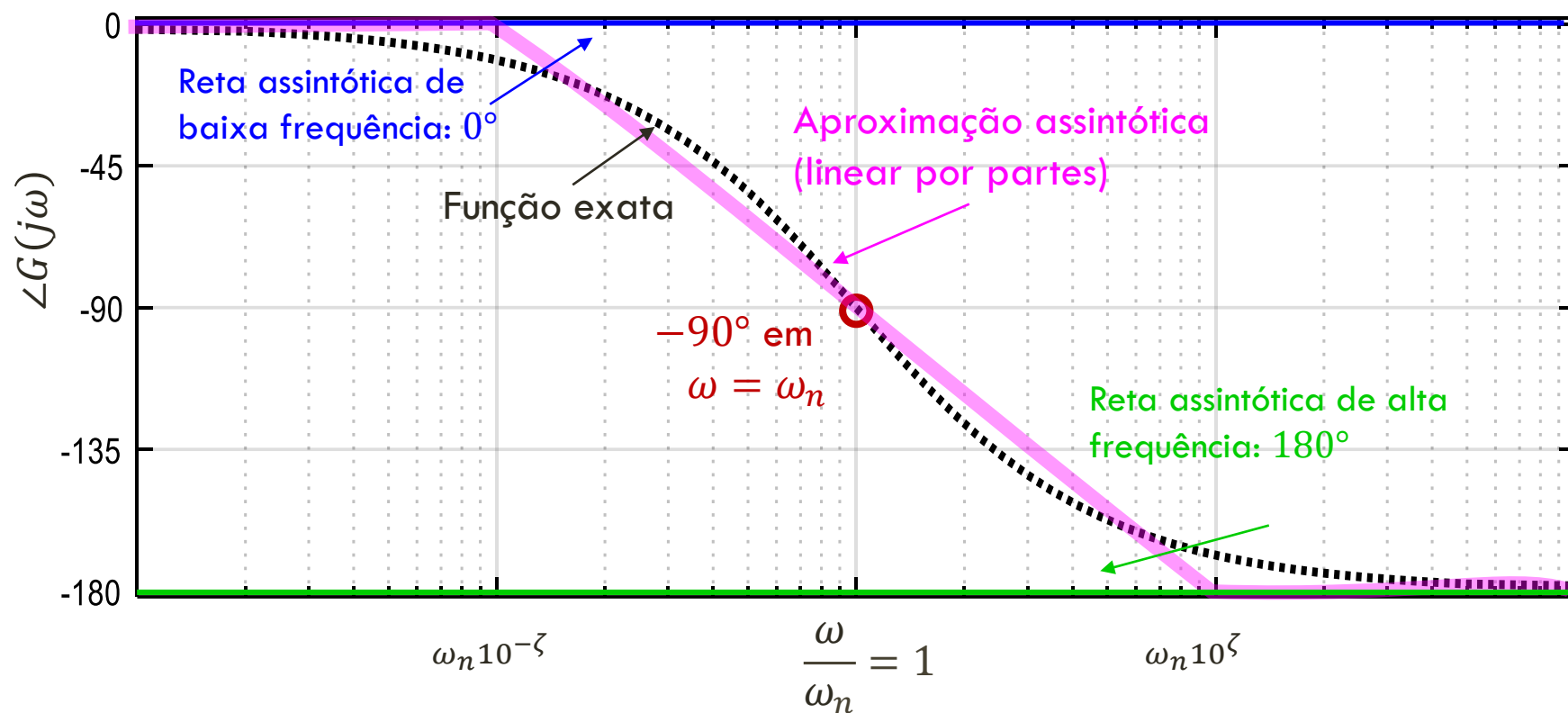
$$\omega_n 10^{-\zeta} < \omega < \omega_n 10^{\zeta}$$

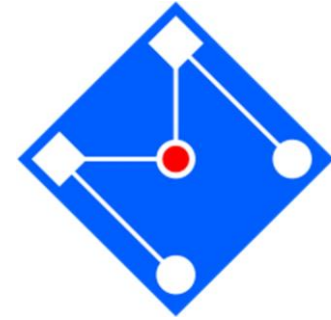
$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan} \left[\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right]$$





Angle of Complex Conjugate Poles

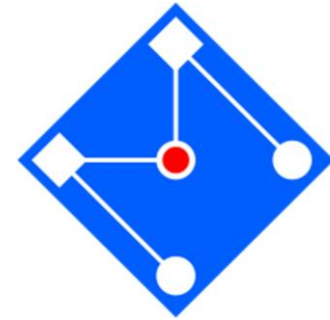




IMPORTANTE VERIFICAR QUE...

As aproximações assintóticas para as curvas de resposta em frequência não são precisas para um fator com baixos valores de ζ .

O módulo e a fase do fator quadrático dependem tanto da frequência de canto como do coeficiente de amortecimento ζ .



FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA E PICO DE RESSONÂNCIA

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Ocorrerá um valor de pico de $|G(j\omega)|$ quando

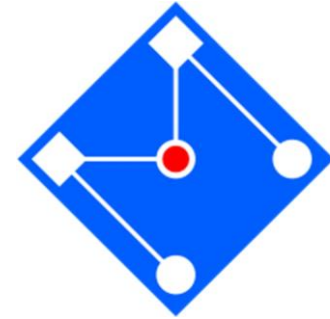
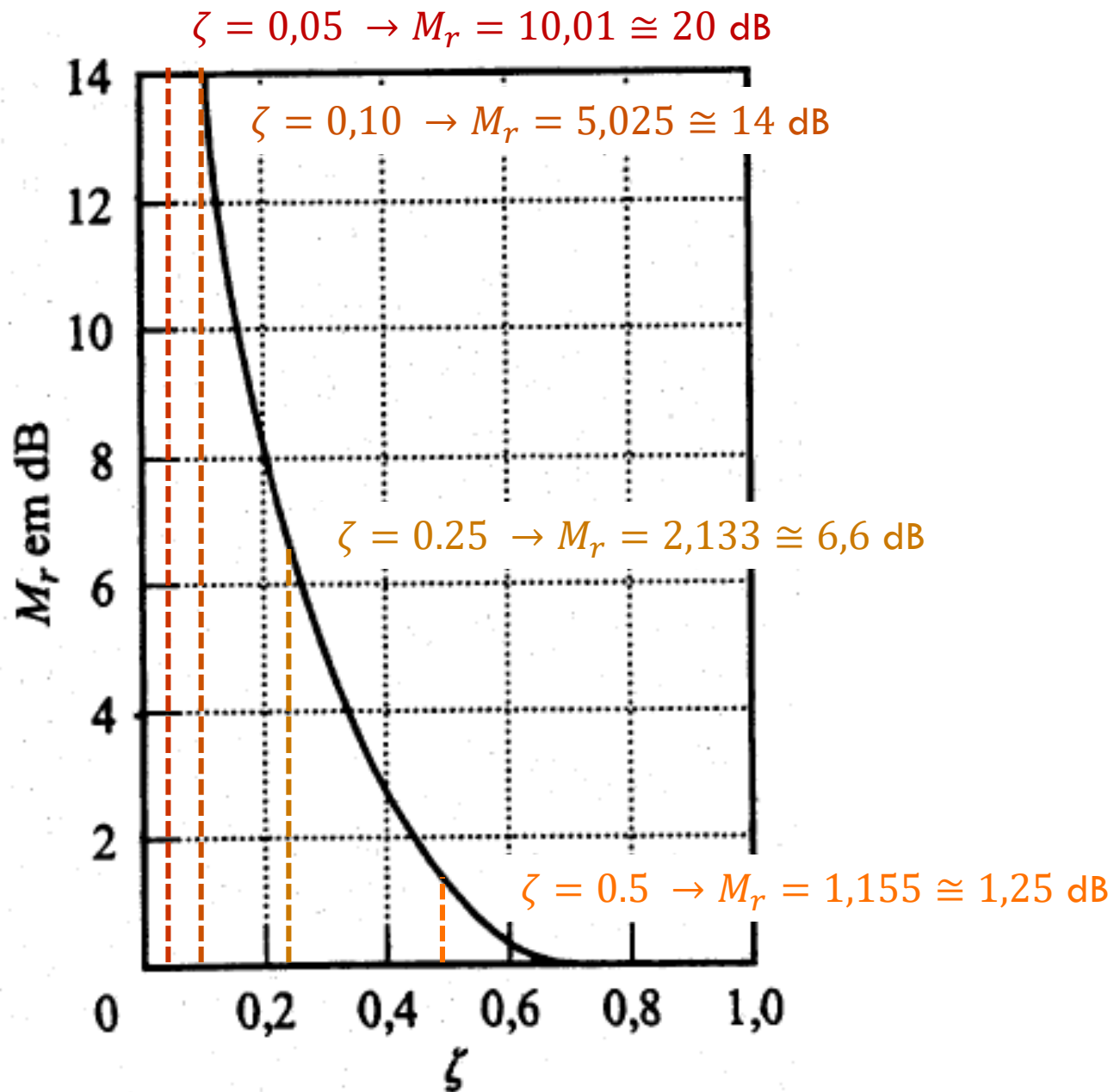
$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \text{ for um mínimo.}$$

$$\frac{dg(\omega)}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{para } 0 \leq \zeta \leq \sqrt{2}/2 = 0,707$$

O valor de modulo e fase do pico serão, respectivamente,

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\angle G(j\omega_r) = -\text{atan} \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\zeta} = -90^\circ + \sin^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$



$$|M_r|_{dB} = |G(j\omega_r)|_{dB} = -20 \log 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$$

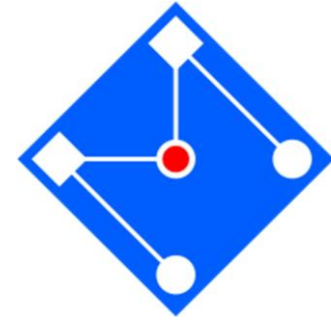
FATOR ZERO QUADRÁTICO

$$G(j\omega) = \left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^n$$



Curvas de módulo e fase para zeros quadráticos podem ser obtidas invertendo-se o sinal das curvas de módulo e fase dos fatores pólos quadráticos.

As principais diferenças são que os picos de ressonância são para baixo em vez de para cima e as curvas de fase vão de 0° a 180° em vez de de 0° a -180°



PROCEDIMENTOS GERAL PARA A CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DE BODE

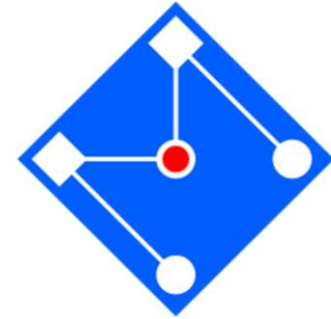
Reescreve-se a função de transferência como produto de fatores básicos.

Identifica-se a frequência de canto associada a estes fatores básicos

Traça-se as curvas assintóticas com módulo em dB, com as inclinações apropriadas entre as frequências de canto

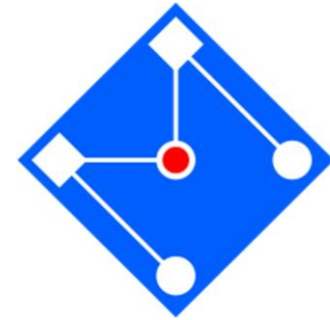
A curva do ângulo de fase pode ser obtida adicionando-se as curvas de ângulo de fase dos fatores individuais

DIAGRAMA DE BODE PASSO A PASSO



Vamos desenhar passo a passo o Diagrama de Bode para seguinte função de transferência,

$$H(s) = 30 \frac{s + 10}{s^2 + 3s + 50}$$



PASSOS 1 E 2

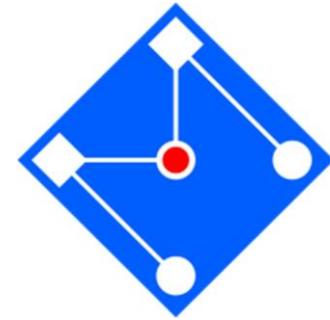
1. Reescreva a função de transferência na forma adequada.

$$H(s) = 6 \frac{\frac{s}{10} + 1}{\frac{s^2}{50} + \frac{3}{50}s + 1}$$

2. Separe a função de transferência em seus fatores básicos.

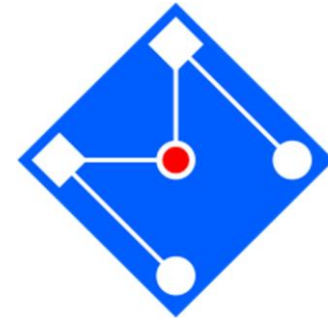
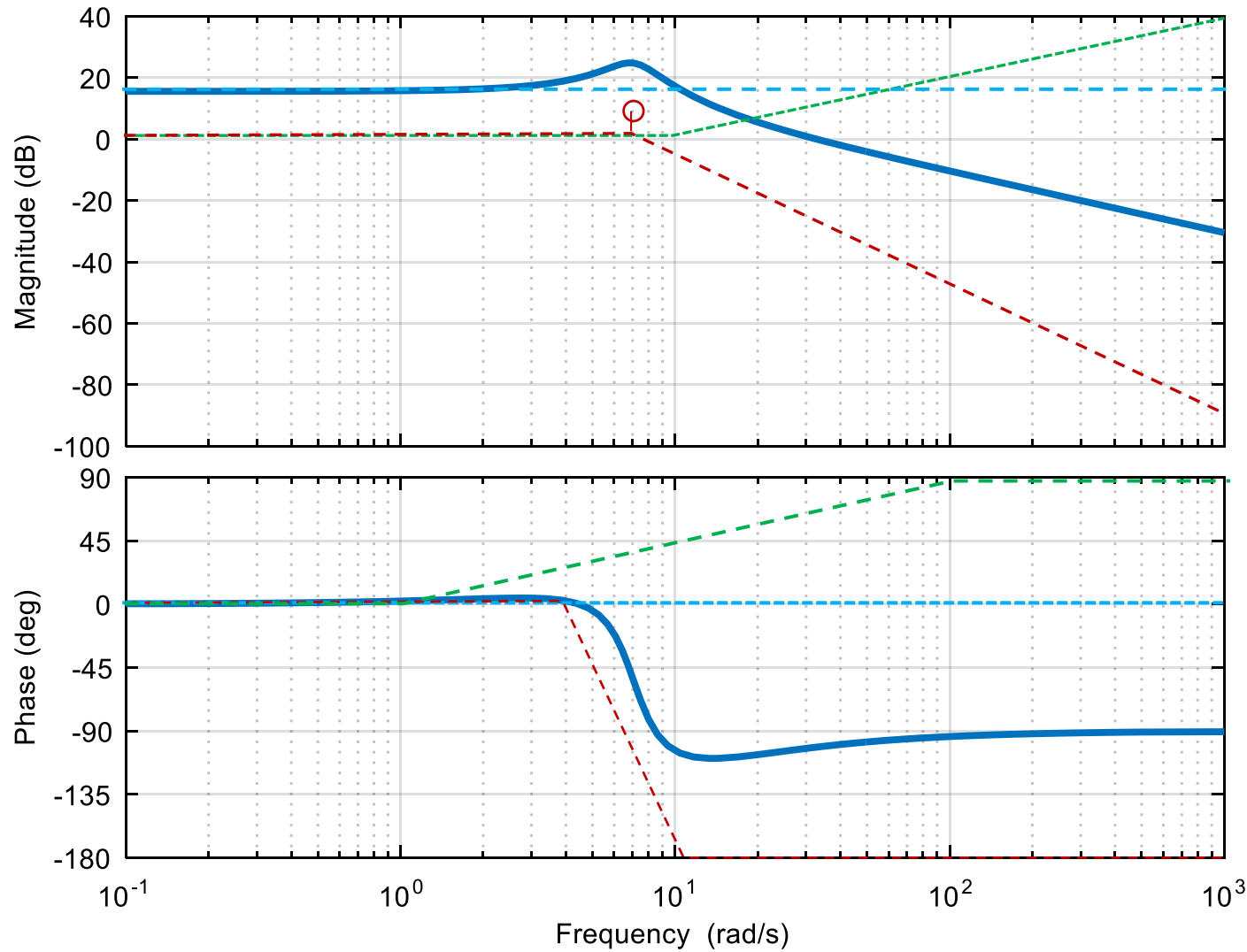
- uma constante 6,
- um zero real $\frac{s}{10} + 1$ em $s = -10$, constante de tempo $\tau = 1/10$
- um par de pólos complexos conjugados de $\frac{s^2}{50} + \frac{3}{50}s + 1$ em $s = -1.5 \pm j6.9$. $\omega_n = 7,07$ e $\zeta = 0,21$.

PASSO 3

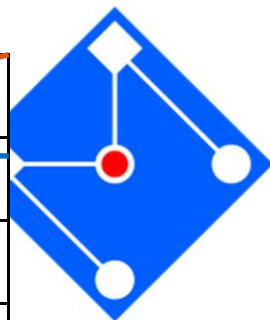
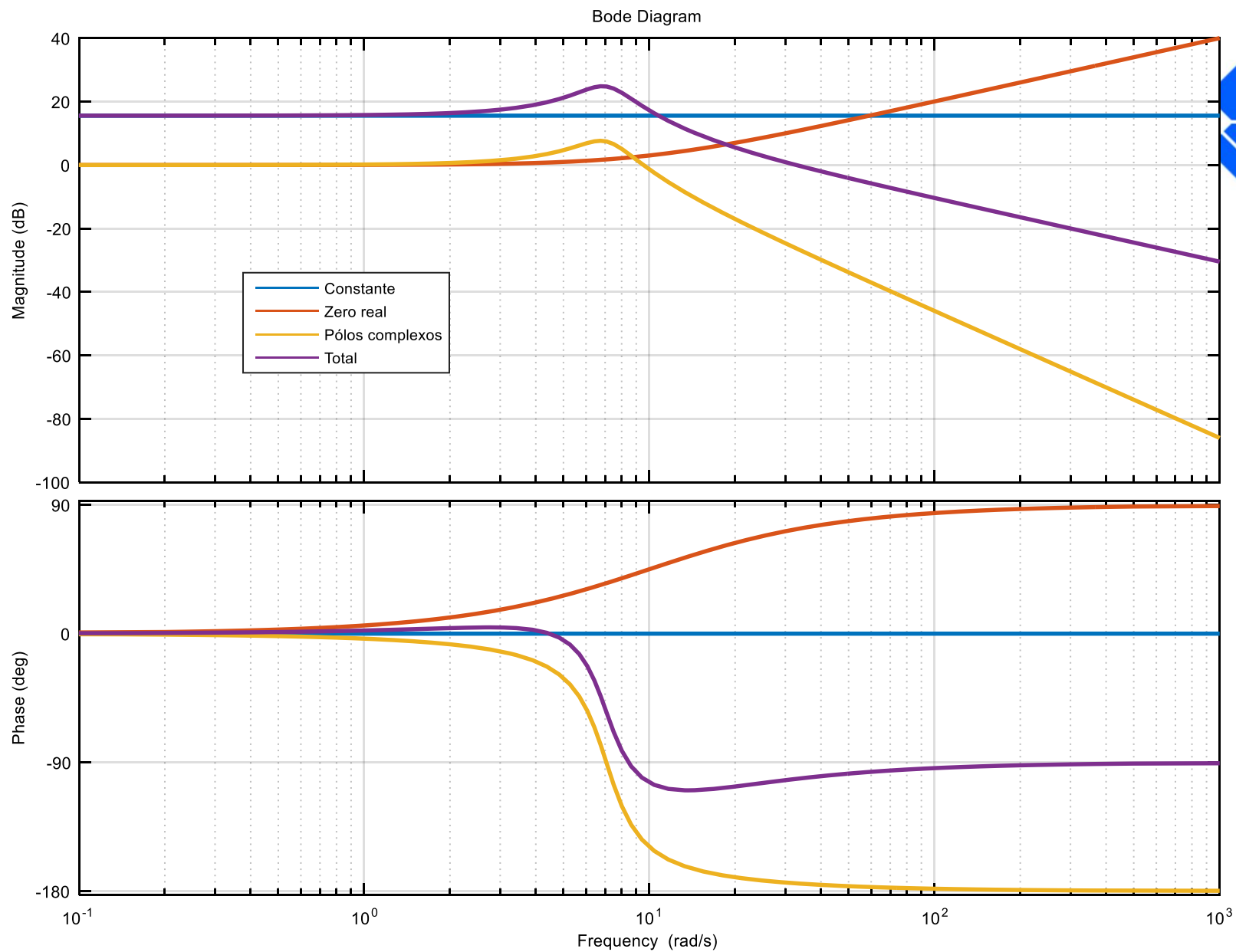


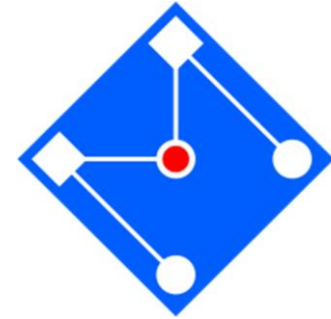
Fator básico	Parâmetros	Módulo	Fase
Constante	$K = 6$	$ K _{dB} = 20 \log 6 = 15,56 \text{ dB}$	$\angle K = 0^\circ$
Zero real	$\tau = \frac{1}{10}$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em +20dB/década Conexão das assintóticas em $\omega_c = \mathbf{10 \text{ rad/s}}$	Baixas frequências: assintótica em 0° Altas frequências: assintótica em $+90^\circ$ Conexão linear das assintóticas de $\omega = 1 \text{ rad/s}$ até $\omega = 100 \text{ rad/s}$
Pólos complexos conjugados	$\omega_n = 7,07$ $\zeta = 0,21$	Baixas frequências: assintótica em 0dB Altas frequências: assintótica em -40dB/década Conexão das assintóticas em $\omega_n = \mathbf{7,07}$ Desenho do pico em ω_r , com amplitude $ G(\omega) _{dB} = -20 \log 0.41 = 7,7 \text{ dB}$	Baixas frequências: assintótica em 0° Altas frequências: assintótica em -180° Conexão linear das assintóticas de $\omega = 7,07 \times 10^{-0.21} = 4.4 \text{ rad/s}$ até $\omega = 7,07 \times 10^{0.21} = 11.5 \text{ rad/s}$

Bode Diagram



- Exato
- Constante -20 dB
- Pólo complexo
- Zero real em -10

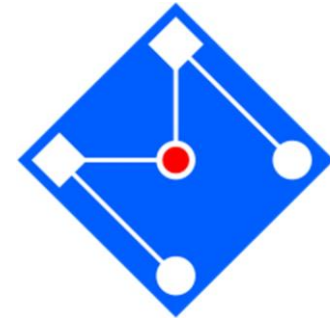




EXEMPLO

Desenhe o diagrama de Bode para função de transferência abaixo (Ogata, ex. 7.3)

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + j\omega + 2]}$$



PASSOS 1 E 2

1. Reescreva a função de transferência na forma adequada.

$$G(j\omega) = \frac{7,5 \left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left(\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right)}$$

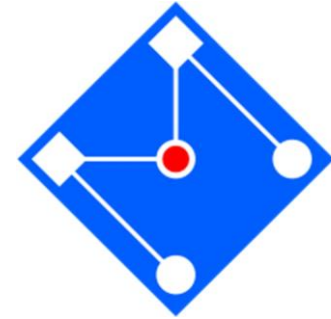
2. Separe a função de transferência em seus fatores básicos.

Constante $K = 7,5$

Pólo na origem $(j\omega)^{-1}$

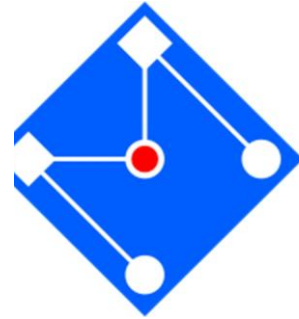
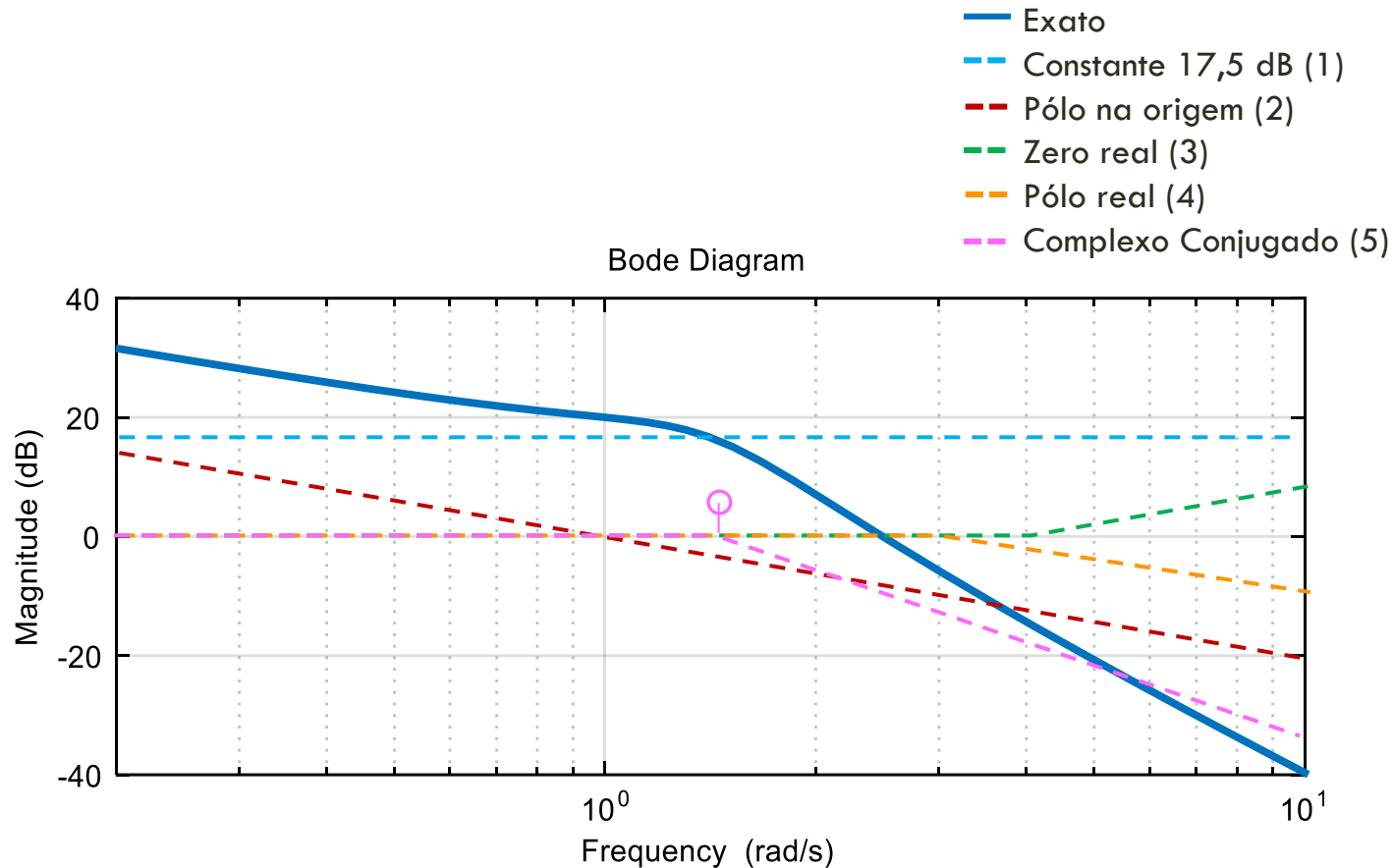
Zero real $\left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right)$ Pólo real $\left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right)^{-1}$

Par de pólos complexos conjugados $\left[1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2} \right]^{-1}$



PASSO 3

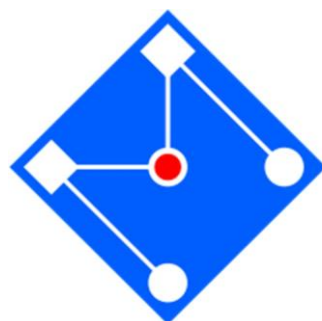
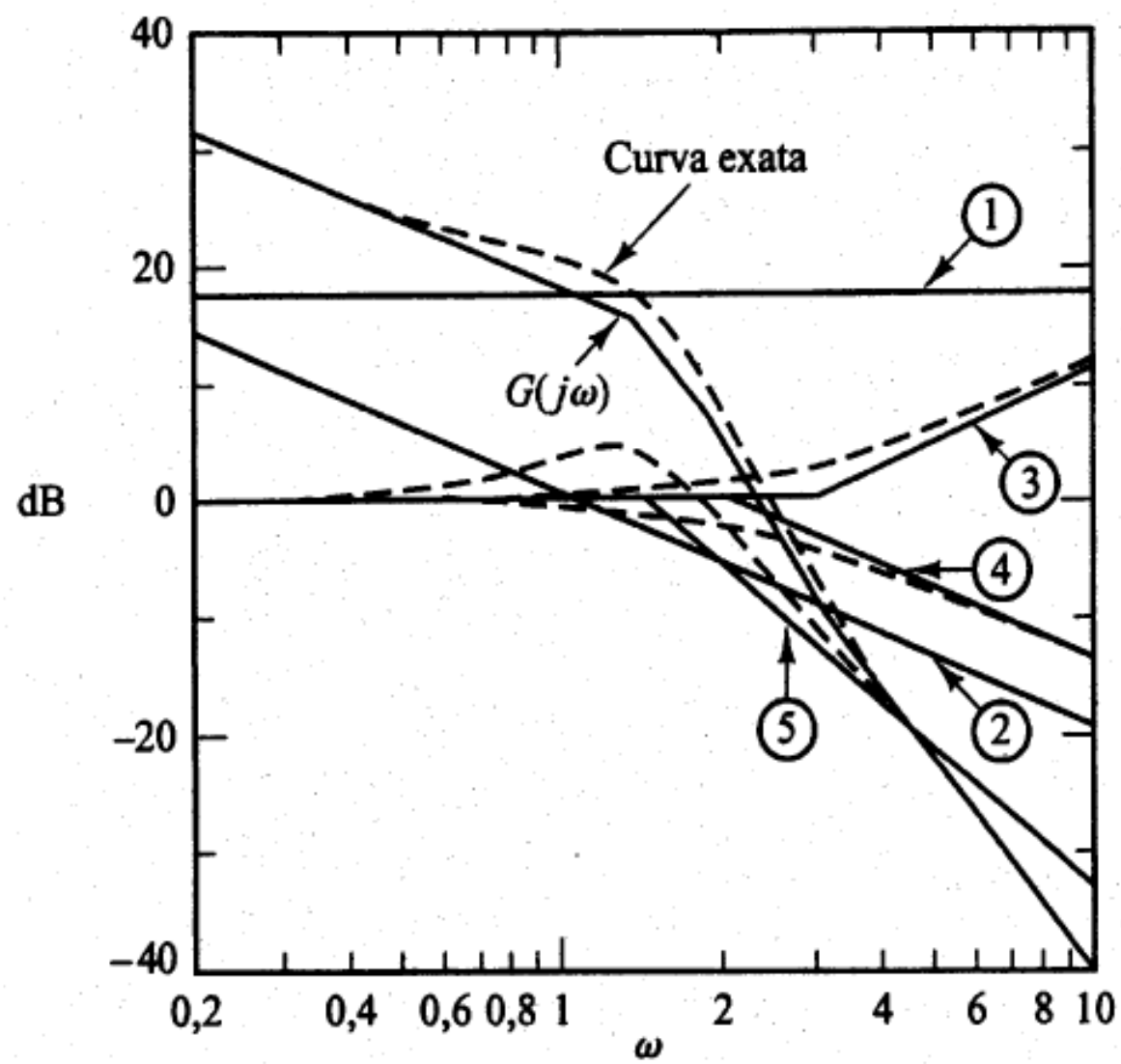
Fator básico	Frequência de canto	Amortecimento
$\left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)$	3	
$\left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)^{-1}$	2	
$\left[1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right]^{-1}$	$\sqrt{2}$	0,3536

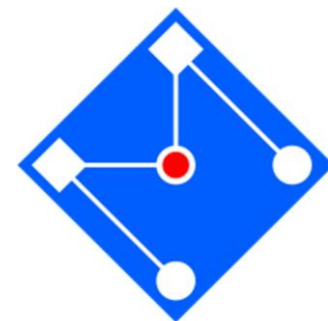
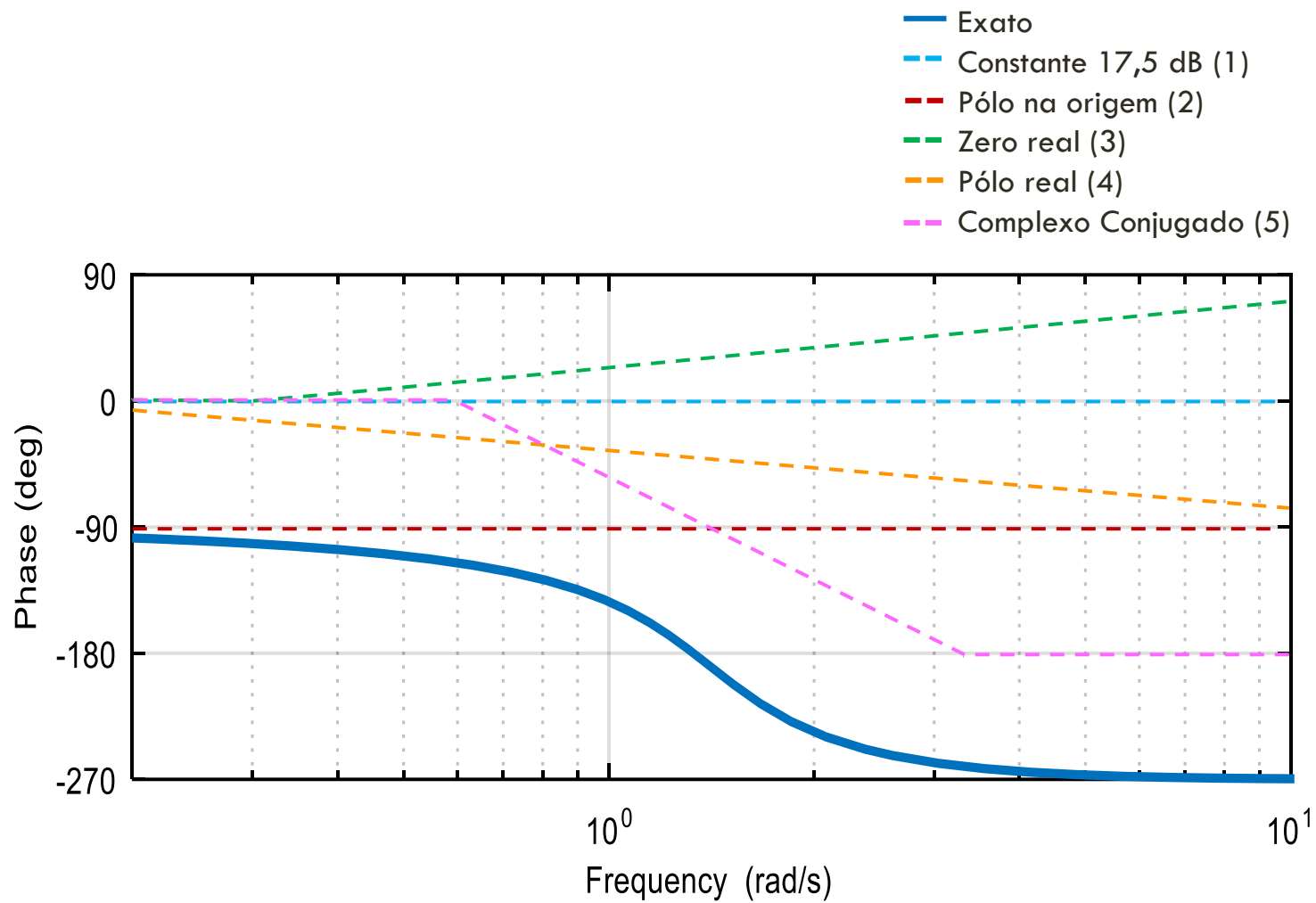


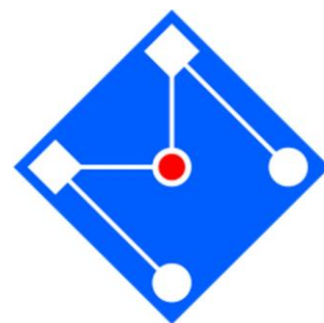
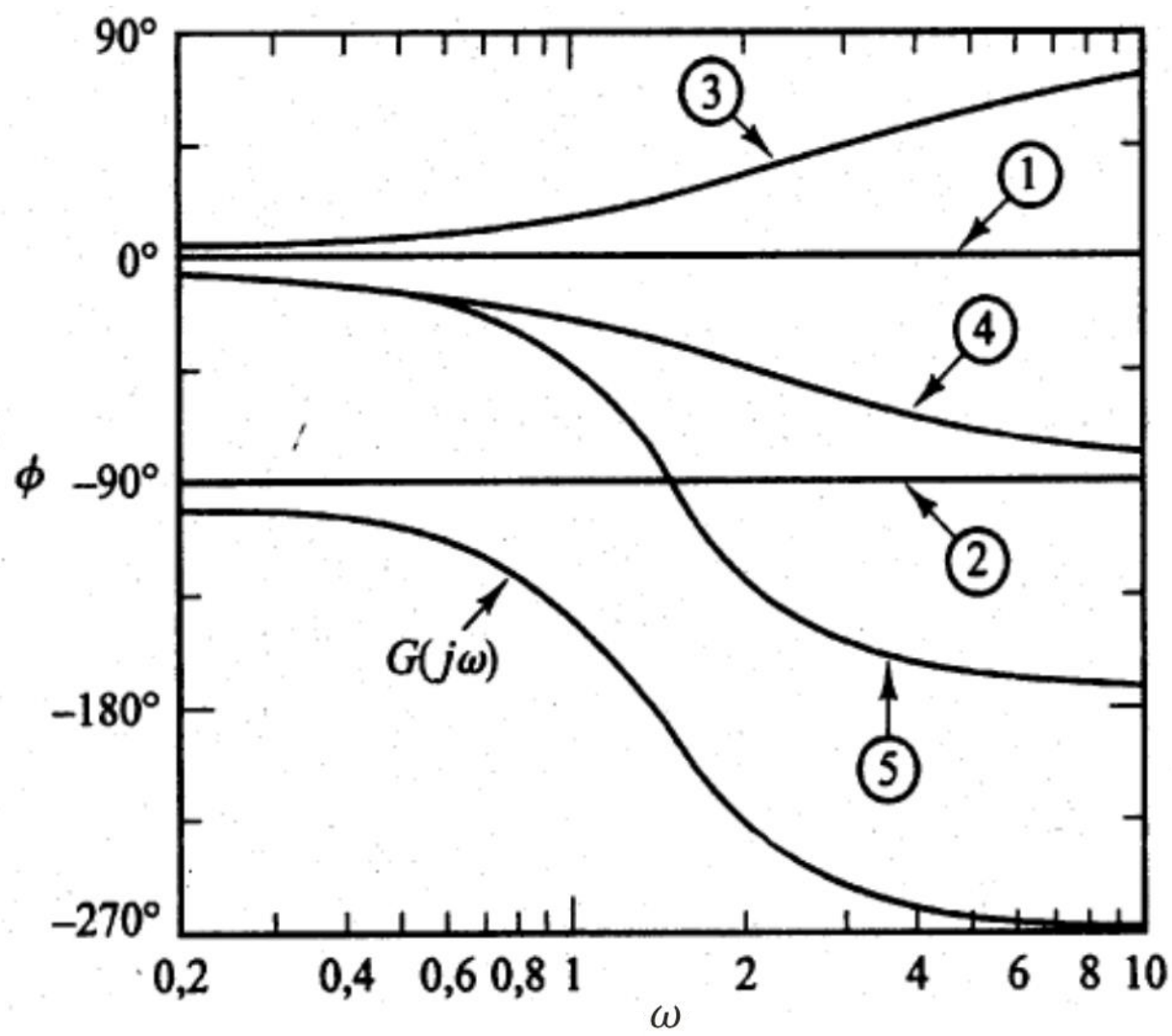
A inclinação da curva é acumulativa:

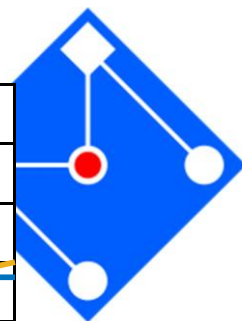
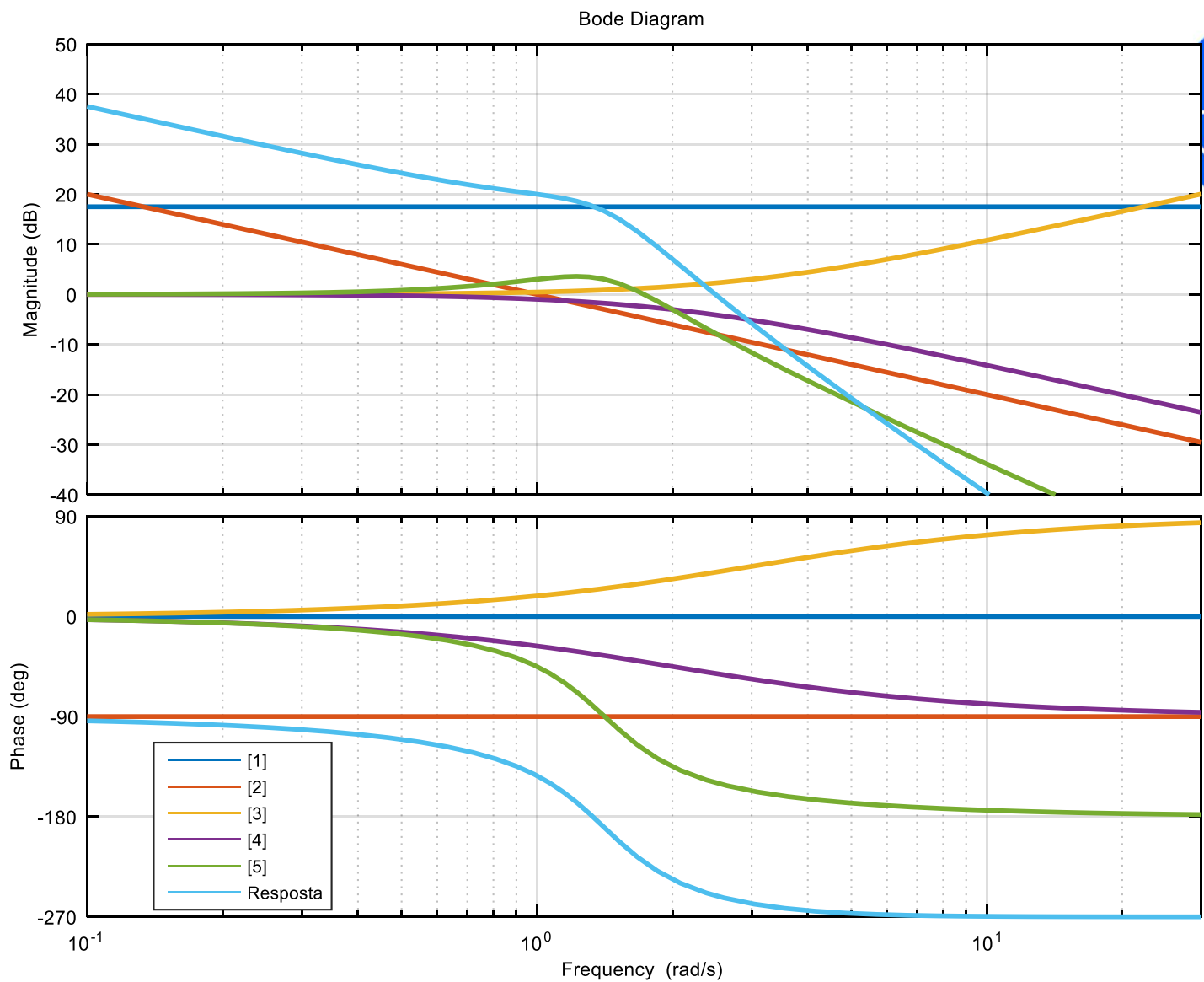
- Abaixo de $\omega_c = \sqrt{2}$, o gráfico tem uma inclinação de -20 dB/década
- Na primeira frequência de canto $\omega_c = \sqrt{2}$, a inclinação de -60 dB/década
- Na segunda frequência de canto $\omega_c = 2$, a inclinação de -80 dB/década
- Na terceira frequência de canto $\omega_c = 3$, a inclinação de -60 dB/década

Uma vez que a curva aproximada tenha sido desenhada, a curva real pode ser obtida adicionando-se as correções a cada frequência de canto e às frequências uma oitava abaixo e acima das frequências de canto.









```
% Bode plot
% Funcao Transferencia:  $G(j\omega) = 10(j\omega+3)/\{(j\omega)(j\omega+2)[(j\omega)^2+j\omega+2]\}$ 
clear all; close all; clc
```

```
opts = bodeoptions;
opts.YLim = {[-40,50];[-270,90]};
opts.YLimMode = {'manual';'manual'};
opts.Xlim = {[0.1,30]};
opts.XLimMode = {'manual'};
opts.Grid='on'
```

```
figure;
```

```
% [1] constante
H=tf([7.5],[1])
bode(H,opts)
hold on
```

```
%
```

```
% [2] polo na origem
H=tf([1],[1 0]);
bode(H,opts)
hold on
```

```
%
```

```
% [3] zero real tau=1/3
H=tf([1/3 1],[1]);
bode(H,opts)
hold on
```

```
% [4] polo real tau=1/2
H=tf([1],[1/2 1]);
bode(H,opts)
hold on
```

```
% [5] polos complexos conjugados wn=7.07 e
zeta=0.3536
H=tf([1],[1/2 1/2 1]);
bode(H,opts)
hold on
```

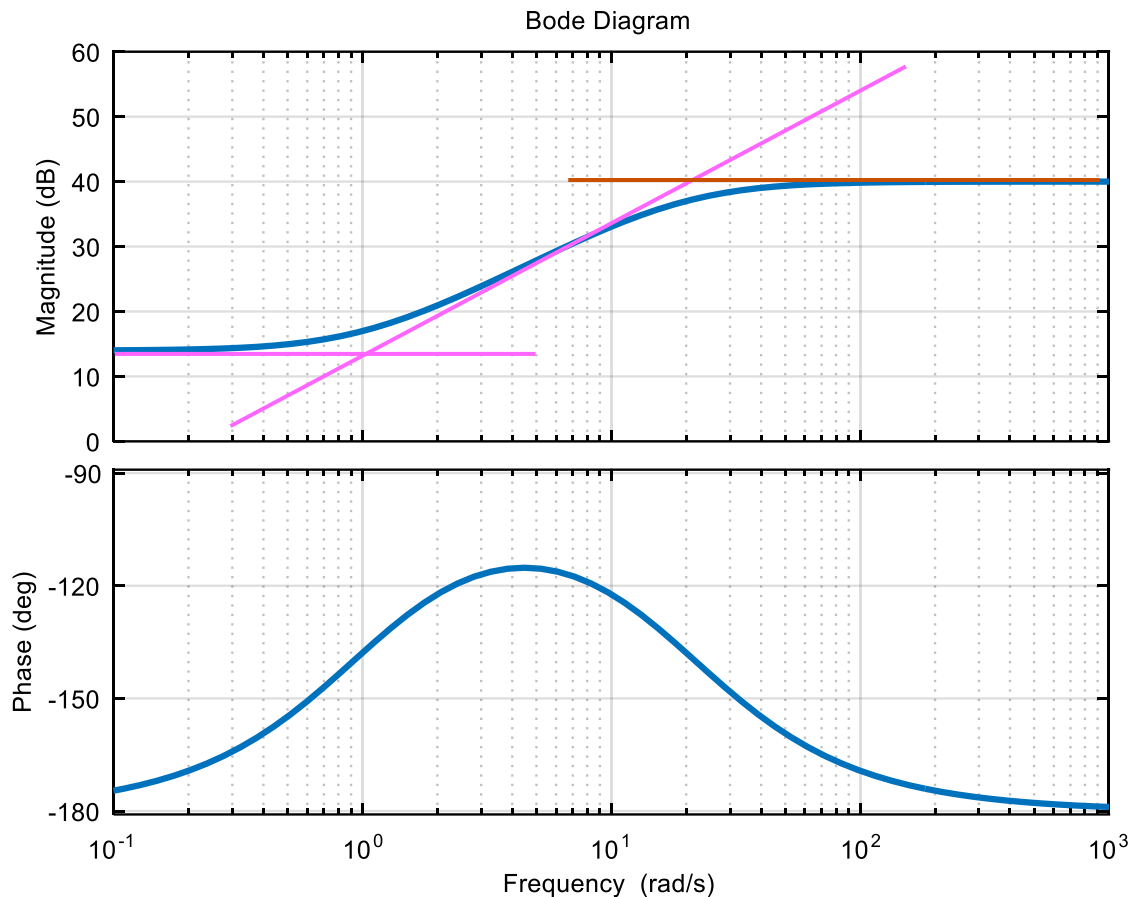
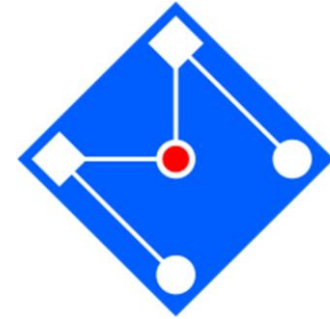
```
% total
H=tf([1],[1/50 3/50 1]);
bode(H,opts)
hold on
```

```
legend('[1]','[2]','[3]','[4]','[5]','Resposta')
```

```
h = findobj(gcf,'type','line');
set(h,'linewidth',2);
```



VAMOS FAZER O EXERCÍCIO INVERSO



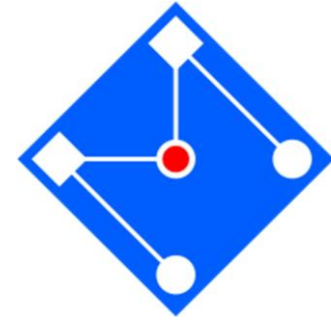
$$\begin{cases} |K|_{dB} = 14 \text{ dB} \\ \angle K = -180^\circ \end{cases} \rightarrow K = -5$$

1 zer em $s = -1$

1 pólo em $s = -20$

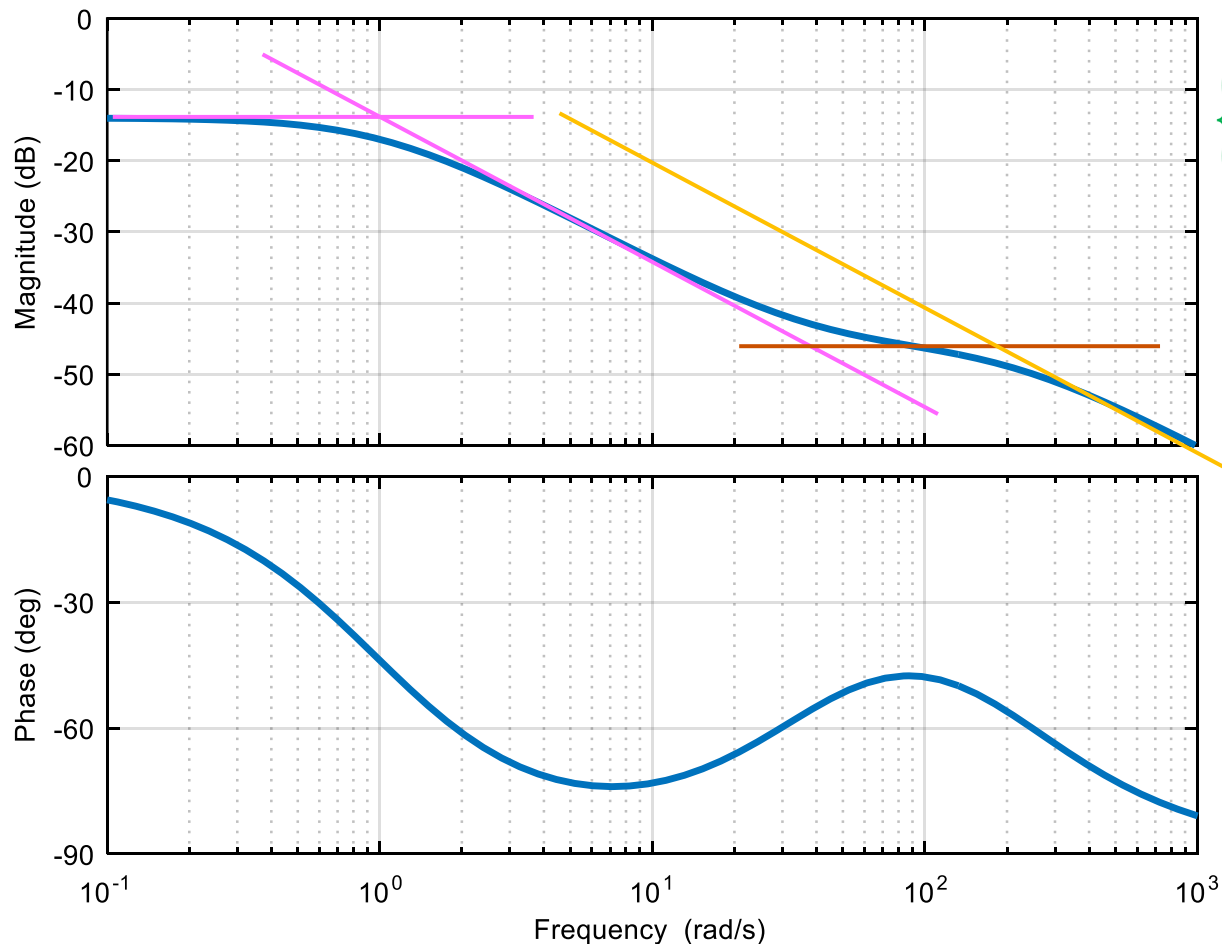
$$G(s) = -5 \frac{s+1}{1} \frac{20}{s+20}$$

$$G(s) = -100 \frac{s+1}{s+20}$$



OUTRO UM POUCO PIOR...

Bode Diagram



$$\begin{cases} |K|_{dB} = -14 \text{ dB} \\ \angle K = 0^\circ \end{cases} \rightarrow K = 0,2$$

1 pólo em $s = -1$

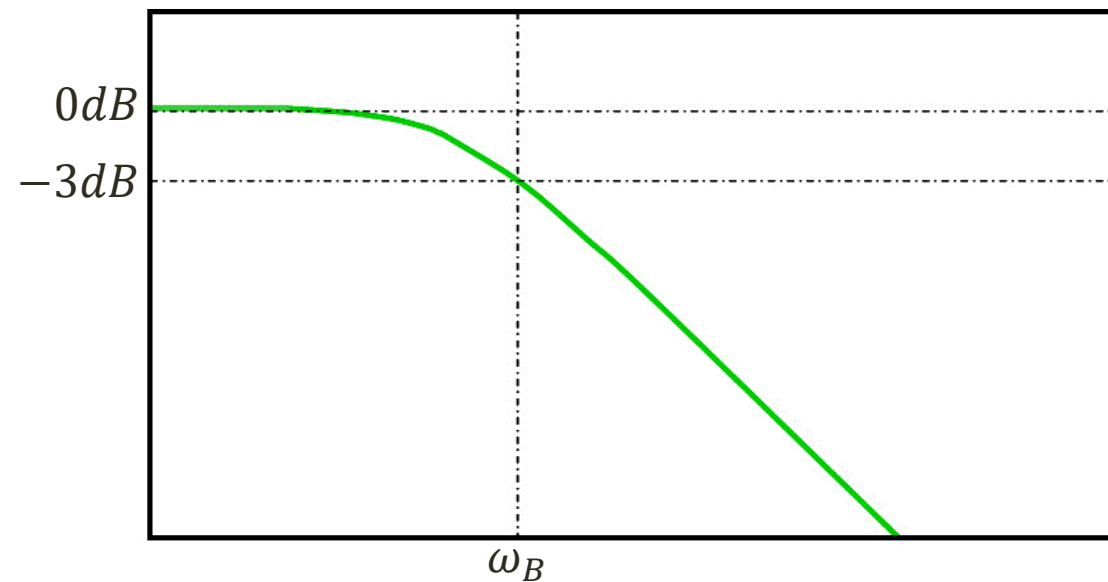
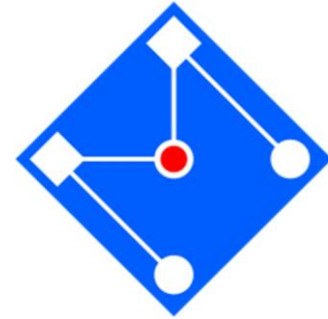
1 zero em $s = -40$

1 pólo em $s = -200$

$$G(s) = 0,2 \frac{1}{s+1} \frac{s+40}{40} \frac{200}{s+200}$$

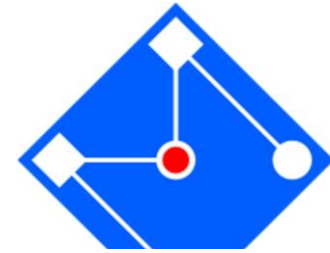
$$G(s) = \frac{s+40}{(s+1)(s+200)}$$

LARGURA DE BANDA E FREQUÊNCIA DE CORTE



A frequência de corte (ou de canto ou de largura de banda) ω_B é definida como aquela a partir da qual o ganho cai abaixo de 3dB com relação ao ganho de baixas frequências.

A região de frequências $0 \leq \omega \leq \omega_B$ é denominada **largura de banda** (ou largura de faixa, ou ainda, banda passante).

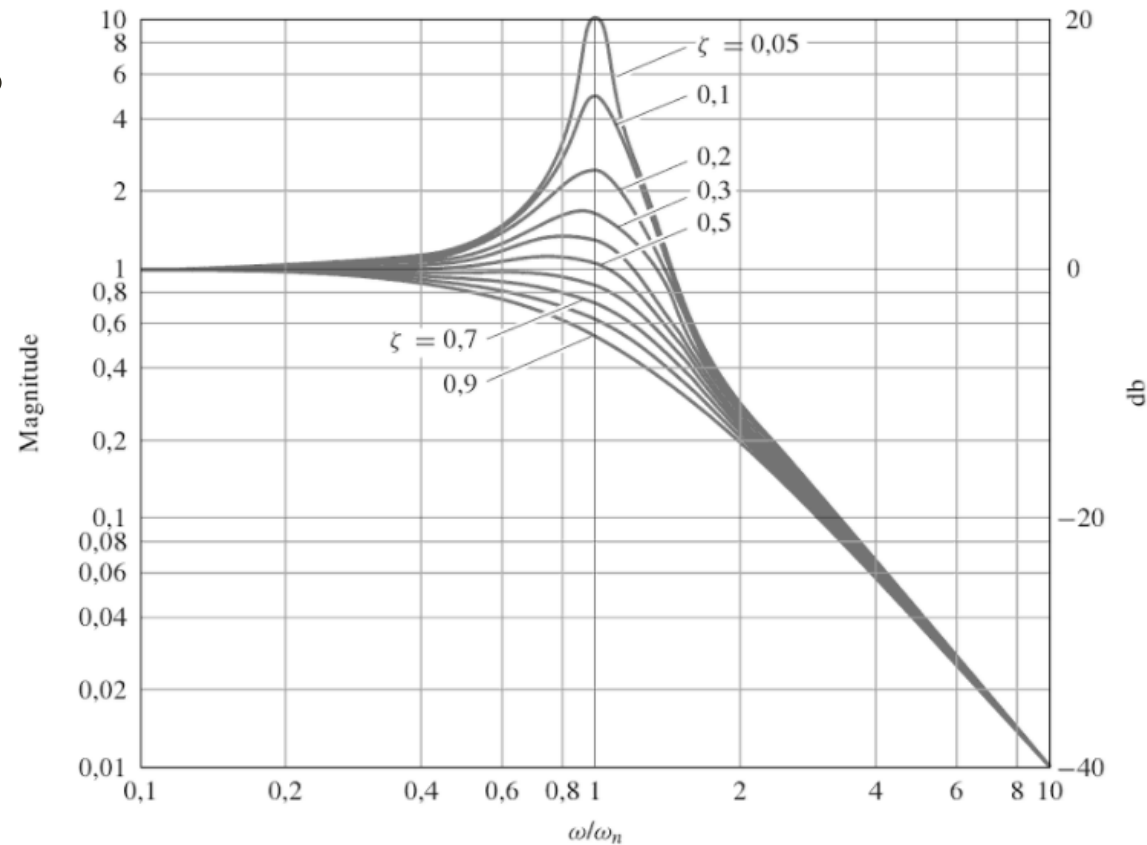


LARGURA DE BANDA

A **largura de banda** indica como um sistema vai seguir um sinal senoidal. É, portanto, uma boa medida do intervalo de fidelidade da resposta do sistema.

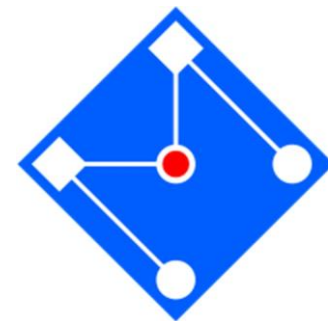
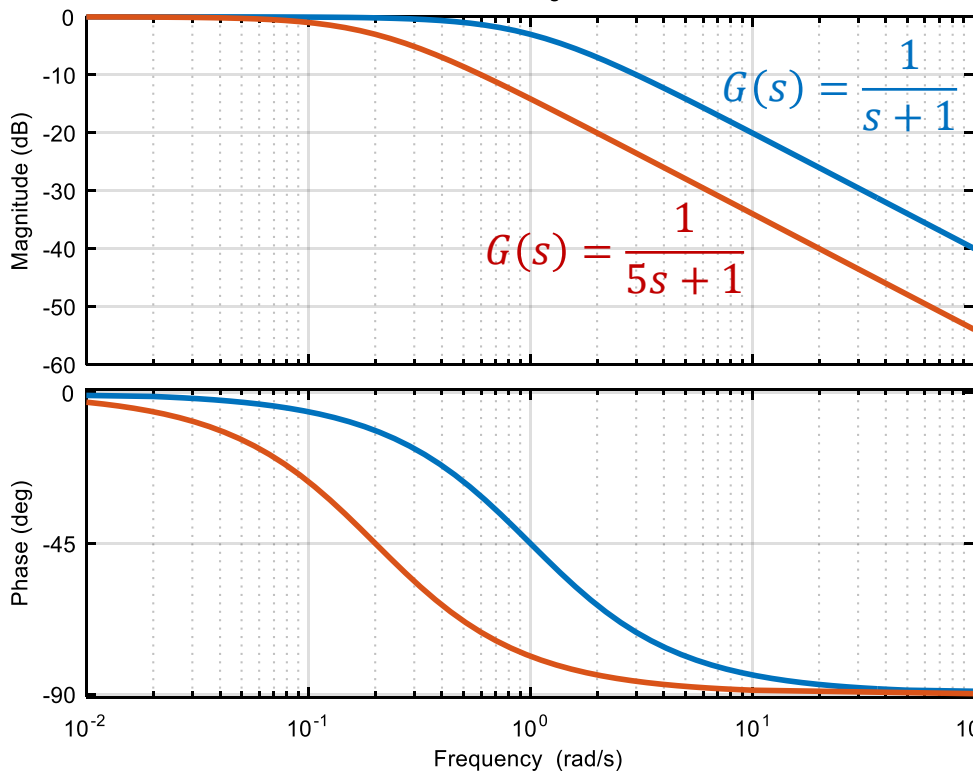
Outra característica importante é que ela é proporcional à velocidade de resposta:

- **Largura de banda** grande corresponde a um pequeno tempo de subida.
- A **largura de banda** decresce com o aumento de ζ .

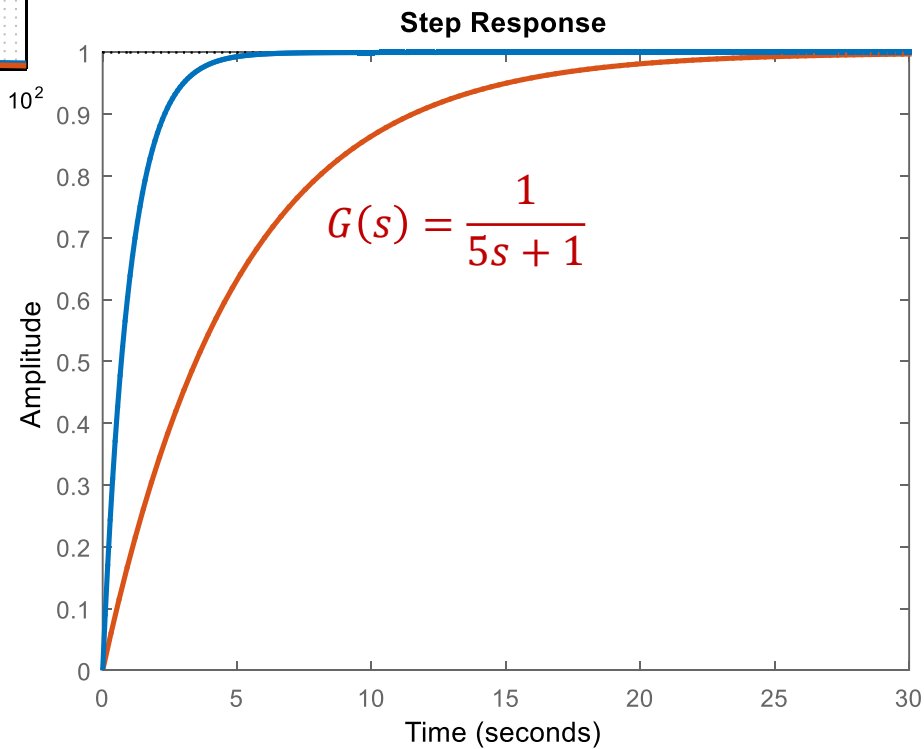


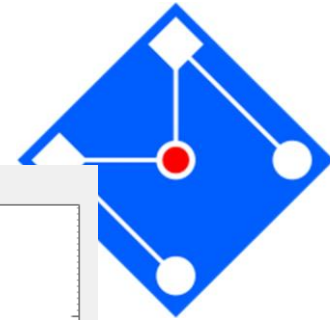
$$\omega_B = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{\zeta^4 - 4\zeta^4 + 2}}$$

Bode Diagram



$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$



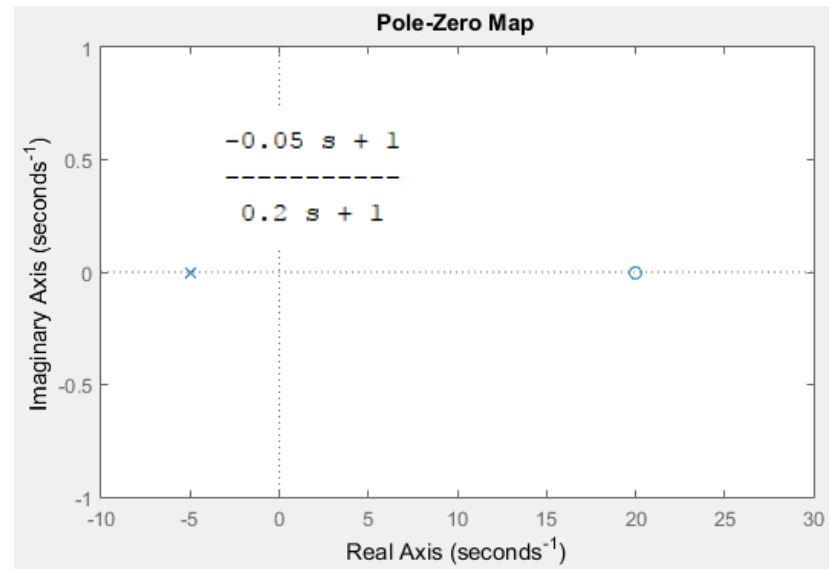
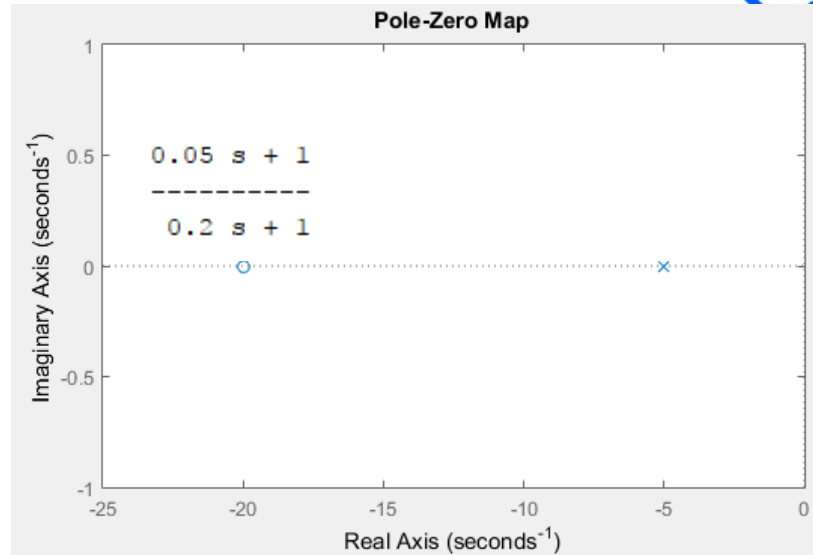


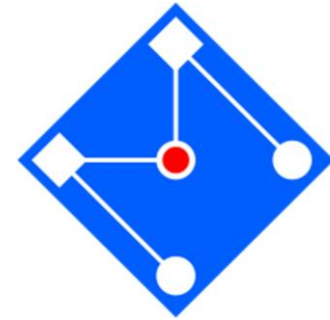
SISTEMAS DE FASE MINIMA E DE FASE NÃO MÍNIMA

Os sistemas que não possuem polos nem zeros no semiplano direito do plano s são chamados **de sistemas de fase mínima**.

Se uma função de transferência zeros no semiplano direito, esse é um **sistema de fase não mínima**.

Segundo alguns autores, sistema de fase não-mínima não é caracterizado apenas por zeros no semi-plano direito, mas também por polos instáveis...



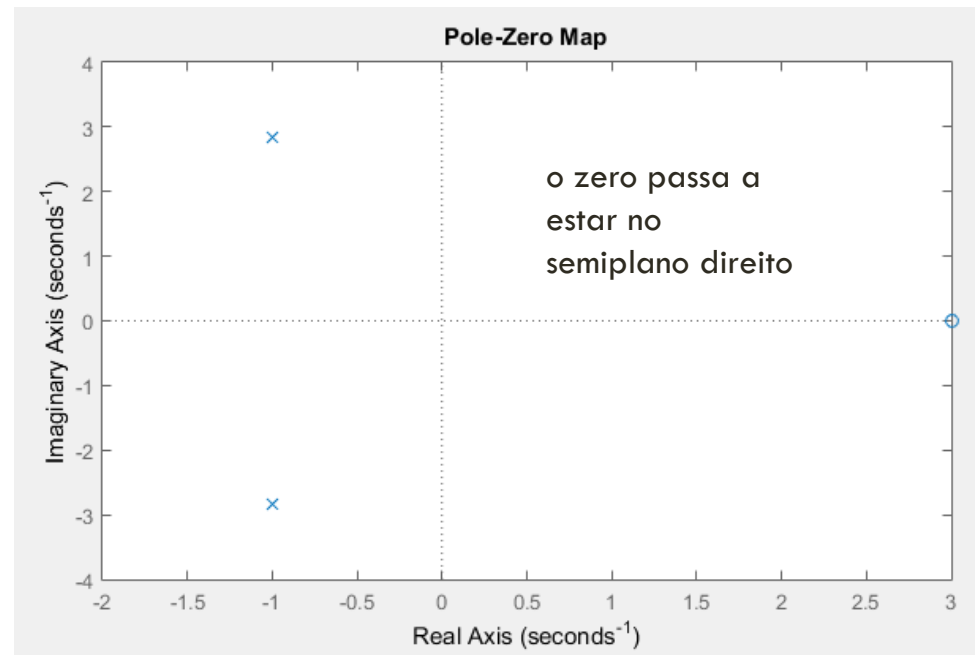


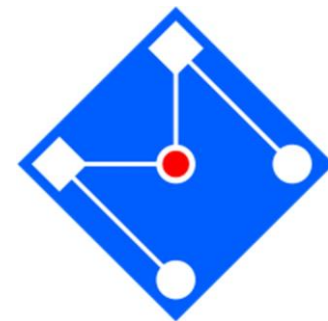
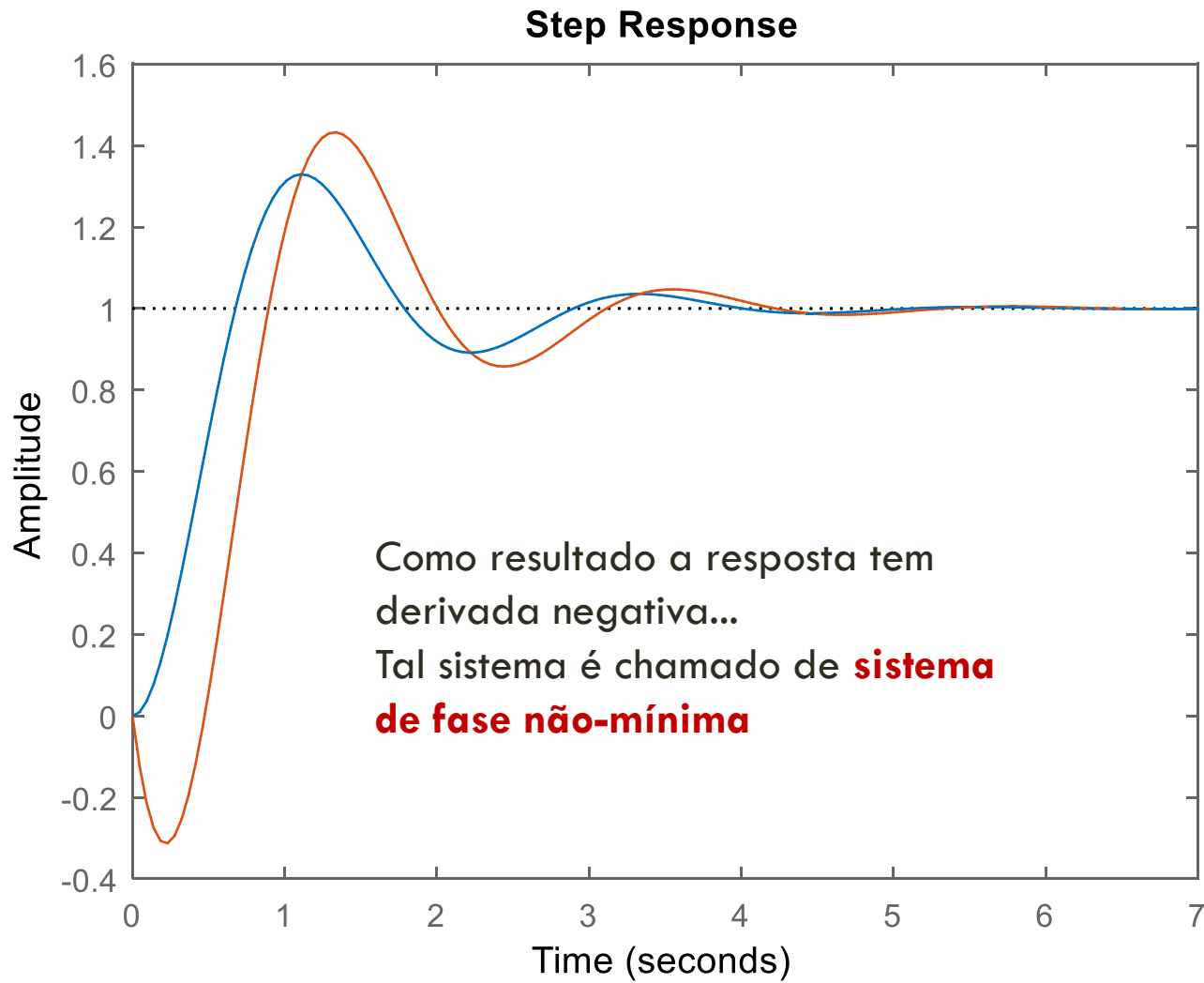
SISTEMA DE FASE NÃO-MÍNIMA

O que acontece, por exemplo,
se o sistema possui um zero
negativo?

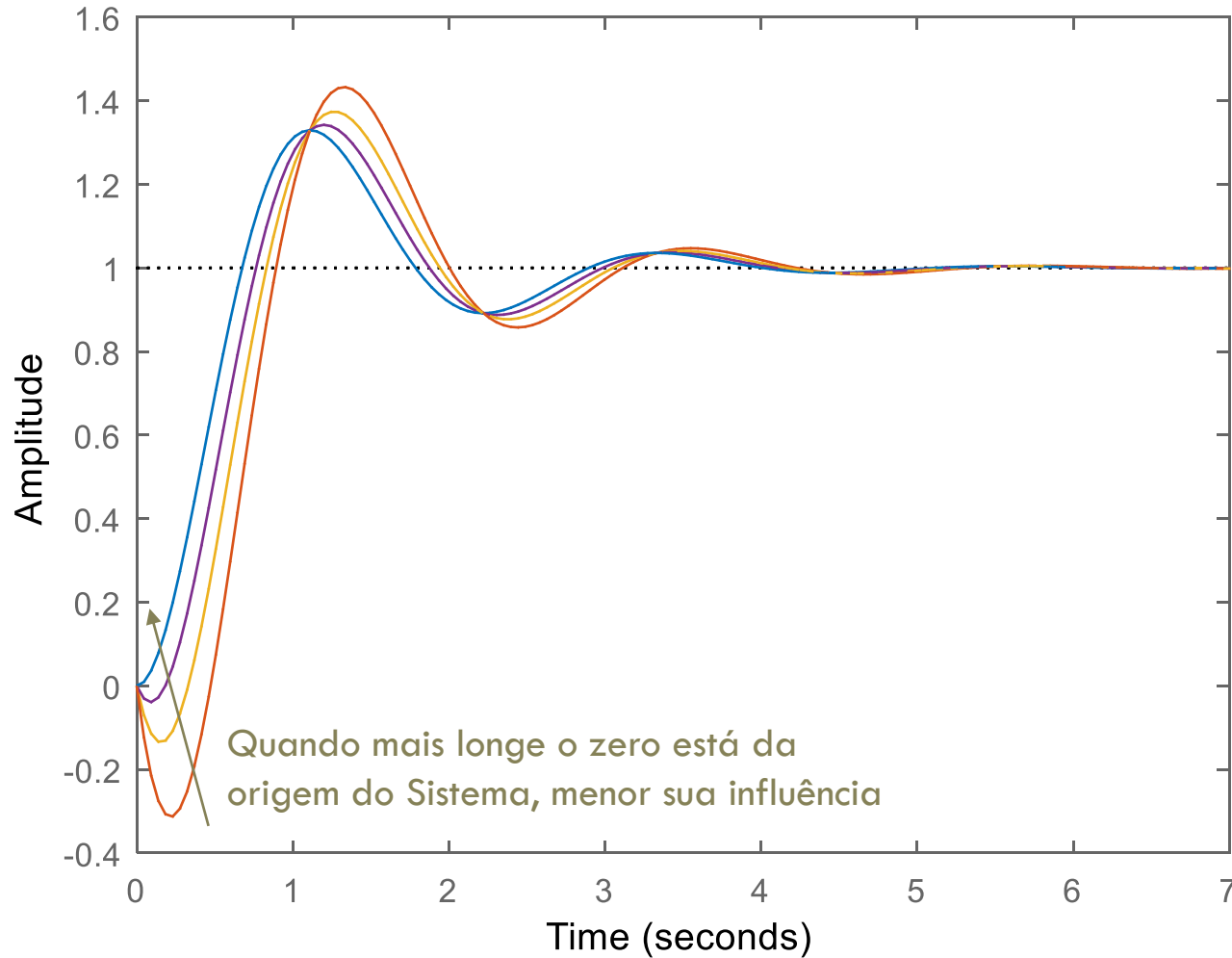
```
num=[-1 3]*9/3;  
den=[1 2 9];  
sys=tf(num,den)  
printsys(num,den)  
[z,p,k]=tf2zp(num,den)  
ltiview('pzmap',sys);
```

$$\frac{-3s + 9}{s^2 + 2s + 9}$$

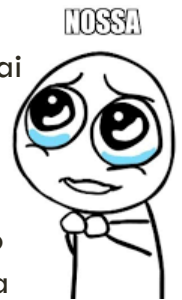




Step Response



Se um carro é um **sistema de fase não-mínima**, ele vai primeiro virar um pouco para a esquerda quando receber o comando para virar à direita



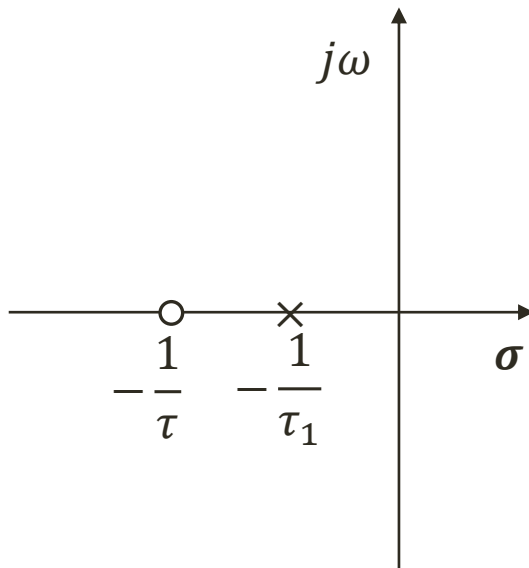
SISTEMAS DE FASE MÍNIMA E NÃO MÍNIMA



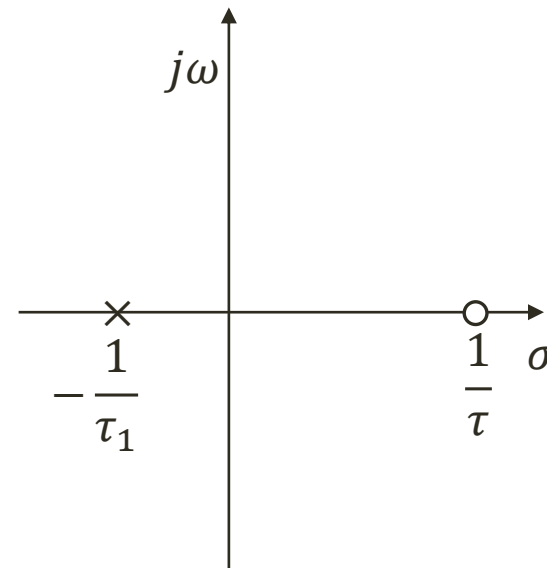
$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\tau_1}$$

$$G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau_1}$$

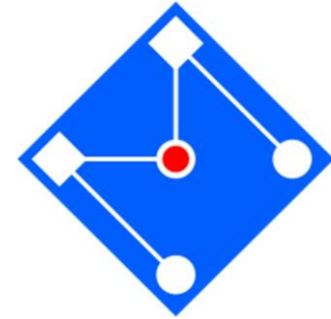
$$0 < \tau < \tau_1$$



$$G_1(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \tau_1 s}$$



$$G_2(s) = \frac{1 - \tau s}{1 + \tau_1 s}$$



SISTEMAS DE FASE MÍNIMA E NÃO MÍNIMA

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\tau_1}$$

$$G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau_1}$$

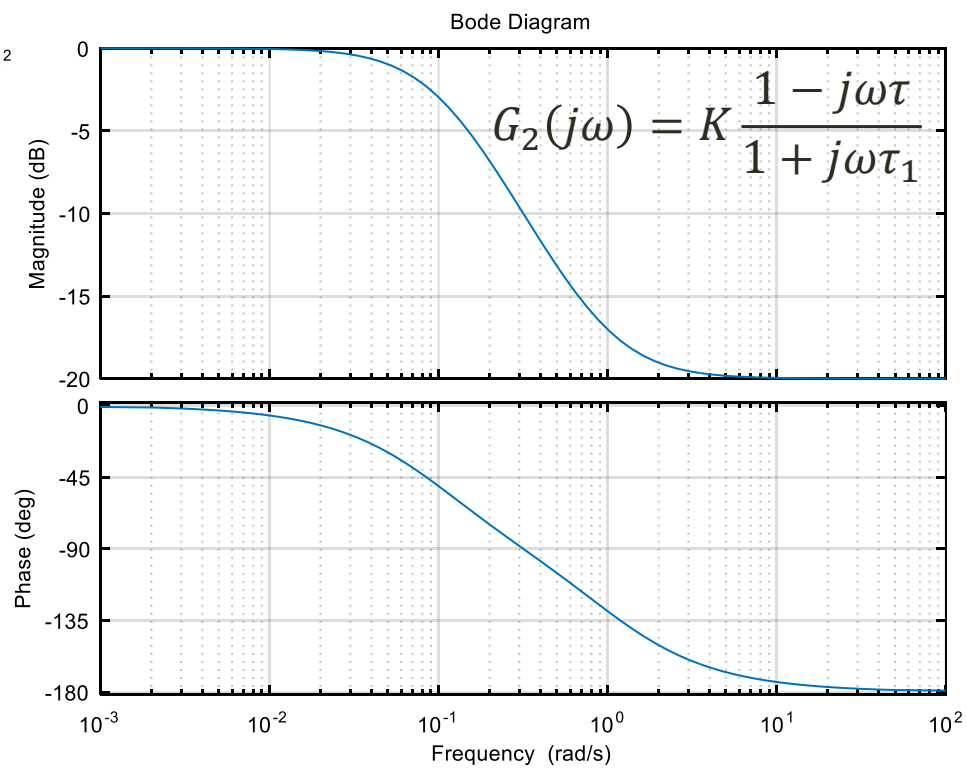
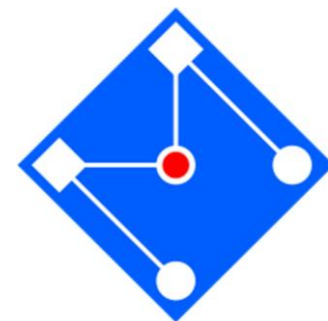
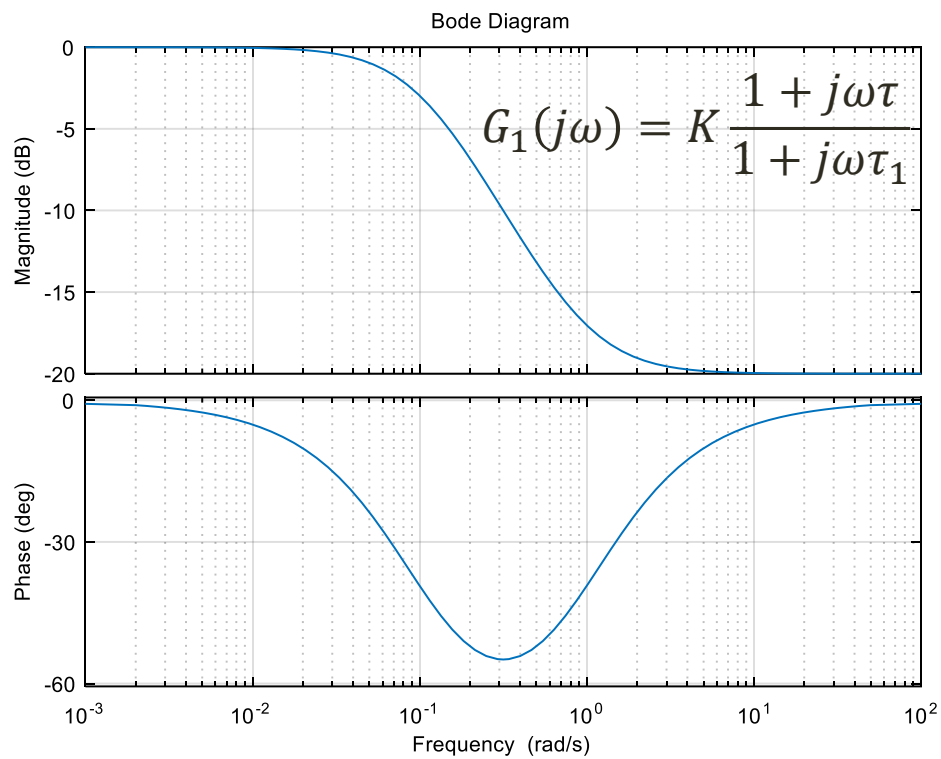
Os dois sistemas
diferem entre si
pelo fator:

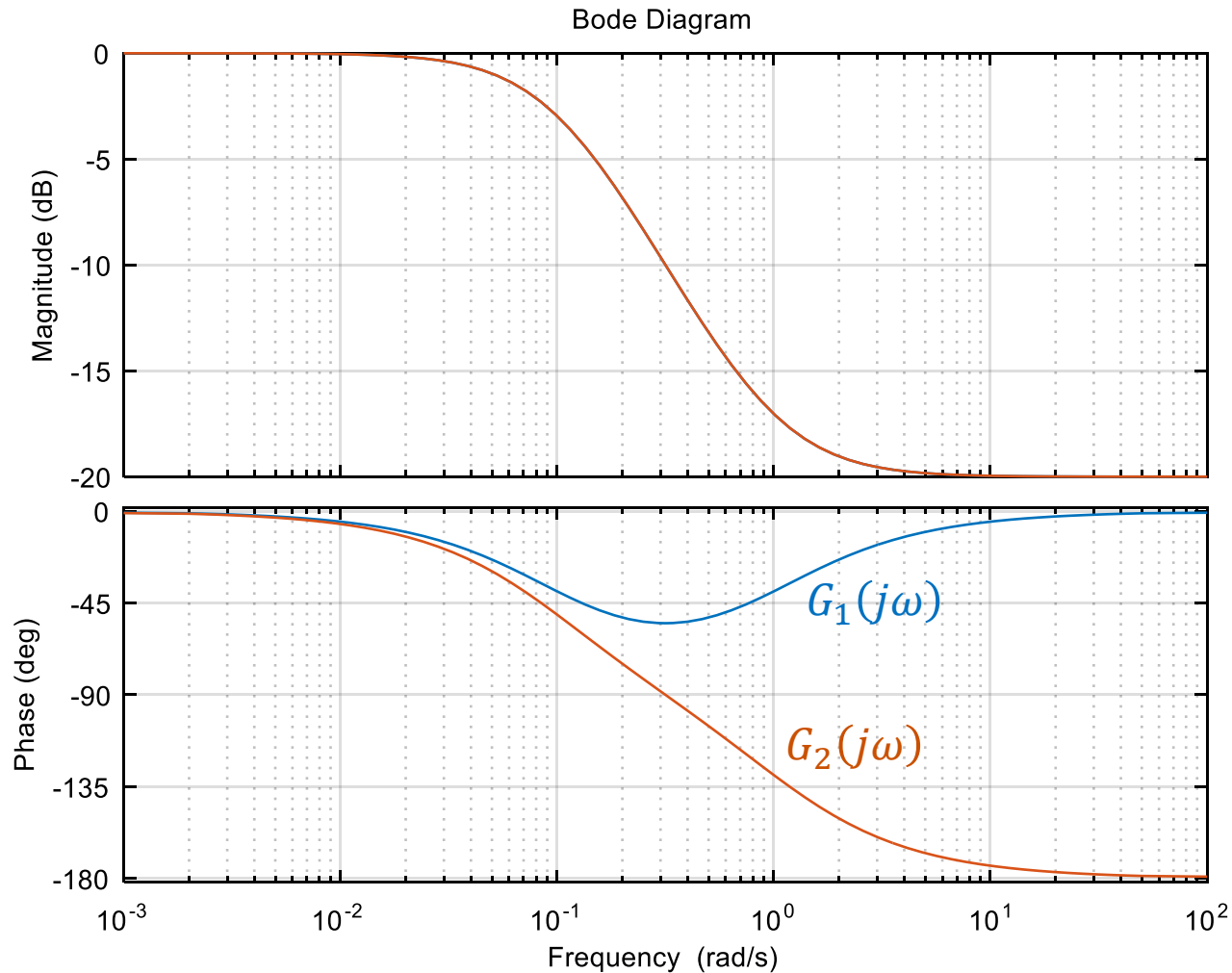
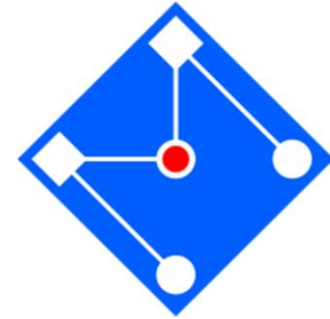
$$G(j\omega) = \frac{G_2(j\omega)}{G_1(j\omega)} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|G_2(j\omega)|}{|G_1(j\omega)|} = 1$$

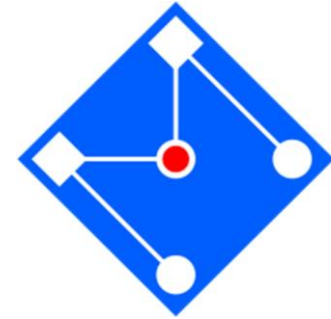
$$\begin{aligned}\angle G(j\omega) &= -\text{atan } \omega\tau + \text{atan}(-\omega\tau) \\ &= -2 \text{atan } \omega\tau\end{aligned}$$

O modulo é sempre unidade. O ângulo de fase, no entanto, varia de 0° a 180°, à medida que ω varia de 0 a infinito.





Os valores dos ângulos de fase são menores para o sistema de fase mínima $G_1(j\omega)$ para todas as frequências



SISTEMAS DE FASE MÍNIMA E NÃO MÍNIMA

Para sistemas de fase mínima, as características de módulo e de ângulo de fase estão relacionadas univocamente.

- Se a curva de módulo de um sistema for especificada para toda a gama de valores de frequência de zero a infinito, a curva de ângulo de fase será determinada de forma única e vice-versa
- Isto não ocorre para sistemas de fase não-mínima.

SISTEMAS DE FASE MÍNIMA E NÃO MÍNIMA



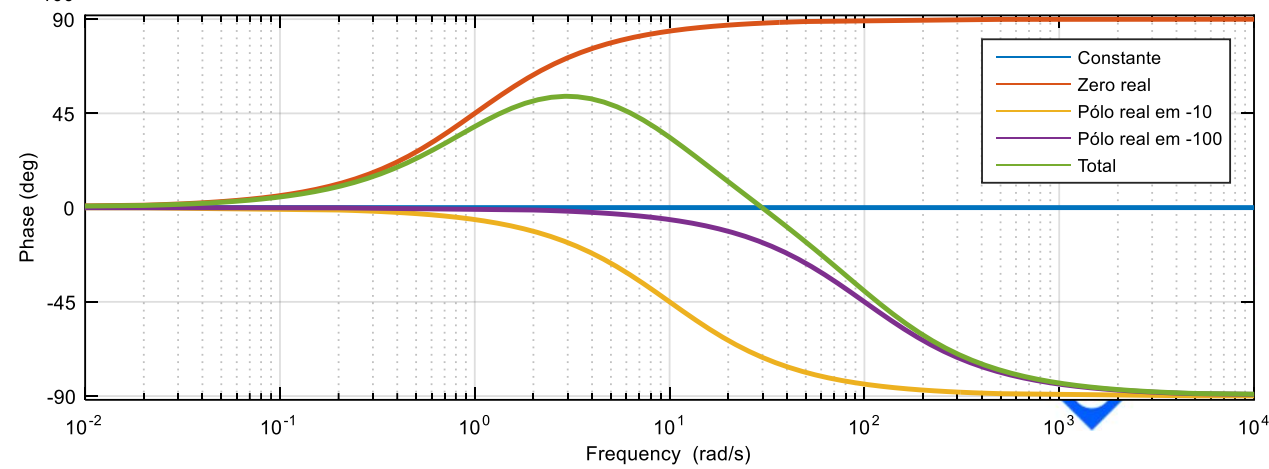
Para sistemas de fase mínima:

- O ângulo de fase em $\omega \rightarrow \infty$ tende a $-90^0(p - q)$, onde p e q são os graus dos polinômios do numerador e do denominador da função de transferência, respectivamente.

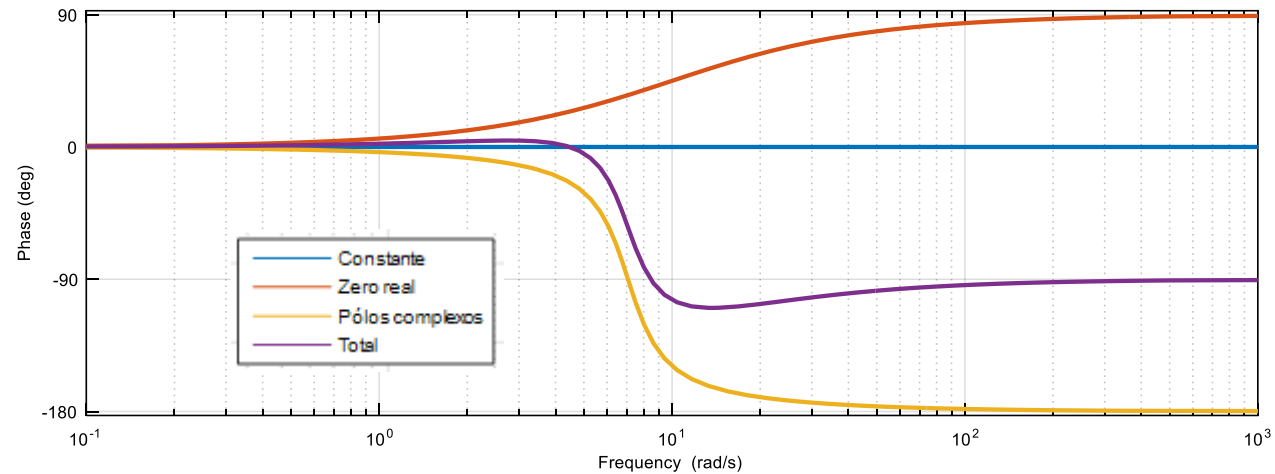
Em qualquer dos dois sistemas:

- A inclinação da curva de módulo em dB em $\omega \rightarrow \infty$ tende a $-20^0(p - q)/\text{década}$.

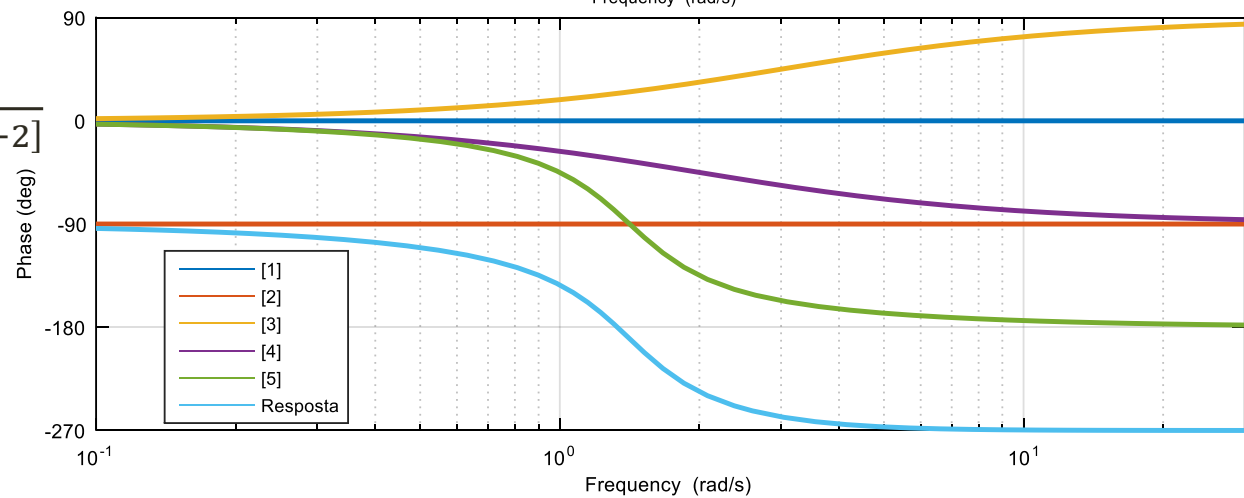
$$H(s) = 100 \frac{s+1}{s^2+110s+1000}$$

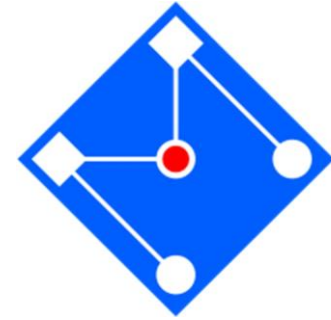


$$H(s) = 30 \frac{s+10}{s^2+3s+50}$$



$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega+3)}{(j\omega)(j\omega+2)[(j\omega)^2+j\omega+2]}$$





RETARDO NO TRANSPORTE

Tem comportamento de fase não-mínima e apresenta atraso excessivo, sem atenuação nas altas frequências.

Esses retardos de transporte normalmente ocorrem nos sistemas térmicos, hidráulicos e pneumáticos.



RETARDO NO TRANSPORTE

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

O módulo é sempre igual à unidade,

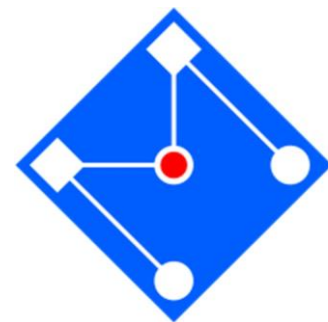
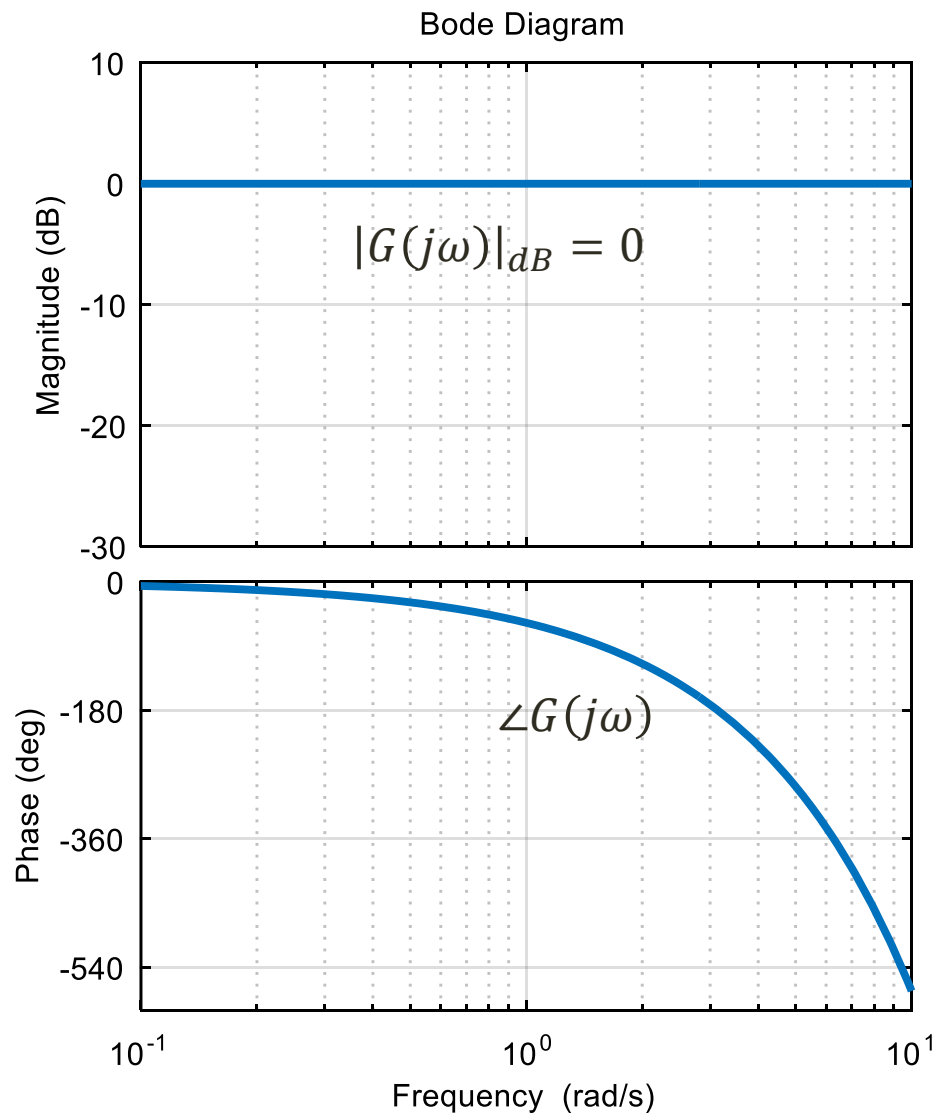
$$|G(j\omega)| = |\cos \omega T - j \sin \omega T| = 1$$

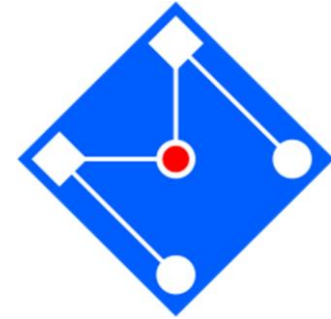
Portanto, o módulo em dB do retardo de transporte $e^{-j\omega T}$ é $|G(j\omega)|_{dB} = 0$ dB.

O ângulo de fase é

$$\angle G(j\omega) = -\omega T \text{ (radianos)}$$

$$\angle G(j\omega) = -\frac{180}{\pi} \omega T \text{ (graus)}$$





EXEMPLO

Construa o diagrama de Bode da seguinte função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

O módulo em dB

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log|e^{-j\omega L}| + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

$$= 0 + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

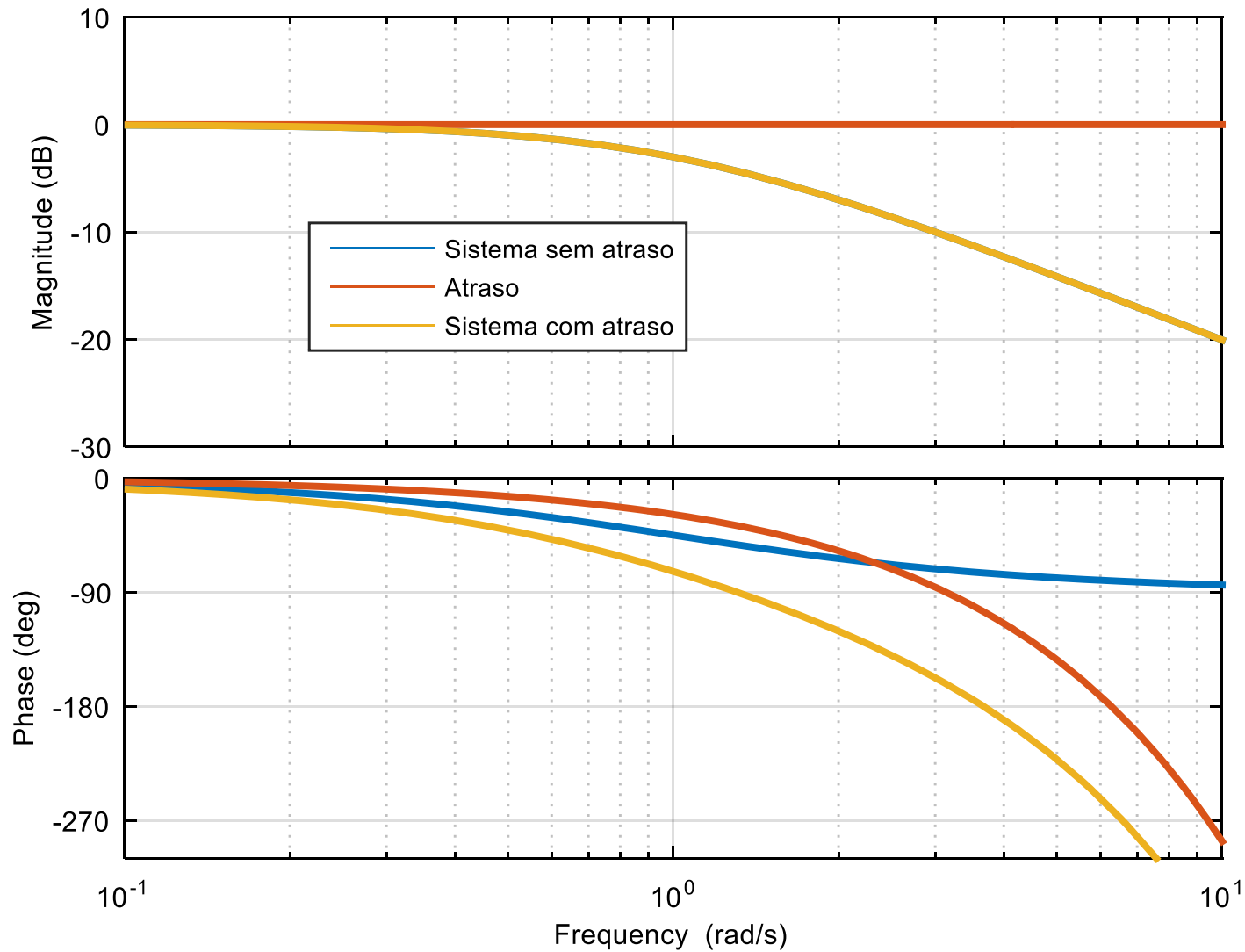
O ângulo de fase é

$$\angle G(j\omega) = -\omega L - \text{atan } \omega T$$

Portanto, basta combinar o efeito do retardo,
ie, um decréscimo em fase...



Bode Diagram

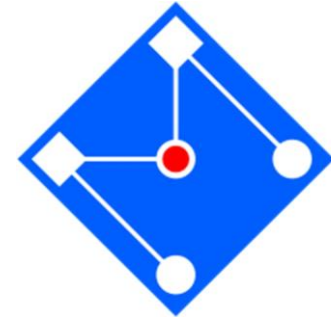


$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

$$L = 0,5$$

$$T = 1$$

COMO FAZER NO MATLAB?



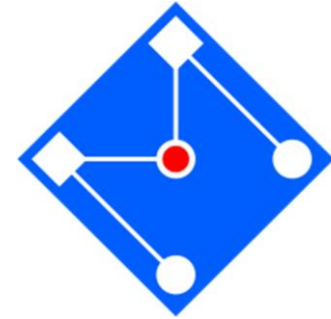
```
close all; clear all; clc
```

```
opts = bodeoptions;  
opts.PhaseMatching='on'  
opts.YLim = {[ -30,10];[ -300,0]};  
opts.YLimMode = {'manual';'manual'};  
opts.Xlim = {[0.1,10]};  
opts.XLimMode = {'manual'};
```

```
opts.Grid='on'  
sys1=tf(1,[1 1]) % sys1 = 1/(1s + 1) - sem retardo  
sys3=tf(1,1,'iodelay',0.5) % retardo de 0.5s  
sys2=tf(1,[1 1],'iodelay',0.5) % sys2 = exp(-0.5s) * h - "h" com retardo  
bode(sys1,opts); hold on  
bode(sys3,opts); hold on  
bode(sys2,opts); hold on
```

```
legend('Sistema sem atraso','Atraso','Sistema com atraso')
```

```
h = findobj(gcf,'type','line');  
set(h,'linewidth',2);
```



CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DE BODE COM O MATLAB

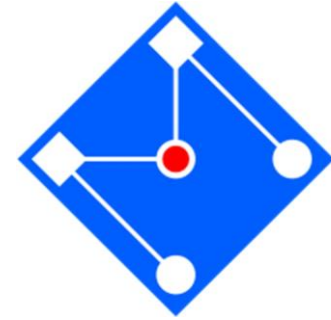
Os comandos bode utilizados com maior frequência são,

```
bode(num,den)
bode(num,den,w)
bode(A,B,C,D)
bode(A,B,C,D,w)
bode(sys)
```

Quando for executado com argumentos do lado esquerdo, como

```
[mag,phase,w] = bode(num,den)
[mag,phase,w] = bode(num,den,w)
[mag,phase,w] = bode(A,B,C,D)
[mag,phase,w] = bode(A,B,C,D,w)
[mag,phase,w] = bode(A,B,C,D,iu,w)
[mag,phase,w] = bode(sys)
```

Resposta em frequência do sistema.
O módulo pode ser convertido para decibéis por nossa conhecida fórmula,
 $magdB = 20 \log_{10}(mag)$



CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DE BODE COM O MATLAB

Para especificar faixa de frequência,

`logspaced(d1, d2)`

Gera um vetor de 50 pontos igualmente espaçados em uma escala logarítmica entre as décadas 10^{d1} e 10^{d2}

Ex.: 50 pontos entre 0,1 e 100 rad/s:

`w=logspaced(-1, 2)`

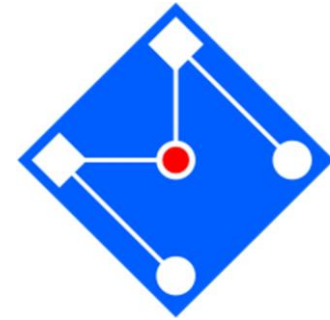
ou

`logspaced(d1, d2, n)`

Gera um vetor de n pontos igualmente espaçados em uma escala logarítmica entre as décadas 10^{d1} e 10^{d2}

Ex.: 200 pontos entre 1 e 1000 rad/s:

`w=logspaced(0, 3, 200)`



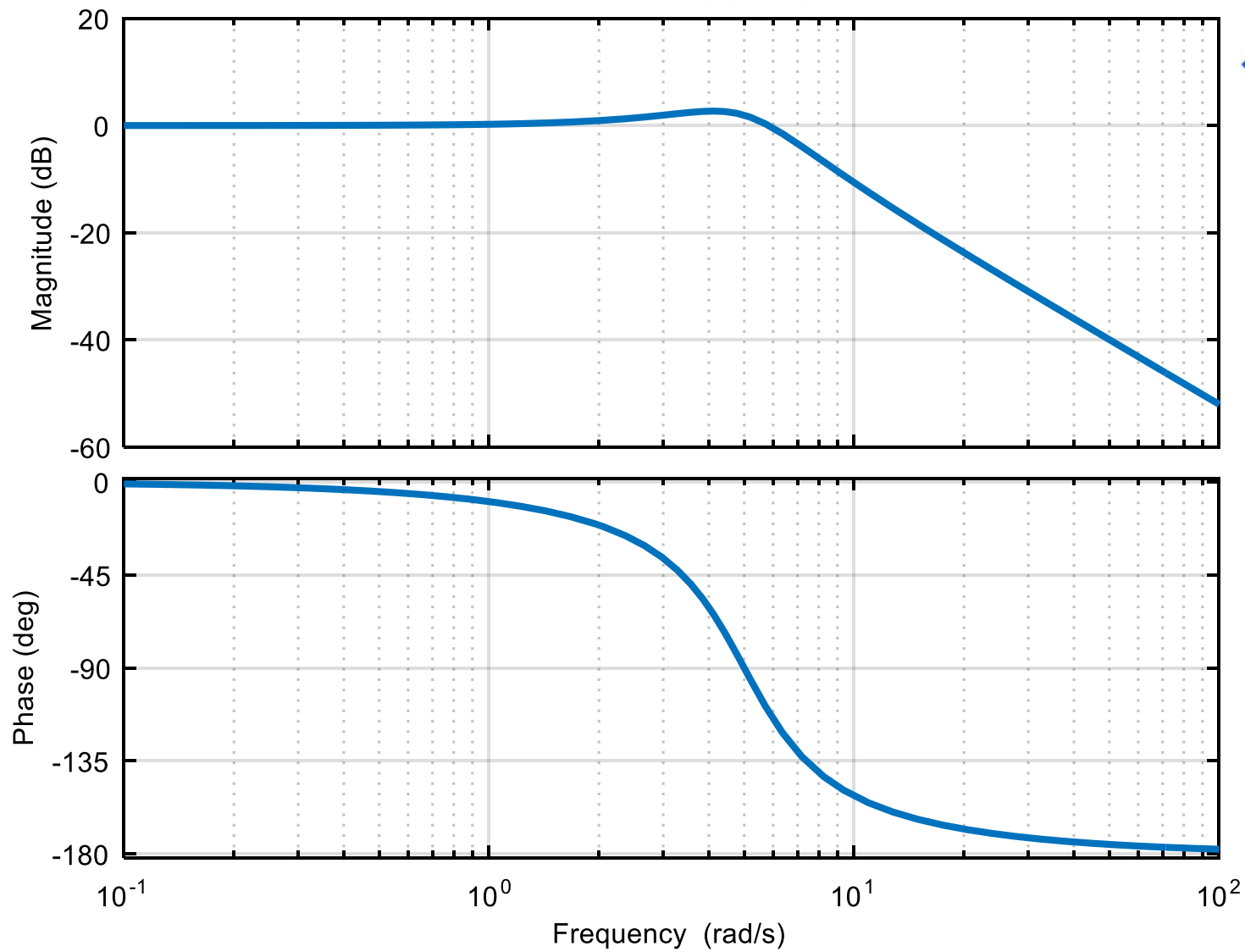
EXEMPLO

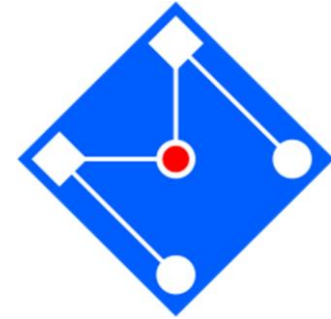
Construa o diagrama de Bode para a função de transferência,

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

```
opts = bodeoptions;  
opts.PhaseMatching='on'  
opts.Grid='on'  
  
num=[0 0 25]; % ou num=[25]  
den=[1 4 25];  
bode(num,den,opts)  
title('Diagrama de Bode de G(s)=25/(s^2+4s+25)')
```

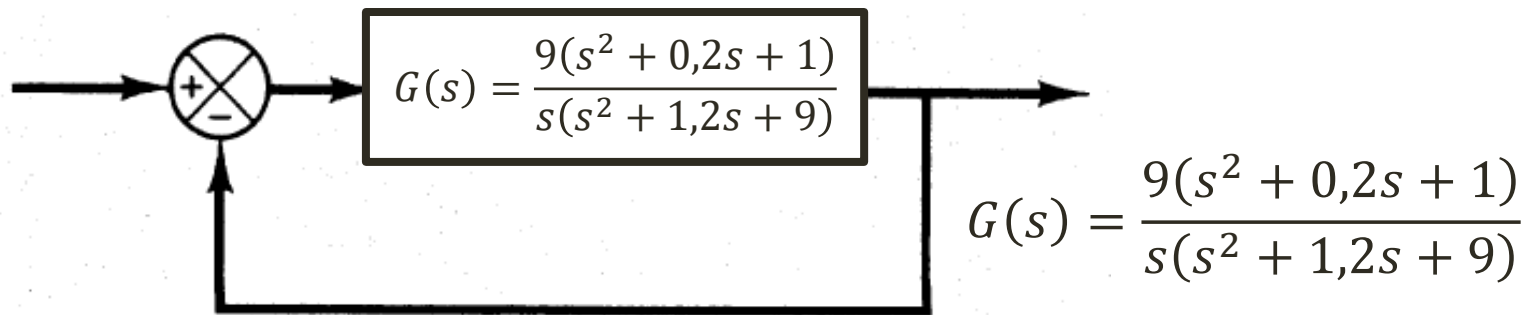

Diagrama de Bode de $G(s)=25/(s^2+4s+25)$





EXEMPLO

Trace o diagrama de Bode da função de transferência de malha aberta, $G(s)$,



```
num=[9 1.8 9]
den=[1 1.2 9 0]
bode(num,den)
title('Diagrama de Bode de G(s)=9(s^2+0.2s+1)/[s(s^2+1.2s+9)']
```

Diagrama de Bode de $G(s)=9(s^2+0.2s+1)/[s(s^2+1.2s+9)]$

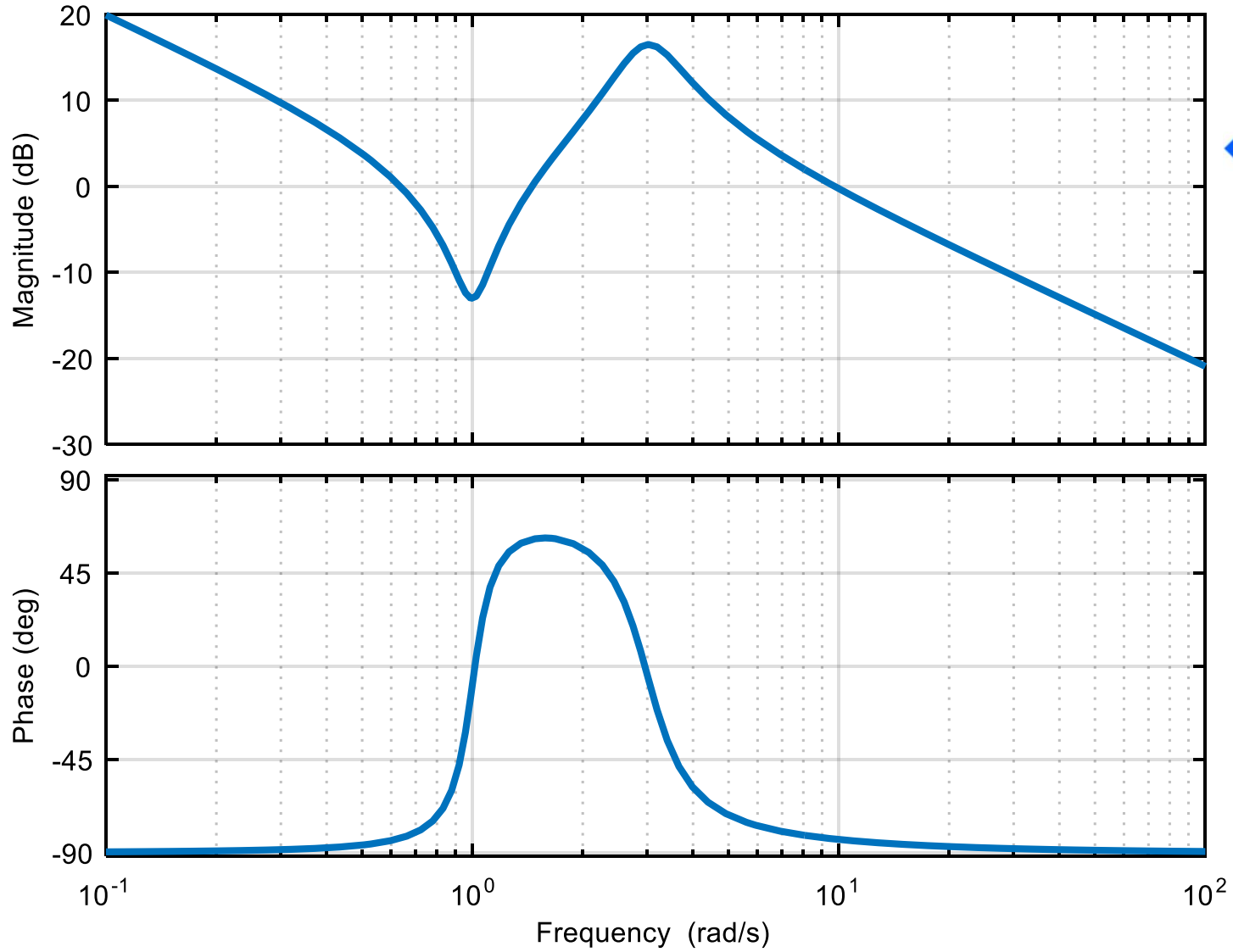
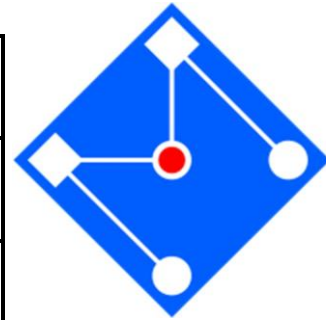
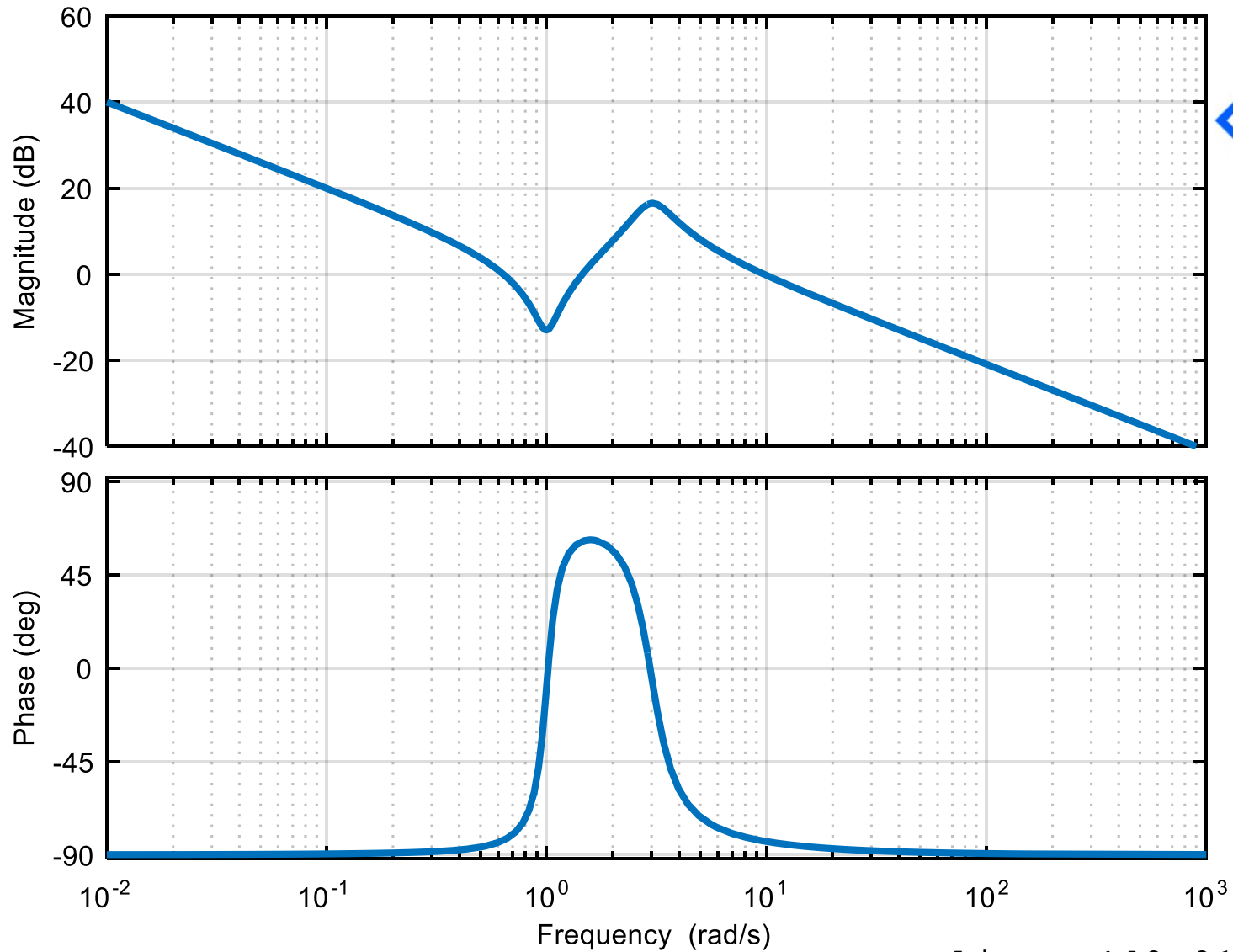
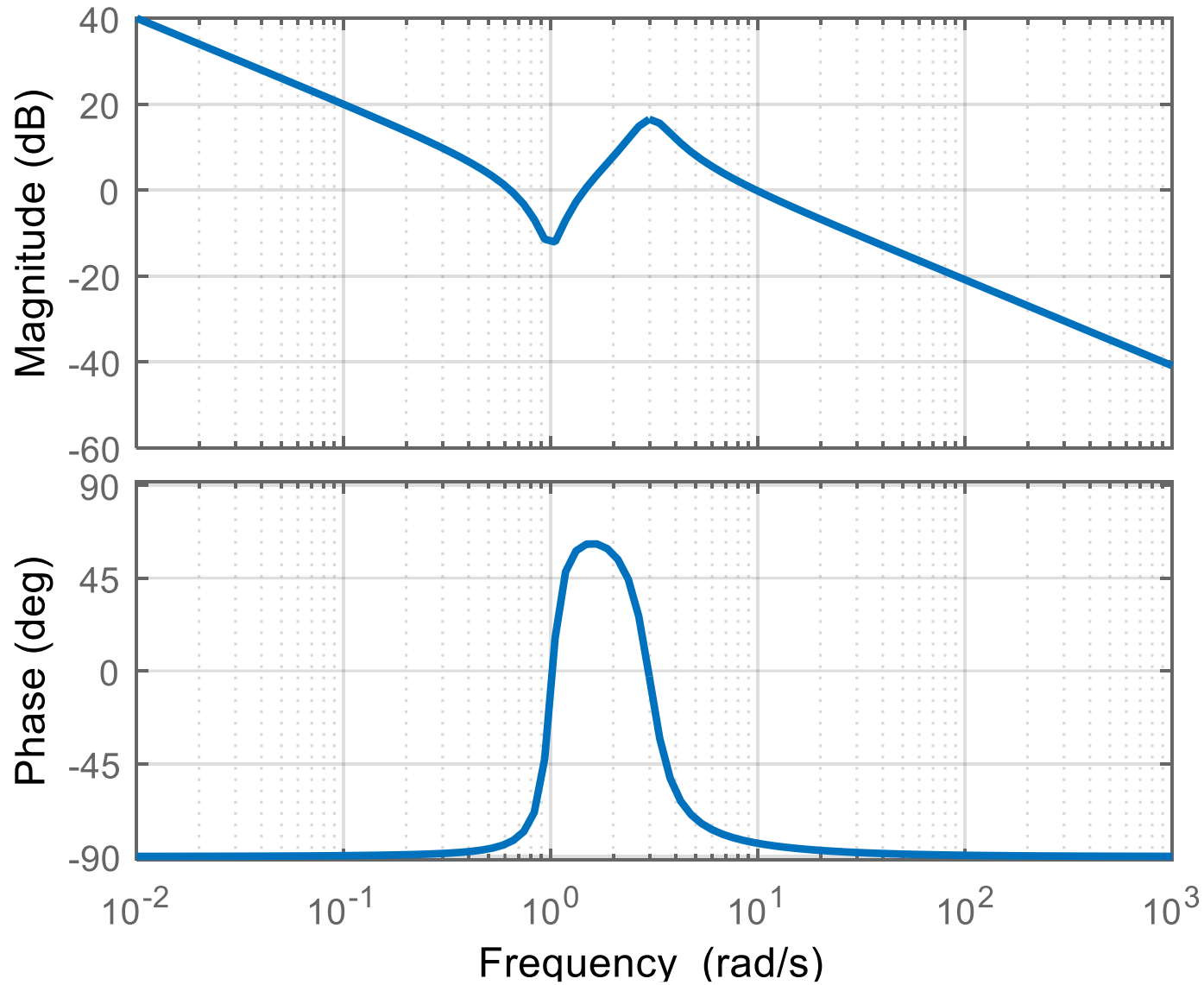


Diagrama de Bode de $G(s)=9(s^2+0.2s+1)/[s(s^2+1.2s+9)]$



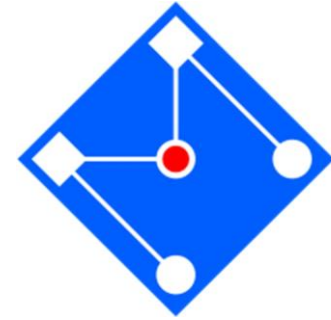
```
opts.Xlim = {[0.01,100]};
opts.XLimMode = {'manual'};
bode(num,den,opts)
```

Diagrama de Bode de $G(s)=9(s^2+0.2s+1)/[s(s^2+1.2s+9)]$



```
w=logspace(-2,3,100);
bode(num,den,w)
```

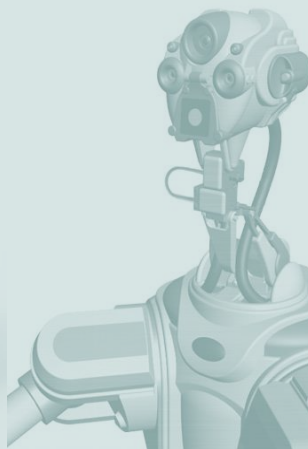
SITES ONDE VOCÊ PODE ESTUDAR...



<https://www.youtube.com/watch?v=CSAp9ooQRT0>

<https://www.youtube.com/watch?v=E6R2XUEyRy0>

<https://www.youtube.com/watch?v=4d4WJdU61Js>



FIM