

Análise Matricial de Estruturas - Exemplos

Edgard S. Almeida Neto e Henrique de Britto Costa

Escola Politécnica da USP

15 de Junho de 2017

Conteúdo

1	Treliças	1
1.1	Exemplos	3
2	Pórticos Planos	14
2.1	Barra Biengastada	15
2.1.1	Matriz de Rigidez	15
2.1.2	Esforços de Engastamento Perfeito	15
2.2	Barra Engastada-Articulada	16
2.2.1	Matriz de Rigidez	16
2.2.2	Esforços de Engastamento Perfeito	16
2.3	Barra Articulada-Engastada	18
2.3.1	Matriz de Rigidez	18
2.3.2	Esforços de Engastamento Perfeito	18
2.4	Exemplos	19

1 Treliças

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t}_e \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right] \quad (1)$$

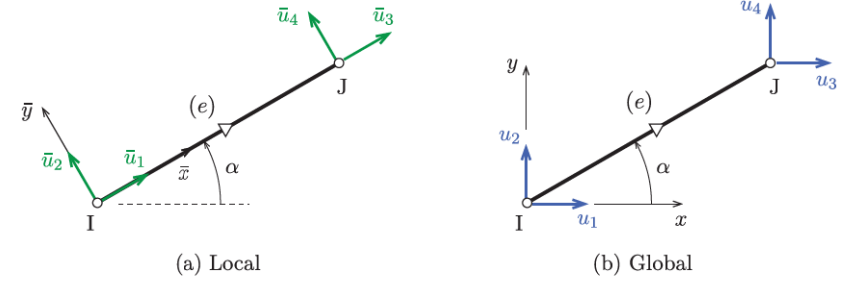


Fig. 1: Barra de treliça — Sistemas (a) local e (b) global de coordenadas.

O seno e o cosseno do ângulo α_e formado pela barra com a direção do eixo global x são dados pelas fórmulas:

$$\cos \alpha_e = \frac{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}}{\ell_e}, \quad \sin \alpha_e = \frac{y_2^{(e)} - y_1^{(e)}}{\ell_e}, \quad (2)$$

em que $(x_1^{(e)}, y_1^{(e)})$ e $(x_2^{(e)}, y_2^{(e)})$ são as coordenadas dos nós inicial e final da barra e .

A matriz de rigidez da treliça no sistema local de coordenadas é dada por

$$\bar{\mathbf{k}}_e = \frac{EA}{\ell} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3)$$

Enquanto matriz de rigidez da treliça no sistema global é dada por

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{k}}_e \mathbf{T}_e, \quad (4)$$

ou na forma explícita,

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{\ell} \left[\begin{array}{cc|cc} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ \hline -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{array} \right] \quad (5)$$

No sistema local, as forças nodais são dadas pelo produto

$$\bar{\mathbf{f}}_e = \bar{\mathbf{k}}_e \bar{\mathbf{u}}_e,$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_1^{(e)} \\ \bar{f}_2^{(e)} \\ \bar{f}_3^{(e)} \\ \bar{f}_4^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(e)} \\ \bar{u}_2^{(e)} \\ \bar{u}_3^{(e)} \\ \bar{u}_4^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(e)} - \bar{u}_3^{(e)} \\ 0 \\ \bar{u}_3^{(e)} - \bar{u}_1^{(e)} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O produto acima pode ser evitado, calculando diretamente a força normal na barra

$$N_e = -\bar{f}_1^{(e)} = \bar{f}_3^{(e)} = \frac{EA}{\ell} (\bar{u}_3^{(e)} - \bar{u}_1^{(e)}). \quad (6)$$

1.1 Exemplos

Exemplo 1 (Matriz reduzida) Para a treliça ao lado, formada por barras com o mesmo produto axial de inércia $EA = 1 \times 10^5$ kN, determine os deslocamentos nodais e as reações de apoio; e trace o diagrama das forças normais.

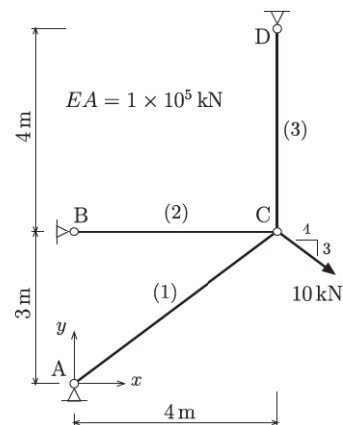


Fig. E1: Treliça com três barras.

SOLUÇÃO

1) Numeração dos deslocamentos nodais

As matrizes LM_e dependem da orientação das barras e da numeração dos deslocamentos nodais indicadas na Fig. E1-1.

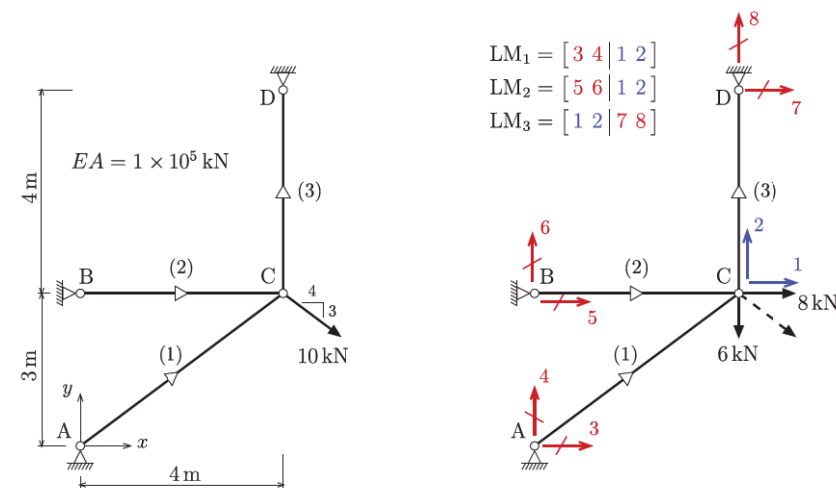


Fig. E1-1: Orientação das barras e numeração dos graus de liberdade.

2) Matriz de rigidez das barras

Para o cálculo da matriz de rigidez são necessários o coeficiente EA/ℓ_e e a inclinação da barra.

$$\frac{EA}{\ell_1} = \frac{1 \times 10^5}{5} = 2,0 \times 10^4 \text{ kN/m}, \quad \frac{EA}{\ell_2} = \frac{EA}{\ell_3} = \frac{1 \times 10^5}{4} = 2,5 \times 10^4 \text{ kN/m}.$$

As Eqs. (2) fornecem o seno e cosseno do ângulo α_e em função das coordenadas dos nós. A matriz de transformação e as matrizes de rigidez da barra nos sistemas local e global são dadas pelas Eqs. (1), (3) e (4). O emprego da forma explícita da matriz no sistema global, Eq. (5), requer os valores tabelados a seguir:

e	$\cos \alpha_e$	$\sin \alpha_e$	$\cos^2 \alpha_e$	$\sin^2 \alpha_e$	$\cos \alpha_e \sin \alpha_e$
1	0,8	0,6	0,64	0,36	0,48
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	0

Multiplicando os valores pelos coeficientes EA/ℓ e colocando 10^4 em evidência, chegamos aos coeficientes apresentados nas matrizes,

e	$\frac{EA}{\ell} \cos^2 \alpha_e$	$\frac{EA}{\ell} \sin^2 \alpha_e$	$\frac{EA}{\ell} \cos \alpha_e \sin \alpha_e$	
1	1,28	0,72	0,96	$\times 10^4$
2	2,5	0	0	
3	0	2,5	0	

- Barra 1

$$\mathbf{k}_1 = 10^4 \begin{array}{cc|cc} [3] & [4] & 1 & 2 \\ \hline 1,28 & 0,96 & -1,28 & -0,96 \\ 0,96 & 0,72 & -0,96 & -0,72 \\ \hline -1,28 & -0,96 & 1,28 & 0,96 \\ -0,96 & -0,72 & 0,96 & 0,72 \end{array} \begin{array}{l} [3] \\ [4] \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

O posicionamento do vetor LM_1 junto à matriz $\mathbf{k}_1$ visa facilitar a montagem direta da matriz da estrutura.

- Barra 2

O sistema local da barra coincide com o sistema global, assim

$$\mathbf{k}_2 = \bar{\mathbf{k}}_2 = 10^4 \begin{array}{cc|cc} [5] & [6] & 1 & 2 \\ \hline 2,50 & 0,00 & -2,50 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ \hline -2,50 & 0,00 & 2,50 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{array} \begin{array}{l} [5] \\ [6] \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

- Barra 3

$$\mathbf{k}_3 = 10^4 \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & [7] & [8] \\ \hline 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 2,50 & 0,00 & -2,50 \\ \hline 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -2,50 & 0,00 & 2,50 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ [7] \\ [8] \end{array}$$

Repare que para $\alpha_3 = 90^\circ$, os coeficientes não-nulos nas linhas e colunas ímpares saltam uma posição na diagonal para linhas e colunas pares.

3) Montagem da matriz de rigidez reduzida da estrutura

Como não há deslocamento imposto e as reações de apoio são iguais às forças nas barras, é fácil resolver o problema apenas com a matriz reduzida da estrutura,

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}.$$

Empregando a numeração dos graus livres 1 e 2 indicados nas matrizes das barras no sistema global e considerando a simetria da matriz, temos

$$\begin{aligned} K_{11} &= k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)} + k_{11}^{(3)} = (1,28 + 2,50 + 0) \times 10^4 = 3,78 \times 10^4 \\ K_{12} &= k_{34}^{(1)} + k_{34}^{(2)} + k_{12}^{(3)} = (0,96 + 0 + 0) \times 10^4 = 0,96 \times 10^4 = K_{21} \\ K_{22} &= k_{44}^{(1)} + k_{44}^{(2)} + k_{22}^{(3)} = (0,72 + 0 + 2,50) \times 10^4 = 3,22 \times 10^4 \end{aligned}$$

O espalhamento simplifica-se quando percorremos os elementos das matrizes $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ e $\mathbf{k}_3$, e os acrescentamos diretamente à matriz $\mathbf{K}_{aa}$,

$$\mathbf{K}_{aa} = 10^4 \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 1,28 + 2,50 + 0 & 0,96 + 0 + 0 \\ \text{Sim.} & 0,72 + 0 + 2,50 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} = 10^4 \begin{bmatrix} 3,780 & 0,960 \\ 0,960 & 3,220 \end{bmatrix}.$$

4) Vetor de esforços nodais da estrutura, Fig. E 1-1

$$\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

5) Resolução do sistema de equações $\mathbf{K}_{aa}\mathbf{U}_a = \mathbf{F}_a$

$$10^4 \begin{bmatrix} 3,780 & 0,960 \\ 0,960 & 3,220 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{U}_a = 10^{-4} \begin{bmatrix} 2,802 \\ -2,699 \end{bmatrix} \text{ m}$$

6) Esforços de extremidade e diagramas de estado

As matrizes de incidência LM_e possibilitam a montagem dos vetores dos deslocamentos

das barras no sistema global,

$$\mathbf{u}_1 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 2,802 \\ -2,699 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \mathbf{u}_2 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 2,802 \\ -2,699 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \mathbf{u}_3 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 2,802 \\ -2,699 \\ 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Os produtos pelas matrizes de transformação $\mathbf{T}_e$ seguidos dos produtos pelas matrizes de rigidez $\bar{\mathbf{k}}_e$ fornecem os esforços de extremidade das barras. Repare que o equilíbrio das barras requer forças axiais iguais e de sinais contrários.

• Barra 1

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0,0 & 0,0 \\ -0,6 & 0,8 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,8 & 0,6 \\ 0,0 & 0,0 & -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 2,802 \\ -2,699 \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 0,622 \\ -3,840 \end{bmatrix};$$

O emprego da Eq. (6) fornece a força normal além das forças de extremidade,

$$N_1 = -\bar{f}_1^{(1)} = \bar{f}_3^{(1)} = \frac{EA}{\ell_1} (\bar{u}_3^{(1)} - \bar{u}_1^{(1)}) = 2,00 \times 10^4 (0,622 - 0) \times 10^{-4} = 1,244 \text{ kN}.$$

• Barra 2

$$\bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{u}_2 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 2,802 \\ -2,699 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \frac{EA}{\ell_2} (\bar{u}_3^{(2)} - \bar{u}_1^{(2)}) = 7,004 \text{ kN}.$$

• Barra 3

$$\bar{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{T}_3 \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4} \begin{bmatrix} 2,802 \\ -2,699 \\ 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} -2,699 \\ -2,802 \\ 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix},$$

$$N_3 = \frac{EA}{\ell_3} (\bar{u}_3^{(3)} - \bar{u}_1^{(3)}) = 6,747 \text{ kN}.$$

7) Diagrama de forças normais e reações de apoio

As reações de apoio podem ser obtidas facilmente a partir das forças normais nas barras, como mostrado na Fig. E 1-2.

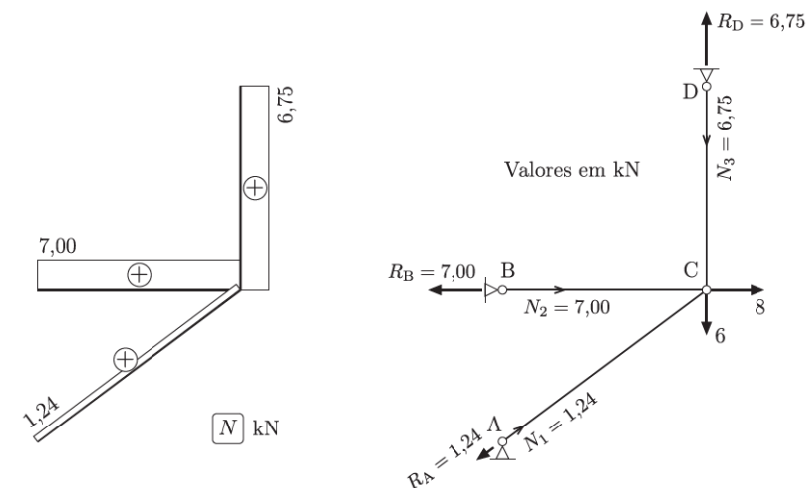


Fig. E 1-2: Diagrama de N e reações.

Exemplo 2 (Deslocamento imposto)

Para a treliça sujeita a um deslocamento imposto δ , determine os deslocamentos nodais, as forças normais nas barras e as reações de apoio. As propriedades geométricas das barras estão resumidas na tabela.

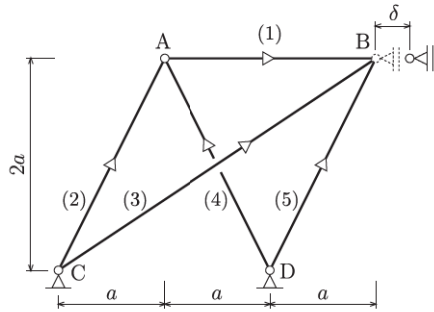
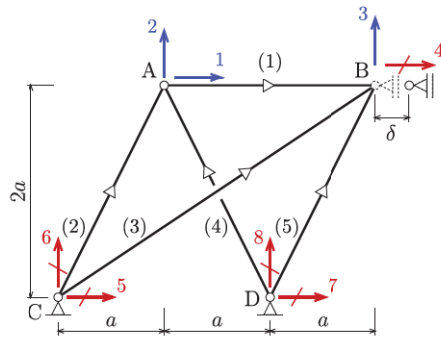


Fig. E 2: Deslocamento imposto.

SOLUÇÃO

1) Numeração dos graus de liberdade

A numeração dos deslocamentos nodais da estrutura e as matrizes LM_e das barras estão indicadas na Fig. E 2-1.



$$\begin{aligned} LM_1 &= [1 \ 2 | 4 \ 3] \\ LM_2 &= [5 \ 6 | 1 \ 2] \\ LM_3 &= [5 \ 6 | 4 \ 3] \\ LM_4 &= [7 \ 8 | 1 \ 2] \\ LM_5 &= [7 \ 8 | 4 \ 3] \end{aligned}$$

Fig. E 2-1: Numeração dos deslocamentos nodais.

2) Matriz de rigidez das barras

A matriz de rigidez no sistema local é a mesma para todas as barras em virtude da igualdade das relações entre comprimento da barra e área da seção,

$$\bar{k}_e = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e = 1, \dots, 5.$$

O emprego da forma explícita da matriz no sistema global, Eq. (5), requer os seguintes

valores:

e	$\cos^2 \alpha_e$	$\sin^2 \alpha_e$	$\cos \alpha_e \sin \alpha_e$
1	1	0	0
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$
3	$\frac{9}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{6}{13}$
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$

Apenas os coeficientes associados aos deslocamentos livres ou ao imposto são necessários para o cálculo dos deslocamentos nodais. Os demais coeficientes estão representados por pontos nas matrizes das barras e da estrutura visando minorar as multiplicações por zero.

$$k_1 = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 2 & [4] & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ [4] \\ 3 \end{matrix} \quad k_2 = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} [5] & [6] & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \cdot & \cdot & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{matrix} [5] \\ [6] \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$k_3 = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} [5] & [6] & [4] & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{9}{13} & \frac{6}{13} \\ \cdot & \cdot & \frac{6}{13} & \frac{4}{13} \end{bmatrix} \begin{matrix} [5] \\ [6] \\ [4] \\ 3 \end{matrix} \quad k_4 = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} [7] & [8] & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \cdot & \cdot & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{matrix} [7] \\ [8] \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$k_5 = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} [7] & [8] & [4] & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \cdot & \cdot & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{matrix} [7] \\ [8] \\ [4] \\ 3 \end{matrix}$$

3) Montagem da matriz de rigidez da estrutura

Quando as reações são calculadas a partir das forças normais nas barras, podemos reduzir a montagem da matriz de rigidez aos coeficientes da matriz reduzida K_{aa} e aos da coluna

da matriz $\mathbf{K}_{ab}$ associada ao grau bloqueado de número 4,

$$\mathbf{K}^* = \frac{EA}{a} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} & 0 + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} & 0 & -1 \\ \hline & 0 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \hline \text{Sim.} & & 0 + \frac{4}{13} + \frac{4}{5} & 0 + \frac{6}{13} + \frac{2}{5} \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

A partição das três primeiras colunas da matriz de rigidez fornece,

$$\mathbf{K}_{aa} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{72}{65} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{ab} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} -1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{56}{65} & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

4) Vetores das forças e dos deslocamentos nodais da estrutura

O vetor reduzido das forças nodais na estrutura é nulo enquanto o vetor dos deslocamentos bloqueados tem apenas um coeficiente diferente de zero,

$$\mathbf{F}_a^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_b^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

5) Cálculo dos deslocamentos

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{K}_{aa}^{-1} (\mathbf{F}_a - \mathbf{K}_{ab} \mathbf{U}_b)$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \frac{a}{EA} \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{65}{72} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{56}{65} \end{bmatrix} \delta \right) = \delta \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ 0 \\ -\frac{56}{72} \end{bmatrix}.$$

6) Vetores dos deslocamentos e das forças nodais das barras

As matrizes de incidência $\mathbf{LM}_e$ possibilitam a montagem dos vetores dos deslocamentos das barras no sistema global. Para a primeira barra, os deslocamentos são os mesmos nos

sistemas global e local, o que facilita o cálculo da força normal

$$\mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1 = \delta \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{56}{72} \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ [4] \\ 3 \end{array} \quad N_1 = \frac{EA}{a} (u_3^{(1)} - u_1^{(1)}) = \frac{\delta EA}{a} \left(1 - \frac{5}{7}\right) = \frac{2\delta EA}{7a} = 0,2857 \frac{\delta EA}{a}.$$

Os produtos dos demais vetores $\mathbf{u}_e$ pelas respectivas matrizes de transformação $\mathbf{T}_e$ fornecem os vetores $\bar{\mathbf{u}}_e$ nos sistemas locais,

$$\bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{T}_2 \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cdot & \cdot & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \frac{5}{7} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} [5] \\ [6] \\ 1 \\ 2 \end{array} = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{7} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{7} \end{bmatrix};$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{5} \delta EA}{7a} = 0,3194 \frac{\delta EA}{a}.$$

$$\bar{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{T}_3 \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \cdot & \cdot & -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ -\frac{56}{72} \end{bmatrix} \begin{array}{l} [5] \\ [6] \\ [4] \\ 3 \end{array} = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{13}}{9} \\ -\frac{\sqrt{13}}{3} \end{bmatrix};$$

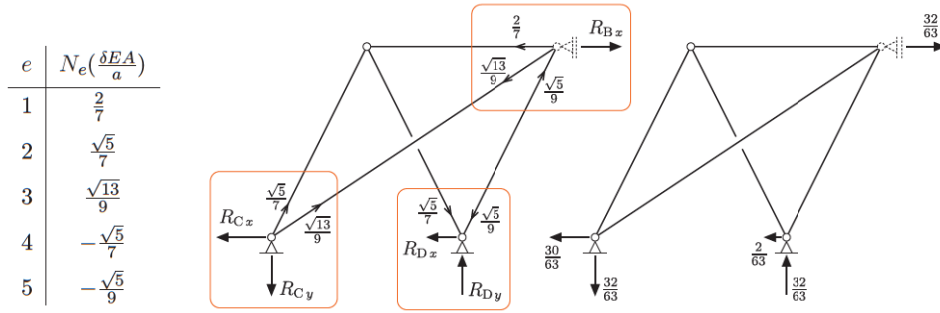
$$N_3 = \frac{\sqrt{13} \delta EA}{9a} = 0,4006 \frac{\delta EA}{a}.$$

$$\bar{\mathbf{u}}_4 = \mathbf{T}_4 \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cdot & \cdot & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \frac{5}{7} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} [7] \\ [8] \\ 1 \\ 2 \end{array} = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{7} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{7} \end{bmatrix};$$

$$N_4 = -\frac{\sqrt{5} \delta EA}{7a} = -0,3194 \frac{\delta EA}{a}.$$

$$\bar{\mathbf{u}}_5 = \mathbf{T}_5 \mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cdot & \cdot & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ -\frac{56}{72} \end{bmatrix} \begin{matrix} [7] \\ [8] \\ [4] \\ 3 \end{matrix} = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{9} \\ -\frac{11\sqrt{5}}{45} \end{bmatrix};$$

$$N_5 = -\frac{\sqrt{5}}{9} \frac{\delta EA}{a} = -0,2485 \frac{\delta EA}{a}.$$

Fig. E 2-2: Reações de apoio ($\frac{\delta EA}{a}$).

7) Reações de apoio

Do equilíbrio dos nós da Fig. E 2-2, temos

$$R_{Cx} = \left(\frac{\sqrt{5}}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{13}}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \right) \frac{\delta EA}{a} = \frac{30}{63} \frac{\delta EA}{a}, \quad R_{Cy} = \left(\frac{\sqrt{5}}{7} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{13}}{9} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \right) \frac{\delta EA}{a} = \frac{32}{63} \frac{\delta EA}{a},$$

$$R_{Dx} = \left(\frac{\sqrt{5}}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \frac{\delta EA}{a} = \frac{2}{63} \frac{\delta EA}{a}, \quad R_{Dy} = \left(\frac{\sqrt{5}}{7} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{9} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \frac{\delta EA}{a} = \frac{32}{63} \frac{\delta EA}{a},$$

$$R_{Bx} = \left(\frac{2}{7} + \frac{\sqrt{13}}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{5}}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \frac{\delta EA}{a} = \frac{32}{63} \frac{\delta EA}{a}.$$

2 Pórticos Planos

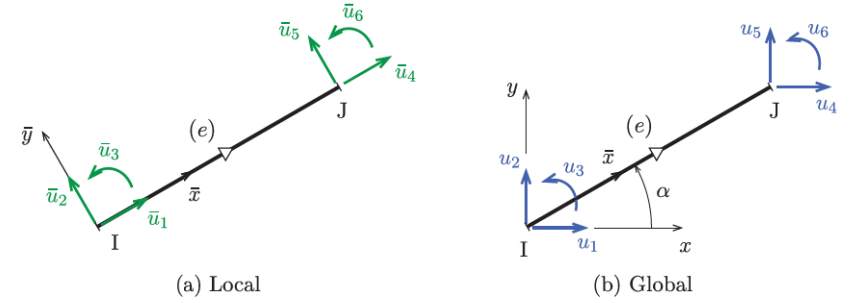


Fig. 2: Barra de pórtico — Sistemas (a) local e (b) global de coordenadas.

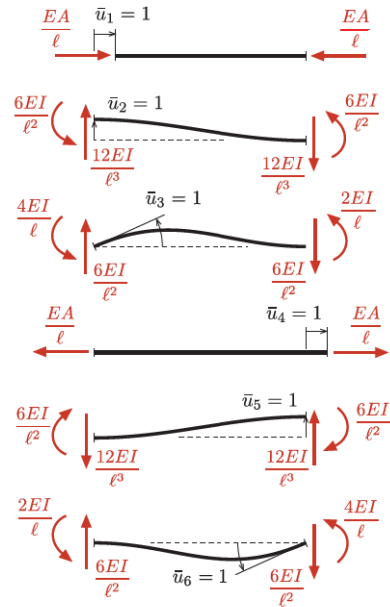
$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

O seno e o cosseno do ângulo α_e formado pela barra com a direção do eixo global x são dados pelas fórmulas na Eq. (2).

2.1 Barra Biengastada

2.1.1 Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez da barra no sistema local de coordenadas é dada por



$$\bar{\mathbf{k}}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \quad (8)$$

2.1.2 Esforços de Engastamento Perfeito

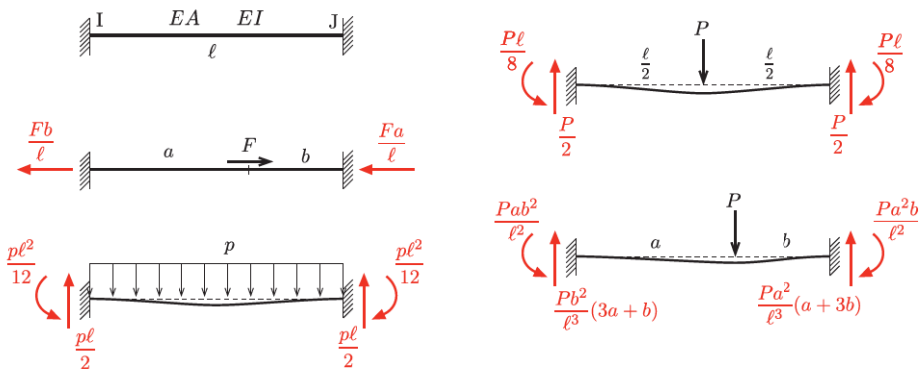


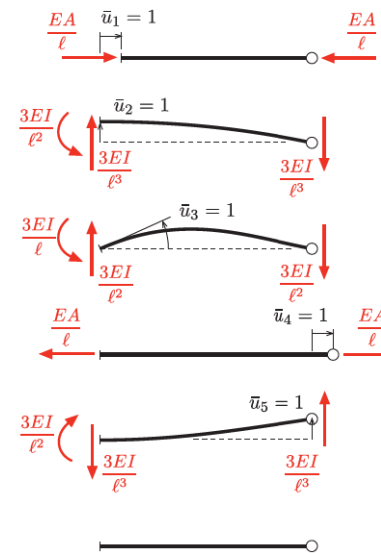
Fig. 3: Esforços de engastamento perfeito para a barra biengastada.

Os valores dos esforços de engastamento perfeito encontram-se na Fig. 3. Os sinais dependem da concordância dos sentidos dos vetores com os dos eixos locais das barras. Por exemplo, para uma força transversal p uniformemente distribuída ao longo da barra e outra concentrada P aplicada no meio do vão, ambas no sentido contrário ao do eixo local, teríamos

$$\bar{\mathbf{f}}_e^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{p\ell}{2} \\ \frac{p\ell^2}{12} \\ 0 \\ \frac{p\ell}{2} \\ -\frac{p\ell^2}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{P\ell}{8} \\ 0 \\ \frac{P}{2} \\ -\frac{P\ell}{8} \end{bmatrix}.$$

2.2 Barra Engastada-Articulada

2.2.1 Matriz de Rigidez



$$\bar{\mathbf{k}}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{\ell^3} & \frac{3EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{3EI}{\ell^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{\ell^2} & \frac{3EI}{\ell} & 0 & -\frac{3EI}{\ell^2} & 0 \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{\ell^3} & -\frac{3EI}{\ell^2} & 0 & \frac{3EI}{\ell^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

2.2.2 Esforços de Engastamento Perfeito

Os valores dos esforços de engastamento perfeito encontram-se na Fig. 4. Para uma força transversal p uniformemente distribuída ao longo da barra e outra concentrada P aplicada no

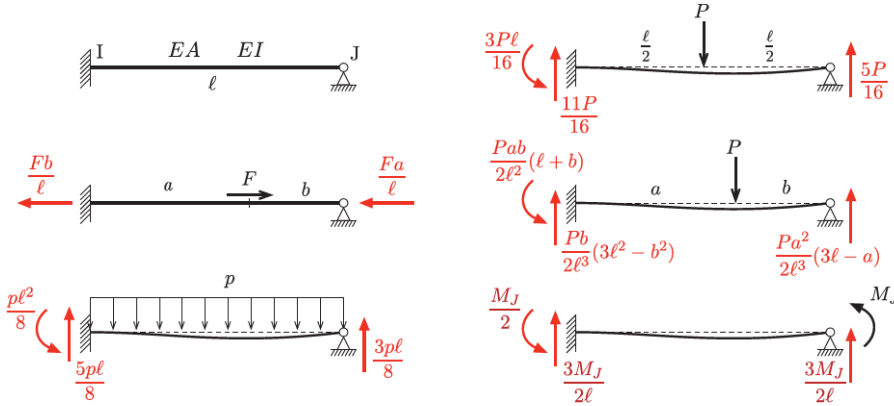


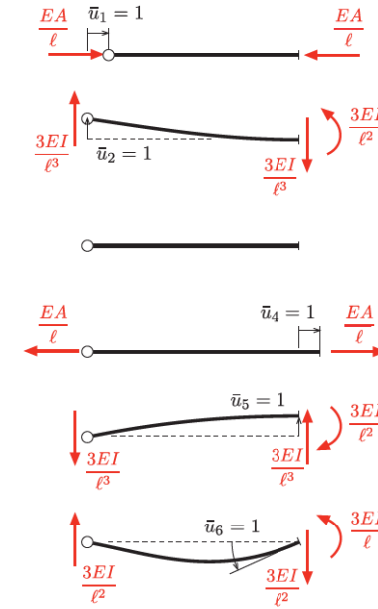
Fig. 4: Esforços de engastamento perfeito para a barra biengastada.

meio do vão, ambas no sentido contrário ao do eixo local, teríamos

$$\bar{\mathbf{f}}_e^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5pl}{8} \\ \frac{pl^2}{8} \\ 0 \\ \frac{3pl}{8} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{11P}{16} \\ \frac{3Pl}{16} \\ 0 \\ \frac{5P}{16} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.3 Barra Articulada-Engastada

2.3.1 Matriz de Rigidez



$$\bar{\mathbf{k}}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.3.2 Esforços de Engastamento Perfeito

Os valores dos esforços podem ser deduzidos da Fig. 4, basta trocar os valores associados às duas extremidades e mudar o sinal do momento. Para as mesmas cargas p e P do item anterior, teríamos

$$\bar{\mathbf{f}}_e^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3pl}{8} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5pl}{8} \\ -\frac{pl^2}{8} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5P}{16} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11P}{16} \\ -\frac{3Pl}{16} \end{bmatrix}.$$

É importante recordar que as reações são sempre maiores do lado engastado.

2.4 Exemplos

Exemplo 3 (Matriz completa e reações)

Para a estrutura sujeita ao carregamento indicado na figura, determine os deslocamentos nodais e as reações de apoio empregando a análise matricial de estruturas; e depois trace os diagramas de esforços solicitantes.

$$E = 50 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$A = 0,02 \text{ m}^2,$$

$$I = 0,0001 \text{ m}^4.$$

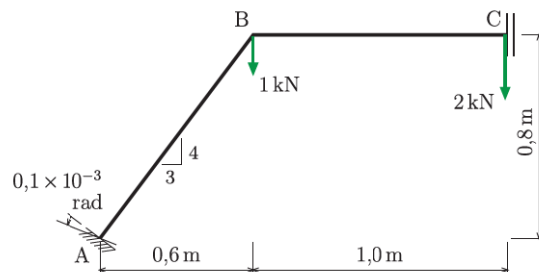


Fig. E 3: Estrutura com duas barras.

SOLUÇÃO

1) Numerações das barras e dos deslocamentos nodais

As numerações das barras e dos deslocamentos nodais, bem como as matrizes LM_e das barras estão indicadas na Fig. E3-1.

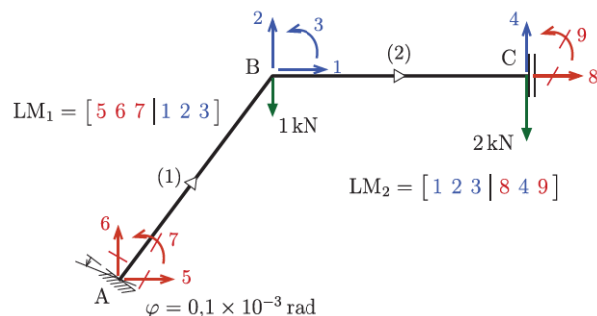


Fig. E 3-i: Orientação das barras e numeração dos graus de liberdade.

2) Matriz de rigidez das barras

As barras possuem matrizes de rigidez iguais nos respectivos sistemas locais pois apenas as inclinações são diferentes. Os seguintes coeficientes aparecem na matriz da barra engastada-engastada:

$$\begin{aligned} EA &= 10 \times 10^5 \text{ kN} \\ EI &= 5 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 \\ \ell &= 1,0 \text{ m} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{EA}{\ell} &= 10 \times 10^5 \text{ kN/m}, & \frac{6EI}{\ell^2} &= 300 \times 10^2 \text{ kN/rad}, \\ \frac{12EI}{\ell^3} &= 600 \times 10^2 \text{ kN/m}, & \frac{4EI}{\ell} &= 200 \times 10^2 \text{ kN m/rad}. \end{aligned} \right.$$

• Barra 1

Matriz de rigidez no sistema local, Eq. (8)

$$\bar{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} = 10^2 \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 300 & 0 & -600 & 300 \\ 0 & 300 & 200 & 0 & -300 & 100 \\ -10000 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & -300 & 0 & 600 & -300 \\ 0 & 300 & 100 & 0 & -300 & 200 \end{bmatrix}.$$

Matriz T_1 de transformação do sistema global para o local, Eq. (7), ($\sin \alpha = 0,8$; $\cos \alpha = 0,6$)

$$t_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 & & & \\ -0,8 & 0,6 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0,6 & 0,8 & 0 \\ & & & -0,8 & 0,6 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz de rigidez no sistema global

$$k_1 = T_1^T \bar{k}_1 T_1 = 10^2 \begin{bmatrix} [5] & [6] & [7] & 1 & 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} 3984 & 4512 & -240 \\ 4512 & 6616 & 180 \\ -240 & 180 & 200 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3984 & -4512 & -240 \\ -4512 & -6616 & 180 \\ 240 & -180 & 100 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3984 & 4512 & 240 \\ 4512 & 6616 & -180 \\ 240 & -180 & 200 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3984 & -4512 & 240 \\ -4512 & -6616 & -180 \\ -240 & 180 & 100 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3984 & 4512 & 240 \\ 4512 & 6616 & -180 \\ 240 & -180 & 200 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3984 & -4512 & -240 \\ -4512 & -6616 & 180 \\ 240 & -180 & 100 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3984 & 4512 & 240 \\ 4512 & 6616 & -180 \\ 240 & -180 & 200 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3984 & -4512 & -240 \\ -4512 & -6616 & 180 \\ 240 & -180 & 100 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3984 & 4512 & 240 \\ 4512 & 6616 & -180 \\ 240 & -180 & 200 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} [5] \\ [6] \\ [7] \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

O posicionamento do vetor LM_1 junto à matriz k_1 facilita a montagem direta da matriz da estrutura.

• Barra 2

Como os sistemas local e global da barra 2 coincidem, temos

$$k_2 = \bar{k}_2 = \bar{k}_1 = 10^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & [8] & 4 & [9] \\ 10000 & 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 300 & 0 & -600 & 300 \\ 0 & 300 & 200 & 0 & -300 & 100 \\ -10000 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & -300 & 0 & 600 & -300 \\ 0 & 300 & 100 & 0 & -300 & 200 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ [8] \\ 4 \\ [9] \end{matrix}$$

3) Montagem da matriz de rigidez da estrutura

A presença de recalques de apoio e o cálculo direto das reações de apoio requerem a montagem da matriz completa da estrutura.

A parte triangular superior da matriz $\mathbf{K}$ é obtida somando-se os coeficientes das matrizes das barras associados aos deslocamentos nodais da estrutura,

$$\mathbf{K} = 10^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & [5] & [6] & [7] & [8] & [9] \\ 3984 & 4512 & 240 & \cdot & -3984 & -4512 & 240 & \cdot & \cdot \\ +10000 & +0 & +0 & +0 & \cdot & \cdot & \cdot & -10000 & 0 \\ \cdot & 6616 & -180 & \cdot & -4512 & -6616 & -180 & \cdot & \cdot \\ \cdot & +600 & +300 & -600 & \cdot & \cdot & \cdot & +0 & +300 \\ \cdot & \cdot & 200 & \cdot & -240 & 180 & 100 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & +200 & -300 & \cdot & \cdot & \cdot & +0 & +100 \\ \cdot & \cdot & \cdot & +600 & \cdot & \cdot & \cdot & +0 & -300 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3984 & 4512 & -240 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6616 & 180 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 200 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +10000 & +0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +200 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ [5] \\ [6] \\ [7] \\ [8] \\ [9] \end{matrix}$$

Sim.

Efetuada as somas e particionando a matriz de acordo com os GL's livres e bloqueados, chegamos

a

$$\mathbf{K} = 10^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & [5] & [6] & [7] & [8] & [9] \\ 13984 & 4512 & 240 & 0 & -3984 & -4512 & 240 & -10000 & 0 \\ \cdot & 7216 & 120 & -600 & -4512 & -6616 & -180 & 0 & 300 \\ \cdot & \cdot & 400 & -300 & -240 & 180 & 100 & 0 & 100 \\ \cdot & \cdot & 600 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & -300 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3984 & 4512 & -240 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6616 & 180 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 200 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 10000 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 200 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ [5] \\ [6] \\ [7] \\ [8] \\ [9] \end{matrix}$$

Sim.

4) Vetores $\mathbf{U}$ e $\mathbf{F}$ da estrutura

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0001 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} [5] \\ [6] \\ [7] \\ [8] \\ [9] \end{matrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

em que U_1, U_2, U_3, U_4 são os deslocamento incógnitos e $R_5, R_6, \dots, R_9$ são as reações de apoio da estrutura.

5) Resolução do sistema de equações $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$

Na forma particionada

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_b \end{bmatrix}.$$

Cálculo dos deslocamentos

$$\mathbf{K}_{aa}\mathbf{U}_a = \mathbf{F}_a - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{U}_b := \mathbf{F}_a^*.$$

O cálculo do vetor carregamento à direita fornece

$$\mathbf{F}_a^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - 10^2 \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & 240 & \vdots \\ \vdots & \vdots & -180 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 100 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0001 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,0 \\ 0 \\ -2,0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2,4 \\ -1,8 \\ 1,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,4 \\ 0,8 \\ -1,0 \\ -2,0 \end{bmatrix}$$

resultando o sistema reduzido cuja resolução fornece os deslocamentos procurados,

$$10^2 \begin{bmatrix} 13984 & 4512 & 240 & 0 \\ 4512 & 7216 & 120 & -600 \\ 240 & 120 & 400 & -300 \\ 0 & -600 & -300 & 600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,4 \\ 0,8 \\ -1,0 \\ -2,0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{U}_a = \begin{bmatrix} 1,376 \times 10^{-6} \text{ m} \\ -5,064 \times 10^{-6} \text{ m} \\ -84,97 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ -80,88 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

Cálculo das reações de apoio

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{K}_{ba}\mathbf{U}_a + \mathbf{K}_{bb}\mathbf{U}_b$$

$$\mathbf{F}_b = 10^{-4} \begin{bmatrix} -3984 & -4512 & -240 & 0 \\ -4512 & -6616 & 180 & 0 \\ 240 & -180 & 100 & 0 \\ -10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 & -300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,376 \\ -5,064 \\ -84,97 \\ -80,88 \end{bmatrix} + 10^{-2} \begin{bmatrix} 3984 & 4512 & -240 & 0 & 0 \\ 4512 & 6616 & 180 & 0 & 0 \\ -240 & 180 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,376 \text{ kN} \\ 3,000 \text{ kN} \\ 1,275 \text{ kN m} \\ -1,376 \text{ kN} \\ 1,425 \text{ kN m} \end{bmatrix}$$

Repare que o último produto havia sido calculado com $\mathbf{F}_a^*$.

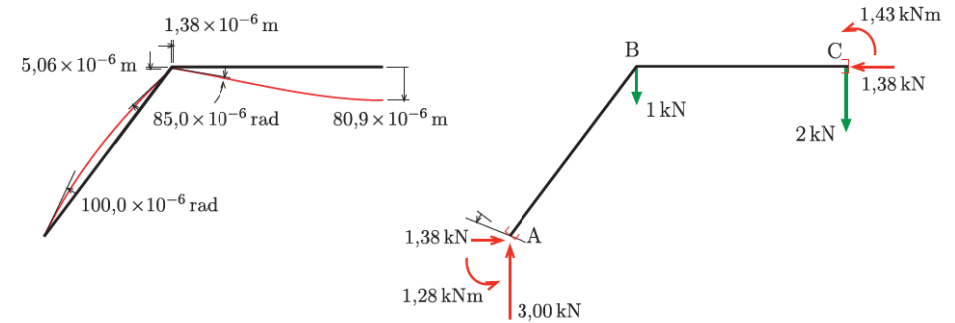


Fig. E 3-4: Estrutura deformada e reações.

6) Deslocamentos das barras no sistema global

Com o emprego das matrizes de incidência $\mathbf{LM}_e$, montamos os vetores dos deslocamentos das barras no sistema global,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 1,376 \\ -5,064 \\ -84,97 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_8 \\ U_4 \\ U_9 \end{bmatrix} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 1,376 \\ -5,064 \\ -84,97 \\ 0 \\ -80,88 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7) Esforços de extremidade

• Barra 1

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{u}_1 = 10^{-6} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0,6 & 0,8 & 0 & & & \\ -0,8 & 0,6 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & 0,6 & 0,8 & 0 \\ & & & -0,8 & 0,6 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 1,376 \\ -5,064 \\ -84,97 \end{bmatrix} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ -3,225 \\ -4,139 \\ -84,97 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{f}_1 = \bar{k}_1 \bar{u}_1 = 10^2 \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & 0 & -10000 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 300 & 0 & -600 & 300 \\ \vdots & \vdots & 200 & 0 & -300 & 100 \\ \hline \vdots & \vdots & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & -300 & 0 & 600 & -300 \\ \vdots & \vdots & 100 & 0 & -300 & 200 \end{bmatrix} 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ -3,225 \\ -4,139 \\ -84,97 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,225 \\ 0,699 \\ 1,275 \\ -3,225 \\ -0,699 \\ -0,575 \end{bmatrix}.$$

- Barra 2

Os vetores dos deslocamentos e dos esforços são iguais nos dois sistemas,

$$\bar{f}_2 = f_2 = k_2 u_2 = 10^2 \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 600 & 300 & \vdots & -600 & \vdots \\ 0 & 300 & 200 & \vdots & -300 & \vdots \\ \hline -10000 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & -600 & -300 & \vdots & 600 & \vdots \\ 0 & 300 & 100 & \vdots & -300 & \vdots \end{bmatrix} 10^{-6} \begin{bmatrix} 1,376 \\ -5,064 \\ -84,97 \\ 0 \\ -80,88 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,376 \\ 2,000 \\ 0,575 \\ -1,376 \\ -2,000 \\ 1,425 \end{bmatrix}.$$

8) Diagramas de estado

Com os valores de $\bar{f}_1$ e $\bar{f}_2$ representados na Fig. E3-ii, obtemos facilmente os diagramas de estado da Fig. E3-iii.

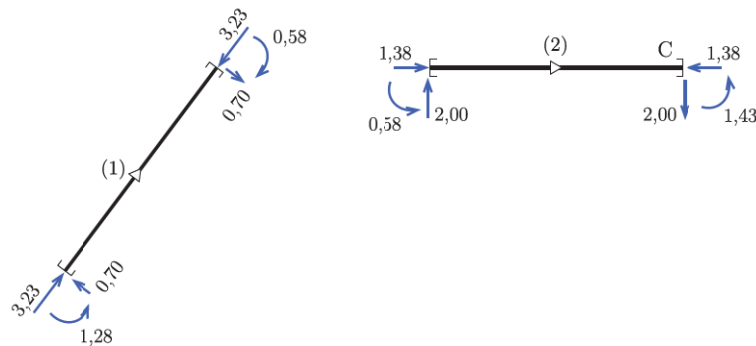


Fig. E3-iii: Esforços nas seções de extremidade das barras.

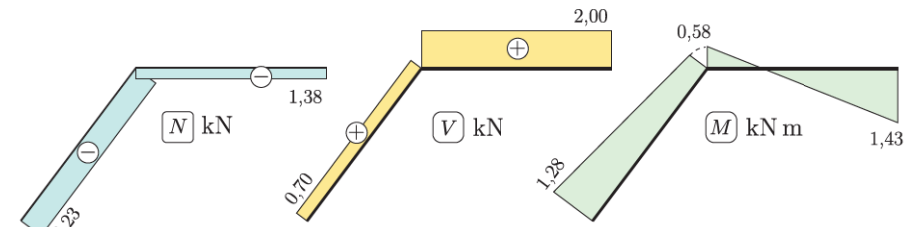


Fig. E3-iv: Diagramas de estado.

Exemplo 4 (Forças distribuídas)

Adicione forças distribuídas verticais de 4 kN/m às barras do problema anterior conforme mostra a figura ao lado.

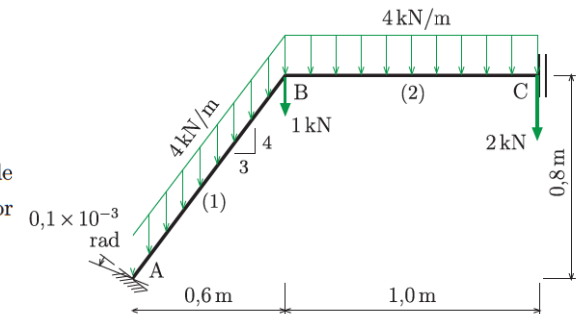


Fig. E4: Estrutura com forças distribuídas.

SOLUÇÃO

Como a estrutura é a mesma, os itens 1) a 4) da resolução anterior se repetem e apenas os vetores dos esforços de engastamento perfeito devem ser acrescentados.

1) Vetores dos esforços de engastamento perfeito

- Barra 1

A força distribuída na barra 1 deve ser decomposta nas direções axial e transversal à barra, conforme a Fig. E4-i, para as fórmulas da Fig. 3 possam ser aplicadas,

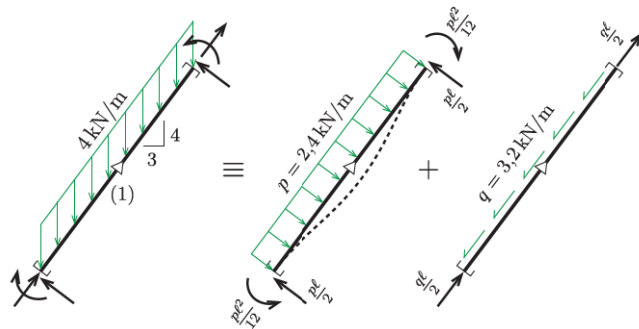


Fig. E4-i: Decomposição da carga distribuída.

$$\bar{\mathbf{f}}_1^0 = \begin{bmatrix} \frac{q\ell}{2} \\ \frac{p\ell}{2} \\ -\frac{p\ell^2}{12} \\ \frac{q\ell}{2} \\ \frac{p\ell}{2} \\ \frac{p\ell^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3,2 \times 1}{2} \\ \frac{2,4 \times 1}{2} \\ -\frac{2,4 \times 1^2}{12} \\ \frac{3,2 \times 1}{2} \\ \frac{2,4 \times 1}{2} \\ \frac{2,4 \times 1^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 1,2 \\ 0,2 \\ 1,6 \\ 1,2 \\ -0,2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}_1^0 = \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{f}}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,2 \\ 0 \\ 2 \\ -0,2 \end{bmatrix} \begin{matrix} [5] \\ [6] \\ [7] \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

• Barra 2

$$\mathbf{f}_2^0 = \bar{\mathbf{f}}_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{p\ell}{2} \\ -\frac{p\ell^2}{12} \\ 0 \\ \frac{p\ell}{2} \\ \frac{p\ell^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4,0 \times 1}{2} \\ -\frac{4,0 \times 1^2}{12} \\ 0 \\ \frac{4,0 \times 1}{2} \\ \frac{4,0 \times 1^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,333 \\ 0 \\ 2 \\ -0,333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ [8] \\ 4 \\ [9] \end{matrix}$$

2) Vetor $\mathbf{F}^0$ da estrutura

$$\mathbf{F}^0 = \begin{bmatrix} 0,000 & +0,000 \\ 2,000 & +2,000 \\ -0,200 & +0,333 \\ & 2,000 \\ 0,000 \\ 2,000 \\ 0,200 \\ & 0,000 \\ & -0,333 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ [5] \\ [6] \\ [7] \\ [8] \\ [9] \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 4,000 \\ 0,133 \\ 2,000 \\ 0,000 \\ 2,000 \\ 0,200 \\ 0,000 \\ -0,333 \end{bmatrix}$$

3) Resolução do sistema de equações $\mathbf{KU} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^0$

Na forma particionada

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a^0 \\ \mathbf{F}_b^0 \end{bmatrix}$$

Cálculo dos deslocamentos

$$\mathbf{K}_{aa}\mathbf{U}_a = \mathbf{F}_a - \mathbf{F}_a^0 - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{U}_b := \mathbf{F}_a^*$$

O cálculo do vetor carregamento à direita fornece

$$\mathbf{F}_a^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,000 \\ 0 \\ -2,000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4,000 \\ 0,133 \\ 2,000 \end{bmatrix} - 10^2 \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & 240 & \vdots \\ \vdots & \vdots & -180 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 100 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0001 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -5,000 \\ -0,133 \\ -4,000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2,400 \\ -1,800 \\ 1,000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,400 \\ -3,200 \\ -1,133 \\ -4,000 \end{bmatrix},$$

resultando o sistema reduzido cuja resolução fornece os deslocamentos,

$$10^2 \begin{bmatrix} 13984 & 4512 & 240 & 0 \\ 4512 & 7216 & 120 & -600 \\ 240 & 120 & 400 & -300 \\ 0 & -600 & -300 & 600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,400 \\ -3,200 \\ -1,133 \\ -4,000 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{U}_a = \begin{bmatrix} 7,172 \times 10^{-6} \text{ m} \\ -19,76 \times 10^{-6} \text{ m} \\ -146,4 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ -159,6 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

Cálculo das reações de apoio

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{F}_b^0 + \mathbf{K}_{ba}\mathbf{U}_a + \mathbf{K}_{bb}\mathbf{U}_b$$

$$\mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,000 \\ 0,200 \\ 0 \\ -0,333 \end{bmatrix} + 10^{-4} \begin{bmatrix} -3984 & -4512 & -240 & 0 \\ -4512 & -6616 & 180 & 0 \\ 240 & -180 & 100 & 0 \\ -10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 & -300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7,172 \\ -19,76 \\ -146,4 \\ -159,6 \end{bmatrix}$$

$$+ 10^2 \begin{bmatrix} \vdots & -240 & \vdots \\ \vdots & 180 & \vdots \\ \vdots & 200 & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0001 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,172 \text{ kN} \\ 11,000 \text{ kN} \\ 1,263 \text{ kNm} \\ -7,172 \text{ kN} \\ 2,399 \text{ kNm} \end{bmatrix}$$

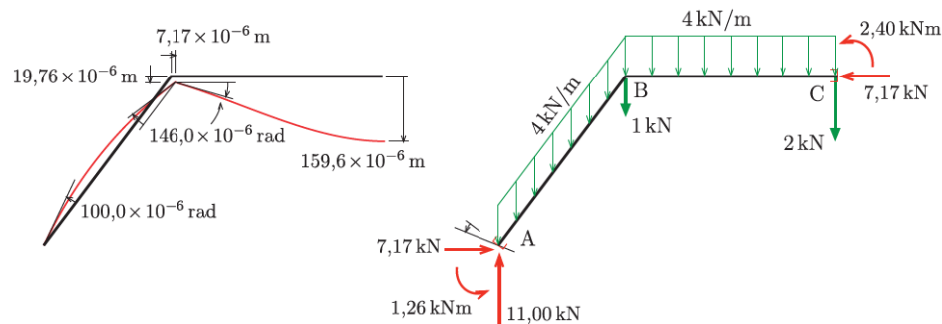


Fig. E 4-4: Estrutura deformada e reações.

4) Deslocamentos das barras no sistema global

Com o emprego das matrizes de incidência $\mathbf{LM}_e$, montamos os vetores dos deslocamentos das barras no sistema global,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 7,172 \\ -19,758 \\ -146,45 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_8 \\ U_4 \\ U_9 \end{bmatrix} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 7,172 \\ -19,758 \\ -146,45 \\ 0 \\ -159,65 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5) Esforços de extremidade

• Barra 1

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{u}_1 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 7,172 \\ -19,758 \\ -146,45 \end{bmatrix} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ -11,503 \\ -17,593 \\ -146,45 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_1 = \bar{\mathbf{k}}_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + \bar{\mathbf{f}}_1^0$$

$$= 10^2 \begin{bmatrix} \vdots & 0 & -10000 & 0 & 0 \\ \vdots & 300 & 0 & -600 & 300 \\ \vdots & 200 & 0 & -300 & 100 \\ \vdots & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ \vdots & -300 & 0 & 600 & -300 \\ \vdots & 100 & 0 & -300 & 200 \end{bmatrix} 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ -11,503 \\ -17,593 \\ -146,45 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,6 \\ 1,2 \\ 0,2 \\ 1,6 \\ 1,2 \\ -0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,103 \\ 0,862 \\ 1,263 \\ -9,903 \\ 1,538 \\ -1,601 \end{bmatrix}$$

• Barra 2

Os vetores dos deslocamentos e dos esforços são iguais nos dois sistemas,

$$\bar{\mathbf{f}}_2 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{k}_2 \mathbf{u}_2 + \mathbf{f}_2^0$$

$$= 10^2 \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 600 & 300 & \vdots & -600 & \vdots \\ 0 & 300 & 200 & \vdots & -300 & \vdots \\ -10000 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & -600 & -300 & \vdots & 600 & \vdots \\ 0 & 300 & 100 & \vdots & -300 & \vdots \end{bmatrix} 10^{-6} \begin{bmatrix} 7,172 \\ -19,758 \\ -146,45 \\ 0 \\ -159,65 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,333 \\ 0 \\ 2 \\ -0,333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,172 \\ 6,000 \\ 1,601 \\ -7,172 \\ -2,000 \\ 2,399 \end{bmatrix}$$

6) Diagramas de estado

A partir dos valores em $\bar{\mathbf{f}}_1$ e $\bar{\mathbf{f}}_2$ representados na Fig. E 4-ii, escrevemos as expressões dos esforços

solicitantes nas barras e traçamos os diagramas de estado da Fig. E 4-iii.

$$N_1 = -13,10 + (4 \times 0,8)x$$

$$= -13,10 + 3,2x$$

$$V_1 = 0,86 - (4 \times 0,6)x$$

$$= 0,86 - 2,4x$$

$$M_1 = -1,26 + 0,86x - (4 \times 0,6)\frac{x^2}{2}$$

$$= -1,26 + 0,86x - 1,2x^2$$

$$N_2 = -7,17$$

$$V_2 = 6,00 - 4x$$

$$M_2 = -1,60 + 6,00x - 4\frac{x^2}{2}$$

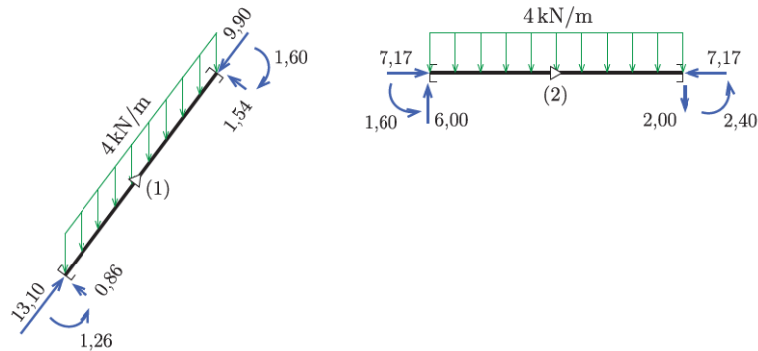


Fig. E 4-iii: Esforços nas seções de extremidade das barras.

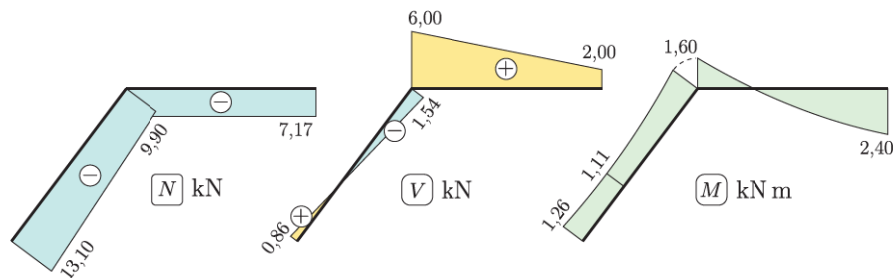


Fig. E 4-iv: Diagramas de estado.

Exemplo 5 (Articulação)

Para a estrutura ao lado, esboce a deformada da estrutura e trace os diagramas de esforços solicitantes.

$$E = 50 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$A = 0,02 \text{ m}^2,$$

$$I = 0,0001 \text{ m}^4.$$

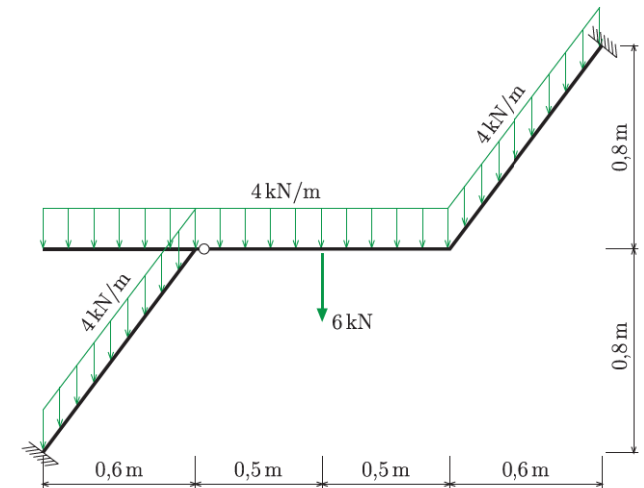


Fig. E 5: Escada com patamar.

SOLUÇÃO

1) Numerações das barras e dos nós da estrutura

O trecho de barra horizontal à esquerda é isostático de modo que apenas os esforços transmitidos ao nó B serão considerados na análise, conforme a Fig. E 5-i

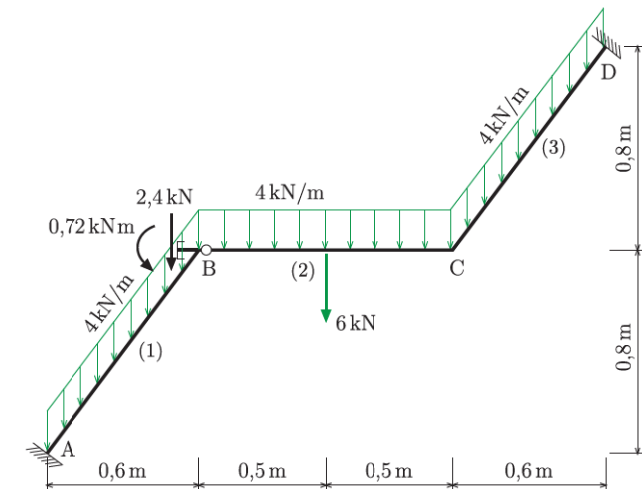


Fig. E 5-i: Numeração das barras e dos nós.

Na Fig. E 5-ii estão indicadas, duas possíveis numerações dos graus de liberdade e as correspon-

dentes matrizes LM_e das barras. Em (a), todas as barras são biengastadas (EE) e a articulação em B requer duas rotações independentes: uma à esquerda e outra à direita de B. Em (b), a articulação faz parte da barra 2, admitida articulada-engastada (AE) no modelo. A numeração (b) foi escolhida por causa do menor número de graus de liberdade.

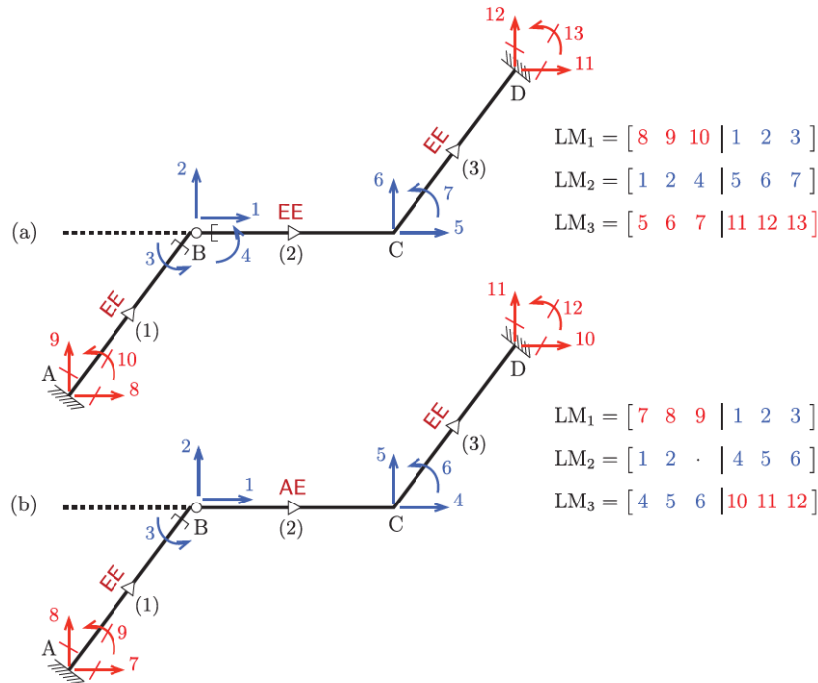


Fig. E5-ii: Deslocamentos nodais: (a) duas rotações em B, (b) rotação à esquerda de B.

2) Matrizes de rigidez e vetores de engastamento perfeito das barras

• Barra 1 e 3

As barras possuem matrizes iguais à barra 1 do Exemplo 3. Apenas as matrizes LM_e são diferentes.

Matrizes de rigidez no sistema local,

$$\bar{k}_1 = \bar{k}_3 = 10^2 \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & | & -10000 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 300 & | & 0 & -600 & 300 \\ 0 & 300 & 200 & | & 0 & -300 & 100 \\ \hline -10000 & 0 & 0 & | & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & -300 & | & 0 & 600 & -300 \\ 0 & 300 & 100 & | & 0 & -300 & 200 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 & | & & & \\ -0,8 & 0,6 & 0 & | & & & \\ 0 & 0 & 1 & | & & & \\ \hline & & & & 0,6 & 0,8 & 0 \\ & & & & 0 & -0,8 & 0,6 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes de rigidez no sistema global

$$k_1 = T_1^T \bar{k}_1 T_1 = 10^2 \begin{bmatrix} [7] & [8] & [9] & | & 1 & 2 & 3 \\ 3984 & 4512 & -240 & | & -3984 & -4512 & -240 & [7] \\ 4512 & 6616 & 180 & | & -4512 & -6616 & 180 & [8] \\ -240 & 180 & 200 & | & 240 & -180 & 100 & [9] \\ \hline -3984 & -4512 & 240 & | & 3984 & 4512 & 240 & 1 \\ -4512 & -6616 & -180 & | & 4512 & 6616 & -180 & 2 \\ -240 & 180 & 100 & | & 240 & -180 & 200 & 3 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = 10^2 \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & | & [10] & [11] & [12] \\ 3984 & 4512 & -240 & | & -3984 & -4512 & -240 & 4 \\ 4512 & 6616 & 180 & | & -4512 & -6616 & 180 & 5 \\ -240 & 180 & 200 & | & 240 & -180 & 100 & 6 \\ \hline -3984 & -4512 & 240 & | & 3984 & 4512 & 240 & [10] \\ -4512 & -6616 & -180 & | & 4512 & 6616 & -180 & [11] \\ -240 & 180 & 100 & | & 240 & -180 & 200 & [12] \end{bmatrix}$$

Os vetores dos esforços de engastamento perfeito também são iguais aos do exemplo anterior,

$$\bar{f}_1^0 = \bar{f}_3^0 = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 1,2 \\ 0,2 \\ 1,6 \\ 1,2 \\ -0,2 \end{bmatrix}, \quad f_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,2 \\ 0 \\ 2 \\ -0,2 \end{bmatrix}, \quad f_3^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,2 \\ 0 \\ 2 \\ -0,2 \end{bmatrix}$$

Os vetores de engastamento perfeito são associados aos graus de liberdade [7], [8], [9], [10], [11] e [12].

- Barra 2

Os seguintes coeficientes aparecem na matriz da barra articulada-engastada, Eq. (10),

$$\begin{aligned} EA &= 10 \times 10^5 \text{ kN} \\ EI &= 5 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 \\ \ell &= 1.0 \text{ m} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{EA}{\ell} &= 10 \times 10^5 \text{ kN/m} & \frac{3EI}{\ell^2} &= 150 \times 10^2 \text{ kN/rad} \\ \frac{3EI}{\ell^3} &= 150 \times 10^2 \text{ kN/m} & \frac{3EI}{\ell} &= 150 \times 10^2 \text{ kN m/rad} \end{aligned} \right.$$

Como os sistemas local e global da barra 2 coincidem, temos

$$\mathbf{k}_2 = \bar{\mathbf{k}}_2 = 10^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & & 4 & 5 & 6 \\ \hline 10000 & 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & -150 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -10000 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 0 & 0 & 150 & -150 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & -150 & 150 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Esforços de engastamento perfeito

$$\bar{\mathbf{f}}_2^0 = \mathbf{f}_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3p\ell}{8} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5p\ell}{8} \\ -\frac{p\ell^2}{8} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5P}{16} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11P}{16} \\ -\frac{3P\ell}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,375 \\ 0 \\ 0 \\ 6,625 \\ -1,625 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

3) Montagem da matriz de rigidez reduzida da estrutura

A soma dos coeficientes das matrizes das barras associados aos deslocamentos livres da estrutura fornece a matriz reduzida $\mathbf{K}_{aa}$. Efetuando o espalhamento na ordem em que as matrizes das

barras foram calculadas, ou seja, barras (1), (3) e (2), obtemos

$$\mathbf{K}_{aa} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{A}_e \mathbf{k}_e = 10^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 3984 & 4512 & 240 & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & +10000 & +0 & +0 & -10000 & 0 \\ & & 6616 & -180 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & +150 & \cdot & 0 & -150 \\ & & & 200 & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 3984 & 4512 \\ & & & & +10000 & 0 \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & 6616 & 180 \\ & & & & 150 & -150 \\ & & & & & 200 \\ & & & & & +150 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Após efetuarmos as somas, chegamos a

$$\mathbf{K} = 10^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 13984 & 4512 & 240 & -10000 & 0 \\ & 6766 & -180 & 0 & -150 & 150 \\ & & 200 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 13984 & 4512 & -240 \\ & \text{Sim.} & & & 6766 & 30 \\ & & & & & 350 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

4) Vetor $\mathbf{F}_a^0$ da estrutura

Efetando o espalhamento na ordem em que os vetores $\mathbf{f}_e^0$ foram calculados

$$\mathbf{F}_a^0 = \begin{bmatrix} 0,000 & \cdot & +0,000 & 1 \\ 2,000 & \cdot & +3,375 & 2 \\ -0,200 & \cdot & +0,000 & 3 \\ \cdot & 0,000 & \cdot & 4 \\ \cdot & +2,000 & 6,625 & 5 \\ \cdot & +0,200 & -1,625 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 5,375 \\ -0,200 \\ 0,000 \\ 8,625 \\ -1,425 \end{bmatrix}.$$

5) Resolução do sistema de equações $\mathbf{K}_{aa}\mathbf{U}_a = \mathbf{F}_a - \mathbf{F}_a^0 := \mathbf{F}_a^*$

O cálculo do vetor carregamento à direita fornece

$$\mathbf{F}_a^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -2,400 \\ 0,720 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 5,375 \\ -0,200 \\ 0 \\ 8,625 \\ -1,425 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7,775 \\ 0,920 \\ 0 \\ -8,625 \\ 1,425 \end{bmatrix}.$$

Introduzindo no sistema reduzido, obtemos os deslocamentos nodais

$$10^2 \begin{bmatrix} 13984 & 4512 & 240 & -10000 & 0 & 0 \\ 4512 & 6766 & -180 & 0 & -150 & 150 \\ 240 & -180 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ -10000 & 0 & 0 & 13984 & 4512 & -240 \\ 0 & -150 & 0 & 4512 & 6766 & 30 \\ 0 & 150 & 0 & -240 & 30 & 350 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7,775 \\ 0,920 \\ 0 \\ -8,625 \\ 1,425 \end{bmatrix}, \mathbf{U}_a = \begin{bmatrix} 158,1 \times 10^{-6} \text{ m} \\ -131,3 \times 10^{-6} \text{ m} \\ -261,9 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ 155,6 \times 10^{-6} \text{ m} \\ -120,4 \times 10^{-6} \text{ m} \\ 214,0 \times 10^{-6} \text{ rad} \end{bmatrix}$$

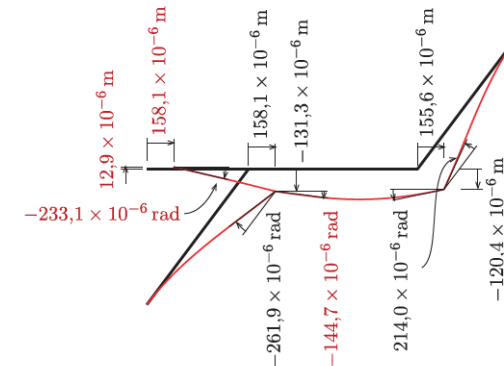


Fig. E 5-4: Estrutura deformada: valores dos graus de liberdade em preto e dos deslocamentos dependentes em vinho.

6) Deslocamentos das barras no sistema global

Os vetores $\mathbf{u}_e$ são obtidos com o emprego das matrizes de incidência $\mathbf{LM}_e$,

$$\mathbf{u}_1 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 158,1 \\ -131,3 \\ -261,9 \end{bmatrix} \begin{matrix} [7] \\ [8] \\ [9] \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad \mathbf{u}_2 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 158,1 \\ -131,3 \\ 155,6 \\ -120,4 \\ 214,0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad \mathbf{u}_3 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 155,6 \\ -120,4 \\ 214,0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ [10] \\ [11] \\ [12] \end{matrix}$$

7) Esforços de extremidade

• Barra 1

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 158,1 \\ -131,3 \\ -261,9 \end{bmatrix} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10,18 \\ -205,3 \\ -261,9 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{\mathbf{f}}_1 = \bar{\mathbf{k}}_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + \bar{\mathbf{f}}_1^0$$

$$= 10^2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} \vdots & \vdots & \vdots & -10000 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -600 & 300 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -300 & 100 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & 10000 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 600 & -300 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -300 & 200 \end{array} \right] 10^{-6} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10,18 \\ -205,3 \\ -261,9 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1,6 \\ 1,2 \\ 0,2 \\ 1,6 \\ 1,2 \\ -0,2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 11,78 \\ 5,66 \\ 3,74 \\ -8,58 \\ -3,26 \\ 0,72 \end{array} \right].$$

• Barra 2

Os vetores dos deslocamentos e dos esforços são iguais nos dois sistemas,

$$\bar{\mathbf{f}}_2 = \mathbf{k}_2 \mathbf{u}_2 + \mathbf{f}_2^0$$

$$= 10^2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 10000 & 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & -150 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -10000 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 0 & 0 & 150 & -150 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & -150 & 150 \end{array} \right] 10^{-6} \left[\begin{array}{c} 158,1 \\ -131,3 \\ \cdot \\ 155,6 \\ -120,4 \\ 214,0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 3,375 \\ 0 \\ 0 \\ 6,625 \\ -1,625 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 2,54 \\ 6,42 \\ 0 \\ -2,54 \\ 3,58 \\ 1,42 \end{array} \right].$$

• Barra 3

$$\bar{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{T}_3 \mathbf{u}_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0,6 & 0,8 & 0 & & & \\ -0,8 & 0,6 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & & & -0,8 & 0,6 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] 10^{-6} \left[\begin{array}{c} 155,6 \\ -120,4 \\ 214,0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] = 10^{-6} \left[\begin{array}{c} -2,94 \\ -196,7 \\ 214,0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

$$\bar{\mathbf{f}}_3 = \bar{\mathbf{k}}_3 \bar{\mathbf{u}}_3 + \bar{\mathbf{f}}_3^0$$

$$= 10^2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 10000 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 600 & 300 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 300 & 200 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline -10000 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -600 & -300 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 300 & 100 & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right] 10^{-6} \left[\begin{array}{c} -2,94 \\ -196,7 \\ 214,0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1,6 \\ 1,2 \\ 0,2 \\ 1,6 \\ 1,2 \\ -0,2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -1,34 \\ -4,18 \\ -1,42 \\ 4,54 \\ 6,58 \\ -3,96 \end{array} \right].$$

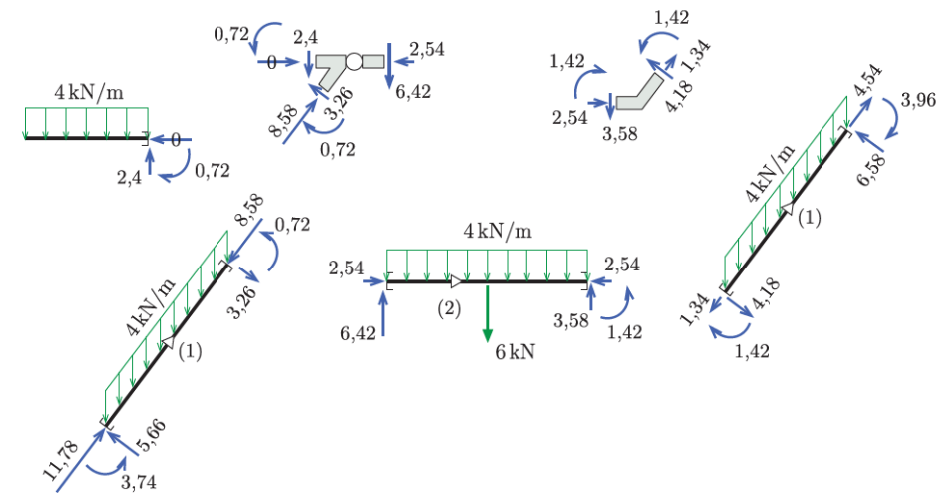


Fig. E 5-iv: Esforços de extremidade e equilíbrio dos nós.

8) Diagrama de estado e reações de apoio

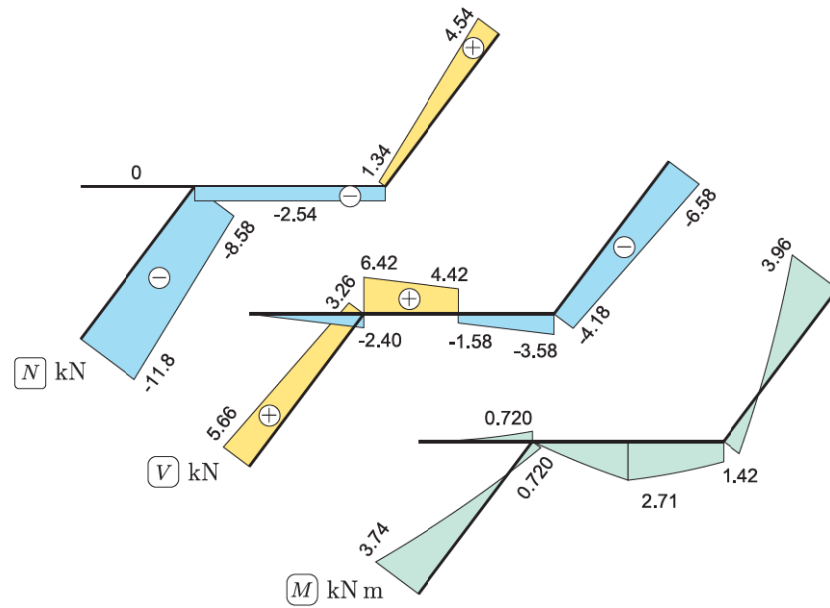


Fig. E5-v: Diagramas de estado.

As reações de apoio foram obtidas a partir das forças de extremidade nas barras indicadas na Fig. E5-iv,

$$H_A = R_7 = -5,66 \times 0,8 + 11,78 \times 0,6 = 2,54 \text{ kN} \quad H_D = R_{10} = -6,58 \times 0,8 + 4,54 \times 0,6 = -2,54 \text{ kN}$$

$$R_A = R_8 = 5,66 \times 0,6 + 11,78 \times 0,8 = 12,82 \text{ kN} \quad R_D = R_{11} = 6,58 \times 0,6 + 4,54 \times 0,8 = 7,58 \text{ kN}$$

$$M_A = R_9 = 3,74 \text{ kN m} \quad M_D = R_{12} = -3,96 \text{ kN m}$$

Repare que, a menos dos erros de arredondamento, verifica-se o equilíbrio global das forças: na direção horizontal, $H_A + H_D = 0$, e na vertical, $R_A + R_D = 20,40 \text{ kN}$.

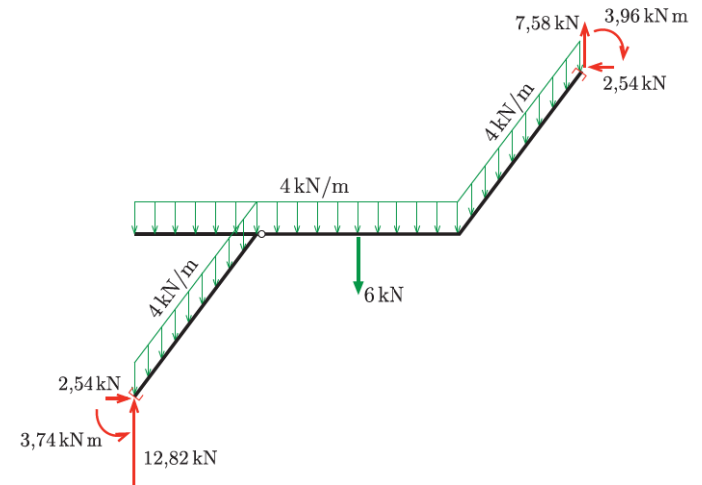


Fig. E5-vi: Reações.