

Flexo-Compressão e Flambagem de Barras Esbeltas

Edgard S. Almeida Neto
Escola Politécnica da USP

2 de Março de 2015

Conteúdo

1	Deformação na Flexo-Compressão de Barras Esbeltas	1
1.1	Introdução	1
1.2	Teoria de Segunda Ordem	3
2	Estabilidade e Instabilidade do Equilíbrio	12
2.1	Introdução	12
2.2	O Problema da Barra Rígida Presa a uma Mola	13
2.3	Determinação das Cargas de Flambagem	16
2.4	Exemplos do Processo do Equilíbrio	17
2.5	Comprimentos de Flambagem	23
2.6	Exemplos com Barras Rígidas	24
2.7	Algumas Diretrizes para o Cálculo da Carga de Flambagem	27
3	Tensão de Flambagem e Noções de Dimensionamento à Flambagem	29

1 Deformação na Flexo-Compressão de Barras Esbeltas

1.1 Introdução

Na análise de estruturas reticuladas, mesmo quando as *deformações são pequenas* e o material é admitido *elástico-linear*, hipóteses distintas quanto à configuração deformada da estrutura conduzem a teorias de barra com descrições cinemáticas diferentes, conhecidas por teoria de primeira ordem, teoria de segunda ordem e teorias de ordem superior ou ‘exatas’.

Na **teoria de 1^o ordem**, as rotações e os deslocamentos são *admitidos pequenos* e as equações de equilíbrio são escritas na *configuração indeformada* da estrutura (Fig. 1), o que garante sua linearidade geométrica. As linearidades física e geométrica são pré-requisitos para a proporcionalidade entre o carregamento e a deformação da estrutura e também para a validade do princípio da superposição de efeitos.

Nas estruturas isotáticas, a independência total dos esforços internos das deformações e, consequentemente, das propriedades do material e da geometria da seção transversal só é verdadeira no contexto da teoria de primeira ordem.

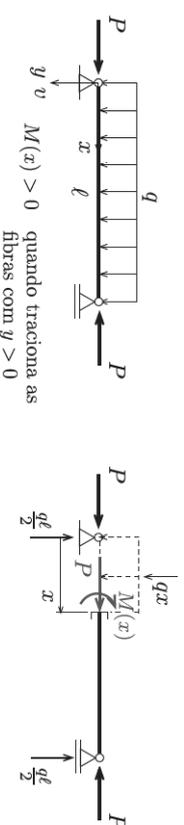


Fig. 1: Barra bi-apoiada: momento fletor na configuração indeformada.

Na **teoria de 2^o ordem**, as equações de equilíbrio são escritas na *configuração deformada* da estrutura. As rotações e os deslocamentos são *admitidos pequenos* de modo que ainda é possível negligenciar os deslocamentos longitudinais por flexão e as mudanças de direção das forças.

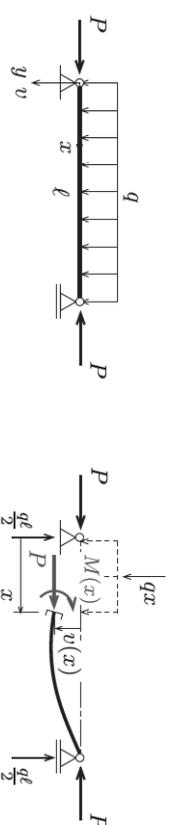


Fig. 2: Barra bi-apoiada: momento fletor na configuração deformada.

Para a barra delgada submetida à flexo-compressão da Fig. 2, a presença de deslocamentos transversais faz com que a força axial de protensão P gere momentos fletores adicionais significativos, momentos estes denominados *momentos de segunda ordem*. Assim, considerando o momento fletor em uma seção genérica,

$$M(x) = \underbrace{\frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2}_{M_0(x)} + \underbrace{Pv(x)}_{2^{\text{o}} \text{ ordem}}, \quad (1)$$

a parcela $M_0(x)$ corresponde ao momento de primeira ordem e a parcela restante, ao momento de segunda ordem decorrente da deformação transversal da barra.

A expressão **teoria ‘exata’** abrange diversas teorias de barra em que as equações de equilíbrio são escritas na *configuração deformada* da estrutura e tanto as deformações transversais das barras quanto as longitudinais são consideradas. Outra diferença importante é o uso da equação da linha elástica expressa em termos da curvatura $1/\rho$ do eixo da barra,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M}{EI}, \quad (2)$$

ao invés da forma linearizada empregada na teoria de segunda ordem, a qual admite $v' \ll 1$,

$$v'' = -\frac{M}{EI}. \quad (3)$$

Conforme mostrado na Fig. 3, as deformações podem alterar a posição e a direção dos esforços que constituem o carregamento.

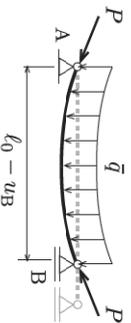


Fig. 3. Barra bi-apoiada – encurtamento da barra e mudança de direção da força de protensão.

1.2 Teoria de Segunda Ordem

Denomina-se *efeito de segunda ordem* àquele proveniente do momento fletor gerado pela força normal em decorrência dos deslocamentos transversais do eixo da barra. Introduzindo a Eq. (1) em (3), obtemos a equação da linha elástica na flexo-compressão

$$v'' = -\frac{M_0(x)}{EI} - \frac{P}{EI}v.$$

Substituindo o quociente $\frac{P}{EI}$ por k^2 e colocando os termos em deslocamento do lado esquerdo, a equação assume a forma genérica

$$v'' + k^2v = -\frac{M_0(x)}{EI}, \quad (4)$$

A Eq. (4) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem cuja solução geral para P e EI constantes é

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + v_p(x), \quad (5)$$

em que A e B são constantes de integração determinadas a partir das condições de contorno, e $v_p(x)$ é uma solução particular da Eq. (4). No caso de $M_0(x)$ ser expresso por um polinômio, $v_p(x)$ é um polinômio de mesma ordem e seus coeficientes são obtidos por identidade de polinômios (ou seja, igualando-se os coeficientes dos monômios de mesma ordem em x à esquerda e à direita na expressão resultante).

Superposição Modificada Embora a superposição de efeitos **não** seja válida na teoria de segunda ordem, ainda podemos estabelecer uma *superposição modificada* para o cálculo dos deslocamentos e momentos fletores em virtude da linearidade da Eq. (4). Repare na Fig. 4 que o carregamento transversal é decomposto mas a força axial P é mantida em todas as parcelas. A linha elástica final é obtida somando-se as soluções das equações diferenciais das diversas parcelas. Evidentemente, a força axial P é considerada uma única vez no cálculo das tensões normais.

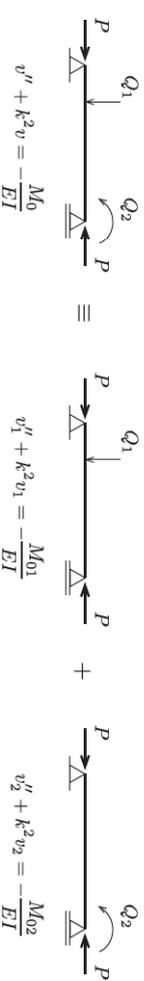


Fig. 4: Superposição modificada.

A demonstração é imediata pois basta introduzir $v = v_1 + v_2$ na equação diferencial e lembrar que $M_0 = M_{01} + M_{02}$,

$$(v_1 + v_2)'' + k^2(v_1 + v_2) = -\frac{M_{01} + M_{02}}{EI}.$$

Rearranjando os termos, chegamos a

$$\left(v_1'' + k^2v_1 + \frac{M_{01}}{EI} \right) + \left(v_2'' + k^2v_2 + \frac{M_{02}}{EI} \right) = 0,$$

equação que é sempre satisfeita quando as equações diferenciais associadas a cada força transversal Q_i são verificadas.

Exemplo 1 Determine o máximo momento fletor e a máxima flecha para a barra bi-apoiada

da figura.

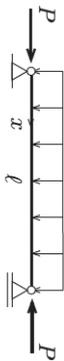


Fig. E1

SOLUÇÃO O esquema de cálculo do momento fletor na configuração deformada encontra-se na Fig. 2 e fornece

$$M(x) = \frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2 + Pv(x).$$

Inserindo o momento na Eq. (3), temos

$$v'' = \frac{q}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ell x}{2} \right) - \frac{P}{EI}v.$$

Lembrando que $k^2 = \frac{P}{EI}$ e arranjando os termos em deslocamento, obtemos

$$v'' + k^2v = \frac{q}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ell x}{2} \right).$$

Do lado direito, podemos colocar k^2 em evidência multiplicando e dividindo por P ,

$$v'' + k^2v = \frac{qk^2}{P} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ell x}{2} \right). \quad (a)$$

A solução geral da equação tem a forma

$$v(x) = A \operatorname{sen} kx + B \operatorname{cos} kx + v_p(x), \quad (b)$$

em que a solução particular é um polinômio de mesma ordem que o polinômio do lado direito da Eq. (a),

$$v_p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2.$$

Os coeficientes b_i são obtidos introduzindo-se v_p na Eq. (a),

$$2b_2 + k^2(b_0 + b_1x + b_2x^2) = \frac{qk^2}{P} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ell x}{2} \right),$$

e igualando os coeficientes dos monômios de

mesmo grau dos dois lados da equação,

$$x^2: \quad k^2b_2 = \frac{qk^2}{P} \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b_2 = \frac{q}{2P},$$

$$x^1: \quad k^2b_1 = -\frac{qk^2}{P} \frac{\ell}{2} \quad \Rightarrow \quad b_1 = -\frac{q\ell}{2P},$$

$$x^0: \quad 2b_2 + k^2b_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = -\frac{q}{k^2P}.$$

Substituindo na Eq. (b), temos

$$v(x) = A \operatorname{sen} kx + B \operatorname{cos} kx - \frac{q}{k^2P} - \frac{q\ell}{2P}x + \frac{q}{2P}x^2.$$

Impondo as condições de contorno,

$$v(0) = 0,$$

$$B - \frac{q}{k^2P} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{q}{k^2P},$$

$$v(\ell) = 0,$$

$$A \operatorname{sen} k\ell + \frac{q}{k^2P}(\operatorname{cos} k\ell - 1) - \frac{q\ell^2}{2P} + \frac{q\ell^2}{2P} = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{q}{k^2P} \frac{1 - \operatorname{cos} k\ell}{\operatorname{sen} k\ell},$$

chegamos à solução

$$v(x) = \frac{q}{Pk^2} \left[\left(\frac{1 - \operatorname{cos} k\ell}{\operatorname{sen} k\ell} \right) \operatorname{sen} kx + \operatorname{cos} kx - 1 \right] - \frac{q}{2P}x(\ell - x).$$

Devido à simetria, sabemos que os valores máximos de M e v ocorrem no meio do vão. Definindo uma nova variável u por

$$u = \frac{k\ell}{2},$$

e introduzindo-a em $v_{\max} = v(\frac{\ell}{2})$, obtemos

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \frac{q}{Pk^2} \left[\frac{1 - \operatorname{cos} 2u}{\operatorname{sen} 2u} \operatorname{sen} u + \operatorname{cos} u - 1 \right] - \frac{q\ell^2}{8P} \\ &= \frac{q}{Pk^2} (\tan u \operatorname{sen} u + \operatorname{cos} u - 1) - \frac{q\ell^2}{8P} \\ &= \frac{q\ell^2}{4Pu^2} \left(\frac{1 - \operatorname{cos} u}{\operatorname{cos} u} \right) - \frac{q\ell^2}{8P} \\ &= \frac{q\ell^2}{8Pu^2} (2 \operatorname{sec} u - 2 - u^2) \end{aligned} \quad (c)$$

Colocando em evidência o deslocamento de primeira ordem, $v_{0\max}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \left(\frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI} \right) \frac{48EI}{5P\ell^2u^2} (2 \operatorname{sec} u - 2 - u^2) \\ &= \left(\frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI} \right) \frac{12}{5u^2} \frac{1}{P\ell^2} (2 \operatorname{sec} u - 2 - u^2) \\ &= \left(\frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI} \right) \frac{12}{5u^4} (2 \operatorname{sec} u - 2 - u^2) \\ &= v_{0\max} \eta(u). \end{aligned}$$

O momento máximo é dado por

$$\begin{aligned} M_{\max} &= M\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{q\ell^2}{4} - \frac{q\ell^2}{8} + Pv_{\max} \\ &= \frac{q\ell^2}{8} + Pv_{\max} \end{aligned}$$

Introduzindo v_{\max} dado pela Eq. (c), temos

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \frac{q\ell^2}{4u^2} \frac{1 - \operatorname{cos} u}{\operatorname{cos} u} \\ &= \left(\frac{q\ell^2}{8} \right) \frac{2}{u^2} \left(\frac{1 - \operatorname{cos} u}{\operatorname{cos} u} \right) \\ &= M_{0\max} \lambda(u). \end{aligned}$$

Para uma barra bi-apoiada com $\ell = 1050$ cm, $I = 500$ cm⁴ e $E = 2.1 \times 10^4$ kN/cm², os gráficos de P , η e λ encontram-se representados na Fig. 5 (ver também Tab. 1). Para valores elevados de P e $v_{0\max}$, os valores das funções η e λ deixam de ser realistas, já que a maior flecha no meio do vão que a barra bi-apoiada admitiria seria de $\approx \frac{\ell}{2}$, correspondendo à barra dobrada.

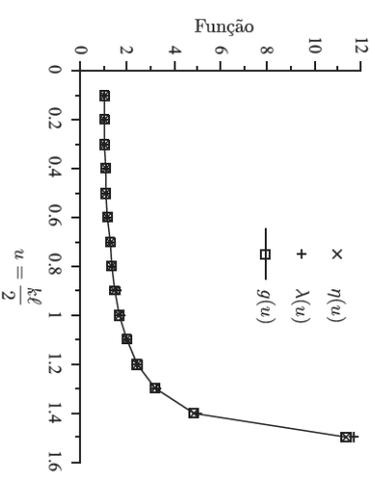


Fig. 5: Funções $\eta(u)$, $\lambda(u)$ e a aproximação $g(u)$.

Carga Crítica Denomina-se *carga crítica* à carga P_{cr} para a qual a flecha máxima e o momento fletor máximo tendem a infinito quando é utilizada a teoria linearizada. No caso do

Tabela 1: $P(u)$, $\eta(u)$, $\lambda(u)$ e a aproximação $g(u)$.

u	$P(u) = \frac{4EI\pi^2}{\ell^2}$	$\eta(u) = \frac{12}{5\pi}(2 \sec u - 2 - u^2)$	$\lambda(u) = \frac{2}{\pi^2}(\sec u - 1)$	$\frac{1}{1 - \frac{P}{P_c}}$
0,1	0,38095	1,0041	1,0042	1,0041
0,2	1,5238	1,0165	1,0169	1,0165
0,3	3,4286	1,0380	1,0389	1,0379
0,4	6,0952	1,0696	1,0713	1,0693
0,5	9,5238	1,1131	1,1160	1,1127
0,6	13,714	1,1714	1,1757	1,1708
0,7	18,667	1,2487	1,2549	1,2478
0,8	24,381	1,3515	1,3604	1,3502
0,9	30,857	1,4904	1,5030	1,4887
1,0	38,095	1,6839	1,7016	1,6815
1,1	46,095	1,9658	1,9911	1,9623
1,2	54,857	2,4067	2,4440	2,4016
1,3	64,381	3,1820	3,2406	3,1739
1,4	74,667	4,8773	4,9832	4,8628
1,5	85,714	11,389	11,677	11,350
$\pi/2$	93,996	∞	∞	∞

exemplo anterior, temos da Tab. 1

$$u_{cr} = \frac{k\ell}{2} = \frac{\pi}{2} \implies \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} \frac{\ell}{2} = \frac{\pi}{2} \implies \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}},$$

expressão que não depende do carregamento transversal q .

É importante observar que não é necessário desenhar os gráficos de $v(\frac{\ell}{2})$ ou $M(\frac{\ell}{2})$ para determinarmos P_{cr} . O exame cuidadoso das expressões deduzidas indica que seus valores tendem a infinito quando $\cos u \rightarrow 0$, ou seja, $u \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

O conhecimento da carga crítica permite escrever a seguinte aproximação para as funções $\eta(u)$ e $\lambda(u)$ [6]:

$$g(u) = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_c}}. \quad (6)$$

A qualidade da aproximação pode ser verificada na Fig. 5 e na Tab. 1, onde a função aproximada encontra-se lado a lado com as funções determinadas no exemplo.

Exemplo 2 Determine as expressões do momento fletor máximo e da flecha máxima para a barra bi-apoiada da figura. Determine também a carga crítica.

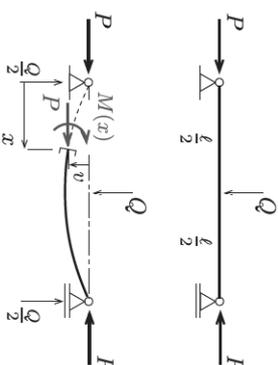


Fig. E2

SOLUÇÃO O momento fletor é expresso por

$$M(x) = \frac{Q}{2}x + Pv(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2},$$

Inserindo o momento na Eq. (3), temos

$$v'' = -\frac{Qx}{2EI} - \frac{P}{EI}v.$$

ou ainda lembrando que $k^2 = \frac{P}{EI}$,

$$v'' + k^2v = -\frac{Qk^2}{2P}x.$$

Introduzindo a solução particular,

$$v_p(x) = b_0 + b_1x,$$

na equação diferencial acima, resulta

$$k^2(b_0 + b_1x) = -\frac{Qk^2}{2P}x.$$

Por meio da identidade de polinômios, temos

$$\begin{aligned} x^0 : \quad b_0 &= 0, \\ x : \quad b_1 &= -\frac{Q}{2P}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} v(x) &= A \sin kx + B \cos kx - \frac{Q}{2P}x, \\ v'(x) &= Ak \cos kx - Bk \sin kx - \frac{Q}{2P}, \end{aligned}$$

somente para $0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}$. Impondo as condições de contorno,

$$v(0) = 0,$$

$$B = 0,$$

$$v'(\frac{\ell}{2}) = 0, \text{ (simetria)}$$

$$Ak \cos \frac{k\ell}{2} - \frac{Q}{2P} = 0 \implies A = \frac{Q}{2Pk \cos \frac{k\ell}{2}},$$

chegamos a

$$v(x) = \frac{Q}{2Pk} \left(\frac{\sin kx}{\cos \frac{k\ell}{2}} - kx \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}.$$

Repare que não usamos a condição de contorno $v(\ell) = 0$ por que a expressão de $v(x)$ acima não é válida para $x = \ell$.

Quando $\cos \frac{k\ell}{2} \rightarrow 0$, verifica-se que $v(x) \rightarrow \infty$ e, portanto

$$\frac{k\ell}{2} = \frac{\pi}{2} \implies P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2},$$

que é o mesmo valor obtido no exemplo anterior.

Valores máximos:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= v(\frac{\ell}{2}) \\ &= \frac{Q}{2Pk} \left(\tan \frac{k\ell}{2} - \frac{k\ell}{2} \right) \\ &= \frac{Q}{2k^3 EI} (\tan u - u) \\ &= \left(\frac{Q\ell^3}{48EI} \right) \frac{24}{(k\ell)^3} (\tan u - u) \\ &= \left(\frac{Q\ell^3}{48EI} \right) \frac{3}{(\frac{k\ell}{2})^3} (\tan u - u) \\ &= \left(\frac{Q\ell^3}{48EI} \right) \frac{3}{u^3} (\tan u - u) \\ &= v_{\max} \bar{\eta}(u), \end{aligned} \quad (a)$$

onde $u = \frac{k\ell}{2}$, e $\frac{Q\ell^3}{48EI}$ corresponde ao deslocamento

de primeira ordem. A função $\bar{\eta}(u)$ tem comportamento semelhante à $\eta(u)$ examinada anteriormente; ela assume o valor 1 para $P = 0$, e tende a infinito para $P = P_{cr}$.

Inserindo a Eq. (a), temos

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \frac{Q\ell}{4} + \frac{PQ}{2k^3EI}(\tan u - u) \\ &= \frac{Q\ell}{4} + \frac{Q}{2k}(\tan u - u) \\ &= \frac{Q\ell}{4} + \frac{Q\ell}{4u}(\tan u - u) \\ &= \left(\frac{Q\ell}{4}\right) \frac{\tan u}{u} \\ &= M_{\max} \bar{\lambda}(u). \end{aligned}$$

O momento fletor máximo é dado por

$$M_{\max} = M\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{Q\ell}{4} + P v_{\max}.$$

Exemplo 3 Determine a flecha máxima e a carga crítica para a barra engastada da figura.

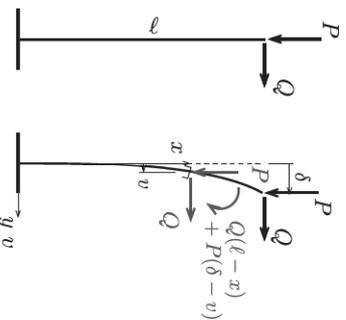


Fig. E3

qual introduzida na equação diferencial fornece,

$$0 + k^2(b_0 + b_1x) = k^2 \left[\frac{Q\ell}{P} + \delta - \frac{Q}{P}x \right]$$

com

$$\begin{aligned} x^0 : \quad b_0 &= \frac{Q\ell}{P} + \delta, \\ x^1 : \quad b_1 &= -\frac{Q}{P}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} v(x) &= A \sin kx + B \cos kx + \delta + \frac{Q}{P}(\ell - x), \\ v'(x) &= Ak \cos kx - Bk \sin kx - \frac{Q}{P}. \end{aligned}$$

Impondo-se as condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & B &= -\frac{Q\ell}{P} - \delta, \\ v'(0) &= 0, & Ak - \frac{Q}{P} &= 0 \Rightarrow A = \frac{Q}{Pk}. \end{aligned}$$

$$v'' = \frac{Q}{EI}(\ell - x) + \frac{P}{EI}(\delta - v),$$

ou ainda,

$$v'' + k^2v = k^2 \left[\frac{Q}{P}(\ell - x) + \delta \right].$$

A solução particular tem a forma $v_p = b_0 + b_1x$, a

$$v(\ell) = \delta,$$

$$\begin{aligned} \frac{Q}{Pk} \sin k\ell - \left(\frac{Q\ell}{P} + \delta\right) \cos k\ell + \delta &= \delta \Rightarrow \\ -\delta \cos k\ell + \frac{Q}{P} \left(\frac{\sin k\ell}{k} - \ell \cos k\ell\right) &= 0 \Rightarrow \\ \delta = \frac{Q}{P} \left(\frac{\tan k\ell}{k} - \ell\right) &= \frac{Q\ell}{P} \left(\frac{\tan k\ell}{k\ell} - 1\right). \end{aligned}$$

Logo, a solução é dada por

$$v(x) = \frac{Q}{Pk} \sin kx - \left(\frac{Q\ell}{P} + \delta\right) \cos kx + \delta + \frac{Q\ell}{P}(\ell - x),$$

e a máxima flecha por

$$v(\ell) = \delta = \frac{Q\ell}{P} \left(\frac{\tan k\ell}{k\ell} - 1\right).$$

Fatorando a flecha da teoria de primeira ordem, resulta

$$f = \frac{Q\ell^3}{3EI} \left[\frac{3}{(k\ell)^2} \left(\frac{\tan k\ell}{k\ell} - 1\right) \right].$$

Exemplo 4 Determine a flecha máxima e a carga crítica para a barra engastada da figura abaixo.

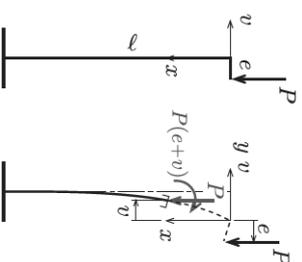


Fig. E4

A carga crítica corresponde à $\tan k\ell = \infty$, ou $k\ell = \frac{\pi}{2}$. Logo

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2\ell)^2}.$$

A Eq. (6) fornece uma boa aproximação dos valores da teoria de segunda ordem. Por exemplo, para $P = P_{cr}/2$, temos $k\ell = \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ obtemos,

$$v(\ell) = \frac{Q\ell}{P}(0,8168) = 1,986 \frac{Q\ell^3}{3EI} = 1,986v_0.$$

Usando a forma aproximada,

$$v(\ell) = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}v_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2v_0.$$

que introduzido na equação da linha elástica fornece

$$v'' + k^2v = -k^2e,$$

onde $k^2 = \frac{P}{EI}$. A solução particular é $v_p = -e$, resultando

$$\begin{aligned} v(x) &= A \sin kx + B \cos kx - e, \\ v'(x) &= Ak \cos kx - Bk \sin kx. \end{aligned}$$

Condições de contorno:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & B &= e, \\ v'(\ell) &= 0, & Ak \cos k\ell - e &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ak \cos k\ell - e &= 0 \\ \Rightarrow A &= e \tan k\ell. \end{aligned}$$

$$M(x) = Pe + Pv(x),$$

SOLUÇÃO Neste exemplo é conveniente a adoção de um sistema de eixos fixo à extremidade livre, e com o eixo x na direção vertical. O momento fletor é dado por

Resultando,

$$v(x) = e(\tan k\ell \sin kx + \cos kx - 1),$$

$$M(x) = Pe(\tan k\ell \sin kx + \cos kx).$$

A flecha máxima é dada por

$$\begin{aligned} f = v(\ell) &= e \left(\frac{\sin^2 k\ell + \cos^2 k\ell - \cos k\ell}{\cos k\ell} \right) \\ &= e \left(\frac{1 - \cos k\ell}{\cos k\ell} \right). \end{aligned}$$

A fatoração da expressão da flecha da teoria de primeira ordem produz

$$f = \left(\frac{Pe\ell^2}{2EI} \right) \left[\frac{2}{(k\ell)^2} \left(\frac{1 - \cos k\ell}{\cos k\ell} \right) \right].$$

2 Estabilidade e Instabilidade do Equilíbrio

2.1 Introdução

O dimensionamento da seção transversal (ST) de uma barra não depende apenas de considerações de resistência do seu material. Ele também depende das deformações sofridas pela barra, já que mudanças de forma alteram a magnitude e a própria natureza das solicitações. Um exemplo típico é o de uma barra reta bi-apoiada, comprimida por uma força axial P (Fig. 6). Se a barra for suficientemente longa em relação às dimensões da ST, verificamos através de ensaios que nem sempre é possível atingir a força normal associada à tensão de ruptura à compressão do material. Verificamos também que a barra apresenta configurações deformadas com momentos flettores crescentes quanto maior for a força axial P e, consequentemente, tensões adicionais na ST devido a flexão. No final, a barra acaba por romper por flexão, com uma forma distinta da original [1].



Fig. 6: Compressão de uma barra esbelta.

Quando a força axial P é aplicada gradualmente, notamos que a barra permanece reta para pequenos valores de P . Neste caso, se uma pequena força transversal H for usada para fletir a barra, verificamos que esta recupera a forma reta original após a retirada da força que causou a deformação (Fig. 7). Aumentando P , atingimos um valor crítico P_{cr} a partir do qual a barra não retorna mais à forma original com a retirada de H . A configuração reta de equilíbrio torna-se então instável, forçando a barra a procurar uma configuração fletida estável.

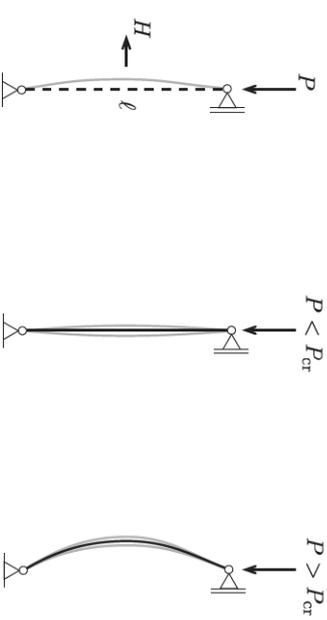


Fig. 7: Perturbação do equilíbrio para diferentes valores de P .

Equilíbrio estável e equilíbrio instável Uma configuração de equilíbrio é dita *estável* quando pequenas perturbações (na posição ou velocidade do sistema) geram movimentos que se mantêm próximos da configuração de equilíbrio, e tão mais próximos quanto menores forem as perturbações. A configuração de equilíbrio é dita *instável* quando não for estável, ou seja, pequenas perturbações podem gerar movimentos que tendem a afastar o sistema da configuração de equilíbrio. Um caso particular de configuração instável é a de *equilíbrio indiferente*, para a qual uma perturbação na *posição* do sistema faz com que ele permaneça onde for deixado.

Os cilindros apoiados nas superfícies convexa, côncava e plana da Fig. 8 ilustram bem as diferentes configurações de equilíbrio.

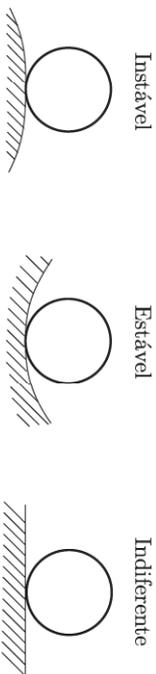


Fig. 8: Estabilidade e instabilidade de um cilindro.

2.2 O Problema da Barra Rígida Presa a uma Mola

O estudo da estabilidade de uma barra vertical rígida presa a uma mola rotacional ajuda a entender o conceito de flambagem e o procedimento de resolução que discutiremos a seguir. Consideremos uma carga vertical P aplicada ao sistema da Fig. 9, em que a resposta da mola é proporcional ao ângulo θ com a vertical. Os momentos externo e interno são, respectivamente,

$$M_{\text{ext}} = P f = P \ell \sin \theta, \quad M_{\text{int}} = c \theta,$$

com o primeiro tendendo a afastar a barra da posição vertical e o segundo tendendo a restaurar esta posição. O equilíbrio na configuração deformada requer $M_{\text{ext}} = M_{\text{int}}$, resultando,

$$P = \frac{c}{\ell} \frac{\theta}{\sin \theta}.$$

A estabilidade do equilíbrio pode ser verificada introduzindo uma perturbação de posição $\Delta\theta$ e examinando o comportamento dos momentos M_{ext} e M_{int} na Fig. 10, onde m_{ext} e m_{int} são os coeficientes angulares das tangentes para $\theta = 0$.

- Para $P \leq c/\ell$, ou $m_{\text{ext}} \leq m_{\text{int}}$, M_{int} cresce mais com o ângulo θ do que M_{ext} , e a barra

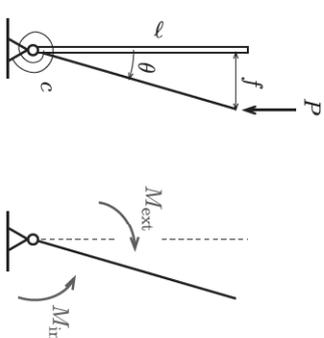


Fig. 9: Barra rígida presa a uma mola. Sentido dos momentos externo e interno.

tende a voltar para a posição inicial depois de perturbada (configuração estável).

- Para $P > c/\ell$, é a vez de M_{ext} crescer mais que M_{int} , e a barra tende a se afastar da configuração vertical, a qual passa a ser uma configuração de equilíbrio instável. Neste caso, uma segunda configuração de equilíbrio ocorre para $\theta = \theta_0$. O exame das variações dos momentos M_{ext} e M_{int} provocadas por perturbações $\Delta\theta$ à esquerda e à direita de θ_0 indica que esta configuração é estável.

A carga $P_0 = c/\ell$ a partir da qual existe uma configuração inclinada de equilíbrio, além da configuração vertical que deixa de ser estável, recebe o nome de *carga de flambagem*.

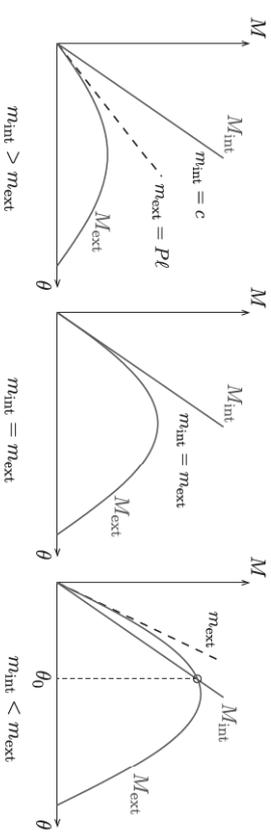


Fig. 10: Momento externo e momento interno versus ângulo θ (P crescente nos gráficos da esquerda para direita).

Teoria linearizada Para pequenas rotações, podemos adotar a aproximação $\sin \theta \approx \theta$ e, em decorrência,

$$M_{\text{ext}} = P \ell \theta.$$

Ou seja, o momento externo é substituído pela reta tangente em $\theta = 0$ na Fig. 11.

Agora, para $M_{int} > M_{ext}$, a configuração reta é estável passando a ser instável para $M_{int} \leq M_{ext}$. O estado crítico ocorre quando $M_{ext} = M_{int}$, a ele correspondendo a carga crítica da teoria linearizada,

$$P_{cr} = \frac{c}{\ell}$$

que é igual à carga de flambagem da estrutura, P_n .

O fato das cargas de flambagem serem as mesmas nas teorias exata e linearizada é importante quando se lida com estruturas mais complexas. Isto acontece sempre que a perda de estabilidade ocorrer nas proximidades da configuração inicial, situação em que é possível substituir os momentos externo e interno pelas respectivas formas linearizadas.

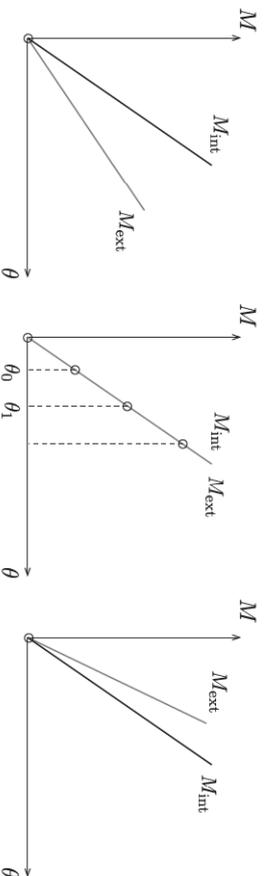


Fig. 11: Momento externo e momento interno versus ângulo θ para a teoria linearizada.

Definição de flambagem Denomina-se *flambagem* ao fenômeno do aparecimento de um ponto de bifurcação de equilíbrio. Em outras palavras, antes da carga P atingir P_n , a configuração de equilíbrio é única e estável; ultrapassada P_n , a configuração inicial deixa de ser estável e surgem novas configurações de equilíbrio possíveis. No exemplo da barra rígida, a configuração vertical inicial passa a ser instável e surgem novas configurações de equilíbrio estáveis inclinadas.

A transição pela carga de flambagem é repentina. Um pequeno acréscimo da carga P é suficiente para tornar a configuração reta de estável para instável. Na realidade, a presença de excentricidades na carga e na geometria, bem como de não-uniformidades no material da barra tornam a flambagem um fenômeno idealizado. Podemos dizer que sempre existe uma deformação inicial por flexão, a qual tende a aumentar devido a um aumento contínuo do momento fletor. Em qualquer caso, o crescimento do momento fletor com a força P é muito rápido nas proximidades da carga de flambagem e , geralmente, a ruptura da barra ocorre antes que a configuração fletida de equilíbrio possa ser atingida.

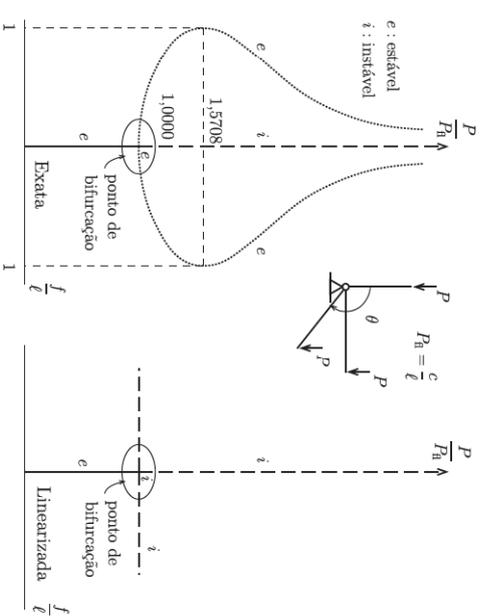


Fig. 12: Flecha versus carga P . Teoria exata e teoria linearizada.

2.3 Determinação das Cargas de Flambagem

Dentre os processos utilizados na determinação da carga de flambagem, os mais simples são:

Processo das Imperfeições A carga de flambagem corresponde ao valor da força axial que leva a estrutura “imperfeita” a apresentar uma flecha infinita na teoria linearizada. As imperfeições dizem respeito a excentricidades da carga, ou perturbações provocadas por um carregamento transversal, Fig. 13.

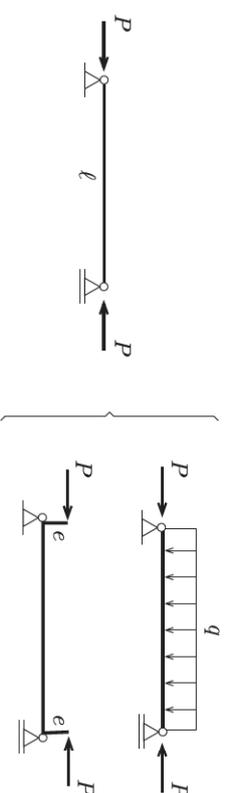


Fig. 13: Processo das imperfeições.

Processo do Equilíbrio

Consiste na procura de novas configurações de equilíbrio, distintas da configuração reta, já que o fenômeno de flambagem implica na perda da estabilidade da configuração inicial e na existência de outras configurações de equilíbrio quando a carga de flambagem é ultrapassada.

Nos dois processos, o uso da teoria linearizada permite apenas a determinação da carga de flambagem e não da configuração deformada. É importante ressaltar que a linearização no caso de barras flexíveis decorre da aproximação da curvatura da barra, ou seja,

$$\frac{v'''}{(1+v'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M}{EI} \implies v''' \approx -\frac{M}{EI}.$$

Desse modo, está implícita na teoria linearizada a hipótese de pequenas rotações ($v' \ll 1$).

2.4 Exemplos do Processo do Equilíbrio

Quatro exemplos de aplicação do processo do equilíbrio são examinados a seguir. Nos dois primeiros, tratamos das barras bi-apoiada e em balanço. No terceiro, lidamos com uma coluna hiperestática, enquanto no quarto discutimos as condições de contorno para uma barra com mudança abrupta da seção transversal.

Exemplo 5 Determine a carga de flambagem da barra bi-apoiada (carga de Euler).

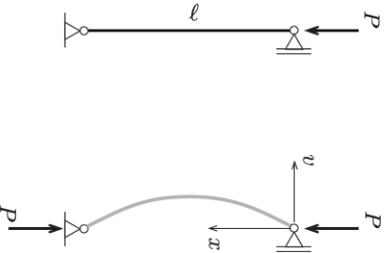


Fig. E-5

definem o sentido positivo de $\varphi \approx v'$, obtemos a seguinte expressão da equação da linha elástica:

$$v'' = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{Pv(x)}{EI}.$$

A qual pode ser reescrita na forma

$$v'' + k^2 v = 0,$$

em que

$$k^2 = \frac{P}{EI}.$$

Para $k = \text{const.}$, a solução geral dessa equação diferencial homogênea tem a forma

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx,$$

e os coeficientes A e B são determinados por meio das seguintes condições de contorno:

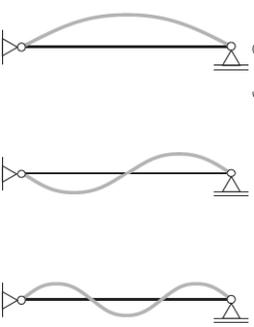
$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\implies B = 0, \\ v(l) = 0 &\implies A \sin kl = 0. \end{aligned}$$

SOLUÇÃO Para escrever a expressão de $M(x)$, não é necessário conhecer *a priori* a configuração fletida da barra, qualquer configuração admissível (compatível com as deformações na flexão e consistente com o problema. Admitindo a configuração fletida da figura e orientando o eixo v no sentido da deformada (lembrar que os sentidos de v e x

A solução trivial $A = 0$ corresponde à configuração reta, restando para $A \neq 0$,

$$\begin{aligned} \sin k\ell = 0 &\implies \begin{cases} k\ell = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \\ = (n+1)\pi, \\ \text{para } n = 0, 1, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

A série crescente de $k\ell$ está associada às cargas críticas P_{cr} , $4P_{cr}$, $9P_{cr}$, \dots ; das quais apenas a primeira, denominada carga de flambagem, tem interesse prático por estar associada a uma configuração estável (as demais estão associadas a configurações violentamente instáveis [2]).



$n = 0$

$n = 1$

$n = 2$

Fig. E-5-i

Exemplo 6 Barra em balanço.

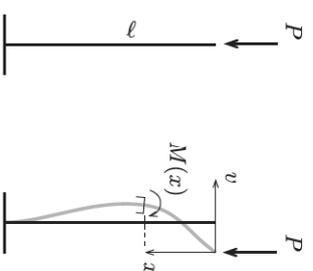


Fig. E-6

Para $n = 0$,

$$k\ell = \pi \implies k^2 = \frac{\pi^2}{\ell^2},$$

$$P_n = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}. \quad (7)$$

Introduzindo o valor de k na equação da linha elástica, obtemos

$$v(x) = A \sin \frac{\pi}{\ell} x.$$

Logo a forma fletida corresponde à metade de uma senoide, conforme a Fig. E-5-i. As amplitudes de deslocamento, entretanto, só podem ser obtidas por teorias de ordem superior.

temos

$$v'' = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{Pv(x)}{EI},$$

cujas solução geral é

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

As condições de contorno são

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\implies B = 0, \\ v'(\ell) = 0 &\implies Ak \cos k\ell = 0. \end{aligned}$$

SOLUÇÃO
RESOLUÇÃO 1 Admitindo a configuração fletida da Fig. E-6 e adotando um sistema de eixos que acompanha a extremidade superior da barra, ob-

A solução trivial $A_k = 0$ corresponde à configuração reta, restando para $A_k \neq 0$

$$\cos k\ell = 0 \implies \begin{cases} k\ell = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \\ = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \dots \end{cases} \text{ para } n = 0, 1, \dots$$

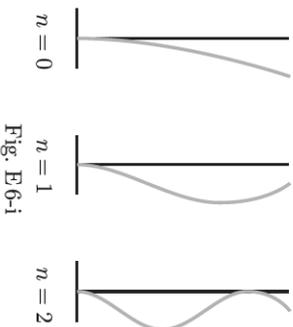


Fig. E-6-i

Como no exemplo anterior, apenas a primeira carga crítica tem interesse prático. Assim, para $n = 0$,

$$k\ell = \frac{\pi}{2} \implies \boxed{P_{\text{H}} = \frac{\pi^2 EI}{(2\ell)^2}} \quad (8)$$

Introduzindo o valor de k na equação da linha elástica, obtemos

$$v(x) = A \sin \frac{\pi x}{2\ell},$$

forma fleída que corresponde a um quarto de senóide, conforme a Fig. E-6-i.

Os valores dos deslocamentos da extremidade livre, entretanto, só podem ser obtidos pela teoria exata, e são mostrados na Fig. 14 juntamente com diversas configurações deformadas [6]. Note que para valores de P ligeiramente superiores à P_{H} o valor de f é extremamente elevado. Assim, o esgotamento da capacidade portante da estrutura ocorre para valores de P muito próximos de P_{H} .

Para $P_{\text{H}} \leq P \leq 1,06P_{\text{H}}$ o valor da flecha f é dado com boa aproximação por

$$f = 1,80\ell \sqrt{\frac{P}{P_{\text{H}}}} - 1.$$

RESOLUÇÃO 2 Outros sistemas de eixos podem ser empregados. Por exemplo, quando a origem do sistema coincide com o centro de gravidade da ST do engaste, Fig. E-6-ii, temos

$$M(\bar{x}) = -P(\delta - v(\bar{x})),$$

em que δ é o deslocamento no topo da barra. Assim,

$$v'' = -\frac{M(\bar{x})}{EI} = k^2(\delta - v) \implies v'' + k^2v = k^2\delta.$$

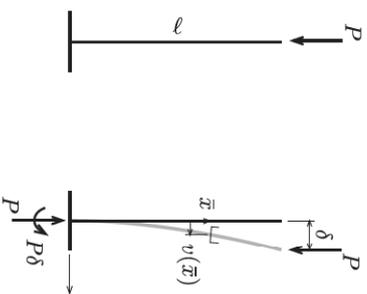


Fig. E-6-ii

A solução da equação diferencial tem a forma

$$v(\bar{x}) = A \sin k\bar{x} + B \cos k\bar{x} + \delta.$$

Impondo as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\implies B = -\delta, \\ v'(0) = 0 &\implies A = 0, \end{aligned}$$

chegamos a

$$v(\bar{x}) = \delta(1 - \cos k\bar{x}).$$

Entretanto, δ é desconhecido e requer uma condição de contorno adicional:

$$v(\ell) = \delta \implies \delta - \delta \cos k\ell = \delta,$$

sendo satisfeita para $\delta = 0$ (condição trivial pois corresponde à configuração reta) e para

$$\cos k\ell = 0 \implies \begin{cases} k\ell = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \dots \\ \text{para } n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

valores iguais aos obtidos anteriormente.

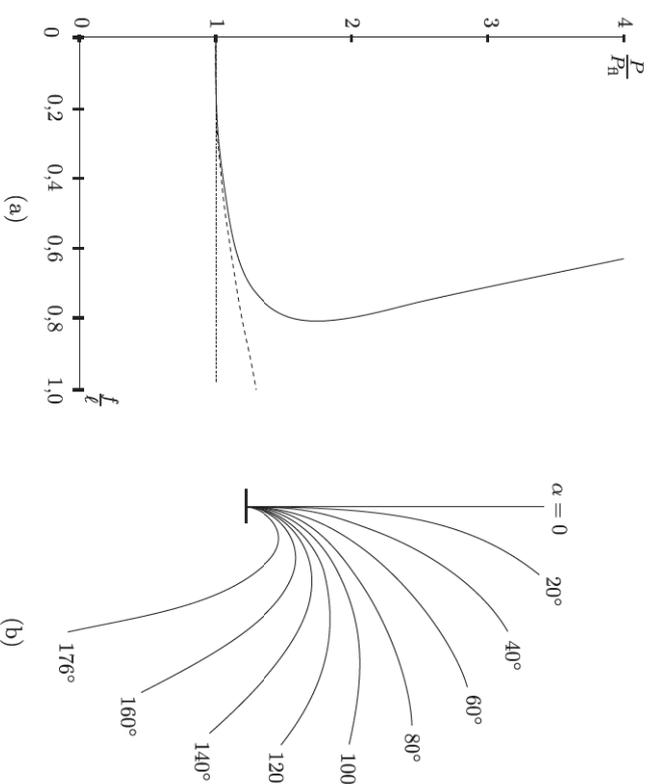


Fig. 14: (a) Flecha versus carga axial para a barra em balanço. A curva tracejada corresponde à aproximação válida para $P_{\text{H}} \leq P \leq 1,06P_{\text{H}}$ e a pontilhada, à teoria de segunda ordem. (b) Configurações fleídas mostrando a rotação da extremidade [6].

Exemplo 7 Barra engastada e articulada.

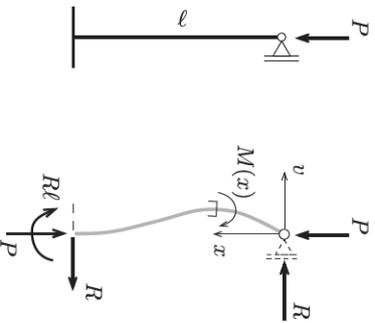


Fig. E7

As condições de contorno são

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\implies B = 0, \\ v(l) = 0 &\implies A \operatorname{sen} kl + \frac{R}{P} \ell = 0, \\ v'(l) = 0 &\implies Ak \cos kl + \frac{R}{P} = 0, \end{aligned}$$

ou colocando as duas últimas equações na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen} kl & \frac{\ell}{P} \\ k \cos kl & \frac{1}{P} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

A existência de uma solução não trivial requer que o determinante da matriz seja zero,

$$\operatorname{sen} kl \frac{k\ell}{P} - \frac{k\ell}{P} \cos kl = 0, \implies \tan kl = k\ell. \quad (10)$$

SOLUÇÃO Como a barra é hiperestática, o momento fletor $M(x)$ deve ser expresso em função da incógnita hiperestática R , resultando

$$\begin{aligned} v'' &= -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{Pv(x) - Rx}{EI} \\ &= -k^2v + \frac{R}{EI}k^2x, \end{aligned}$$

ou

$$v'' + k^2v = \frac{R}{EI}k^2x. \quad (9)$$

A solução geral é

$$v(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx + v_p(x),$$

em que $v_p(x) = b_1x + b_0$. Os coeficientes b_0 e b_1 são obtidos introduzindo-se v_p na equação diferencial,

$$k^2(b_1x + b_0) = \frac{R}{P}k^2x \implies b_1 = \frac{R}{P}, \quad b_0 = 0.$$

Portanto,

$$v(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx + \frac{R}{P}x.$$

Exemplo 8 Barra com mudança abrupta da seção transversal.

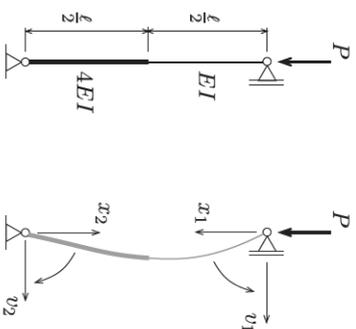


Fig. E8

Condições de contorno (note que as rotações são medidas em sentidos opostos nos dois sistemas)

$$\begin{aligned} v_1(0) = 0 &\implies B_1 = 0, \\ v_2(0) = 0 &\implies B_2 = 0, \\ v_1\left(\frac{\ell}{2}\right) = v_2\left(\frac{\ell}{2}\right) &\implies A_1 \operatorname{sen} \frac{k_1\ell}{2} = A_2 \operatorname{sen} \frac{k_2\ell}{2}, \\ v_1'\left(\frac{\ell}{2}\right) = -v_2'\left(\frac{\ell}{2}\right) &\implies \\ A_1 k_1 \cos \frac{k_1\ell}{2} &= -A_2 k_2 \cos \frac{k_2\ell}{2}. \end{aligned}$$

Para $k_1 \neq 0$ e $k_2 \neq 0$, a divisão da penúltima equação pela última produz

$$\tan \frac{k_1\ell}{2} = -\frac{k_1}{k_2} \tan \frac{k_2\ell}{2},$$

e lembrando que $k_1 = 2k_2$,

$$\begin{aligned} \tan k_2\ell &= -2 \tan \frac{k_2\ell}{2}, \\ \frac{2 \tan \frac{k_2\ell}{2}}{1 - \tan^2 \frac{k_2\ell}{2}} &= -2 \tan \frac{k_2\ell}{2}, \\ \tan^2 \frac{k_2\ell}{2} &= 2 \end{aligned}$$

A primeira carga crítica corresponde à

$$\frac{k_2\ell}{2} = 0,9553,$$

ou,

$$P_A = \frac{14,6EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0,822\ell)^2}. \quad (12)$$

SOLUÇÃO O desenvolvimento trigonométrico simplifica-se muito quando dois sistemas de eixos são adotados conforme mostrado na figura.

Momentos fletores

$$\begin{aligned} M_1(x_1) &= P v_1(x_1), \\ M_2(x_2) &= P v_2(x_2). \end{aligned}$$

Equações da linha elástica

$$\begin{aligned} v_1(x_1) &= A_1 \operatorname{sen} k_1 x_1 + B_1 \cos k_1 x_1, \\ v_2(x_2) &= A_2 \operatorname{sen} k_2 x_2 + B_2 \cos k_2 x_2, \end{aligned}$$

em que $k_1^2 = \frac{P}{EI}$, e $k_2^2 = \frac{P}{4EI}$ ($k_1 = 2k_2$).

2.5 Comprimentos de Flambagem

O exame das Eqs. (8), (7), (11) e (12) sugere a seguinte forma geral para a carga de flambagem:

$$P_h = \frac{\pi^2 EI}{(k_h)^2}.$$

A Fig. 15 lista vários comprimentos de flambagem para diferentes condições de contorno. É importante notar a associação entre os comprimentos de flambagem e as distâncias entre os pontos de inflexão, que muitas vezes podem ser obtidos considerando a simetria da estrutura.

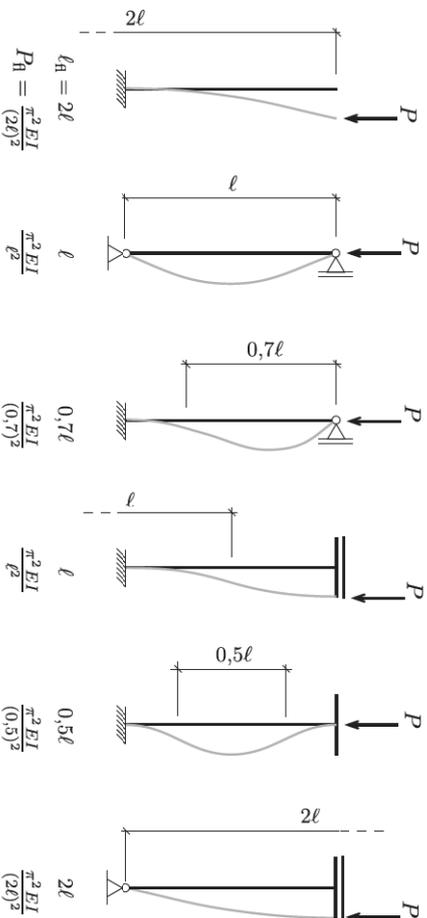


Fig. 15: Comprimentos e cargas de flambagem. Os apoios superiores não resistem à força vertical.

Nota 1 Para vigas contínuas prismáticas apoiadas nas extremidades e com tramos iguais, o comprimento de flambagem k_h é igual ao comprimento comum dos tramos (Fig. 16). Quando os tramos são diferentes, o comprimento k_h pode ser estimado a partir da deformada da viga e dos comprimentos listados na Fig. 15. Por exemplo, o k_h de uma viga com apenas dois tramos deve permanecer entre o comprimento do maior tramo (viga bi-apoiada) e 70% deste comprimento (viga engastada-articulada). Se as extremidades dessa viga forem engastadas, k_h diminuirá ficando entre 50% e 70% do comprimento do maior tramo. Por meio de raciocínios semelhantes, é possível estimar a carga de flambagem para várias estruturas reticuladas.

Nota 2 As fórmulas também se aplicam no caso de pilares iguais submetidos à mesma força normal P , Fig. 17. Entretanto, pilares com condições de contorno ou forças normais distintas não devem ser considerados isoladamente no estudo da estabilidade.

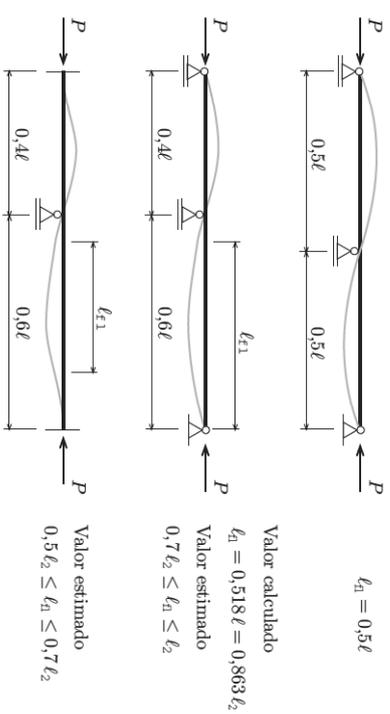


Fig. 16: Comprimentos de flambagem de vigas contínuas.

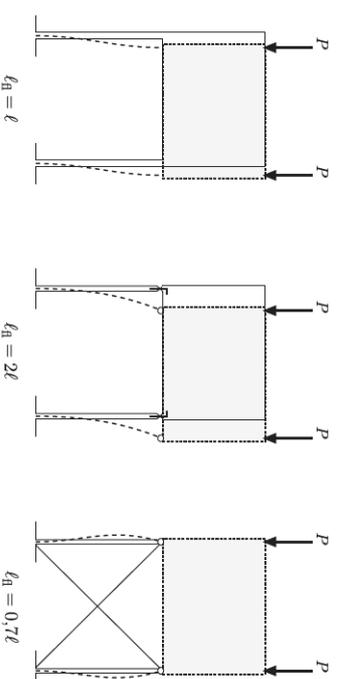


Fig. 17: Pilares sob uma parede com a mesma força normal P e diferentes condições de contorno.

2.6 Exemplos com Barras Rígidas

Os pilares formados por molas e barras rígidas são, por sua simplicidade, bons exemplos para consolidar os conceitos envolvidos no processo do equilíbrio.

Exemplo 9 Determine as cargas de flambagem dos pilares da figura. Considere pequenas rotações de modo que $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$, com θ medido em radianos.

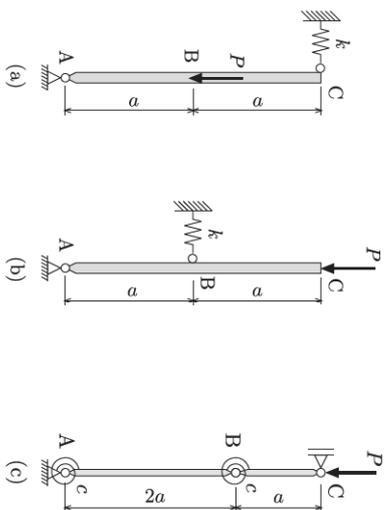


Fig. E9

SOLUÇÃO

Para o pilar (b), o equilíbrio de momentos fornece

$$P \delta - \frac{k\delta}{2} a = 0,$$

portanto,

$$P_H = \frac{ka}{2}.$$

O pilar (c) também possui um único grau de liberdade. Repare que a mola em B é interna e não afeta as reações de apoio. O equilíbrio de momentos em relação a A fornece a reação R ,

$$-R(3a) + \theta c = 0, \Rightarrow R = \frac{\theta c}{3a}.$$

Os esforços que atuam em cada barra estão indicados na figura. Observe que os sentidos dos momentos aplicados pelas molas é contrário ao das rotações. Para calcular a carga de flambagem basta impor o equilíbrio de momentos na barra BC em relação a B,

$$P(2\theta a) - \frac{\theta c}{3a} a - 3\theta c = 0, \Rightarrow P_H = \frac{5c}{3a}.$$

Podemos verificar a resposta impondo o equilíbrio de momentos na barra AB em relação ao nó A,

$$-P(2\theta a) - \frac{\theta c}{3a} 2a + 3\theta c + \theta c = 0, \Rightarrow P_H = \frac{5c}{3a}.$$

portanto,

$$P_H = 4ka.$$

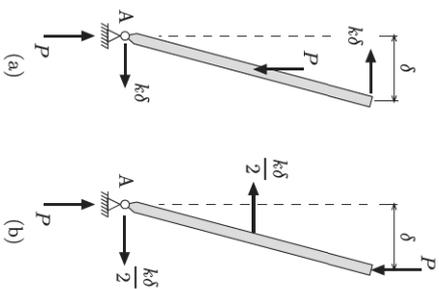


Fig. E9-i

A configuração deformada do pilar (a) fica perfeitamente caracterizada pelo deslocamento δ na extremidade superior. O equilíbrio de momentos em relação ao ponto A fornece

$$k\delta 2a - P \frac{\delta}{2} = 0,$$

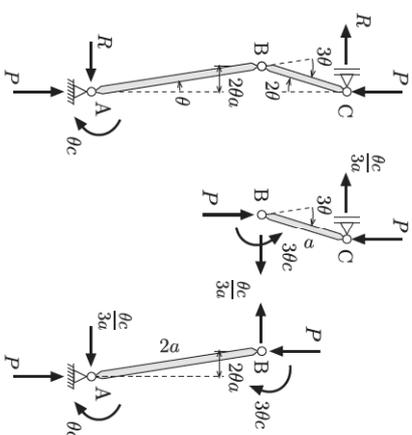


Fig. E9-ii

Exemplo 10 Determine as cargas de flambagem do pilar da figura. Considere pequenas rotações de modo que $\text{sen } \theta \approx \tan \theta \approx \theta$, θ medido em radianos.

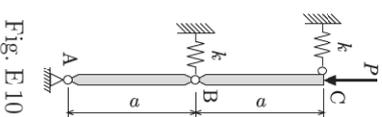


Fig. E10

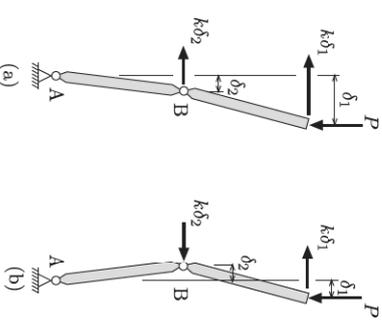


Fig. E10-i

SOLUÇÃO Existem duas configurações de equilíbrio possíveis para o pilar. Contudo, independentemente da configuração adotada, a solução do problema fornece os valores das duas cargas críticas. Assim, admitindo deslocamentos δ_1 e δ_2 no mesmo sentido, configuração (a) na figura, e impondo as condições de momento fletor nulo nas seções imediatamente acima das articulações, obtemos o sistema de equações

$$P(\delta_1 - \delta_2) - k\delta_1 a = 0,$$

$$P\delta_1 - k\delta_1 2a - k\delta_2 a = 0,$$

ou na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} (P - ka) & -P \\ (P - 2ka) & -ka \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Igualando o determinante da matriz a zero, obtemos a equação característica,

$$-(P - ka)ka + (P - 2ka)P = 0,$$

ou

$$P^2 - 3Pka + k^2a^2 = 0,$$

cujas resoluções fornece

$$P = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} ka,$$

ou ainda

$$P = \begin{cases} 2,62 ka \\ 0,382 ka. \end{cases}$$

Portanto,

$$F_H = 0,382 ka.$$

A mesma solução é obtida para deslocamentos $\bar{\delta}_1$ e $\bar{\delta}_2$ com sentidos opostos. Nesse caso, a posição de momentos fletores nulos nas seções imediatamente acima das articulações fornece o

sistema

$$\begin{aligned} P(\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2) - k\bar{\delta}_1 a &= 0, \\ P\bar{\delta}_1 - k\bar{\delta}_1 2a + k\bar{\delta}_2 a &= 0, \end{aligned}$$

ou na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} (P - ka) & P \\ (P - 2ka) & ka \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{II})$$

cujos determinante é igual ao anterior.

Falta ainda determinar a configuração deformada correspondente à carga $F_H = 0,382 ka$. Utilizando a primeira equação do sistema (I), obtemos

$$-0,618ka\bar{\delta}_1 - 0,382ka\bar{\delta}_2 = 0,$$

ou

$$\bar{\delta}_1 = -0,618 \bar{\delta}_2,$$

indicando que a segunda configuração deformada, com deslocamentos em sentidos opostos, é a configuração de flambagem do pilar.

2.7 Algumas Diretrizes para o Cálculo da Carga de Flambagem

O estudo das resoluções dos exemplos permite estabelecer as seguintes diretrizes para o cálculo da carga de flambagem:

1. Identifique todos os vínculos da estrutura e trace uma configuração deformada satisfazendo a todos eles. Uma configuração deformada simples, não exageradamente afastada da configuração inicial, ajuda a expressar o momento fletor.
2. Calcule as reações de apoio na configuração deformada procurando entender o comportamento da estrutura. É possível que algumas reações não sejam usadas, mas isto é melhor do que esquecer um esforço importante no cálculo dos momentos fletores.
3. Se necessário, subdivida a estrutura em trechos (intervalos nos quais as propriedades da ST e o carregamento distribuído são contínuos), já que o equilíbrio deve ser verificado em cada trecho.
4. Escolha o sistema (ou sistemas) de coordenadas. É usual orientar o eixo transversal y na direção da deformada e considerar o momento positivo quando este traciona o lado positivo de y , reproduzindo a convergência das vigas.

5. Escreva as expressões do momento fletor para cada trecho flexível das barras e, logo após, as correspondentes equações diferenciais de equilíbrio não deixando de especificar os intervalos de validade.

6. Imponha as condições de contorno começando pelos vínculos. Depois, estabeleça a continuidade de deslocamento e, se for o caso, de rotação entre os trechos.

7. Nos trechos rígidos, as condições de compatibilidade entre deslocamentos das extremidades podem ser impostas diretamente, mas lembre-se de verificar se o movimento de corpo rígido desses trechos foi considerado nas equações de equilíbrio.

8. Carregamentos mais complexos podem requerer condições envolvendo o momento fletor e a força cortante, o que pode ser obtido a partir da equações diferenciais de equilíbrio e da linha elástica.

9. O número de condições de contorno deve ser igual ao das constantes de integração mais o número de incógnitas hiperestáticas e parâmetros usados para descrever a deformada da estrutura.

10. Nos problemas complexos, a resolução preliminar de sistemas formados por barras rígidas e molas permite tirar conclusões que auxiliam na resolução dos problemas originais envolvendo barras flexíveis.

3 Tensão de Flambagem e Noções de Dimensionamento à Flambagem

Define-se *tensão de flambagem*, ou *tensão de Euler*, como o quociente entre a carga de flambagem, $P_H = \pi^2 EI / l_H^2$, e a área A da seção transversal,

$$\sigma_H = \frac{P_H}{A}. \tag{13}$$

A Eq. (13) pode ser reescrita usando as definições do *raio de giração* i da seção e do *índice de esbeltez* λ da barra,

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad \lambda = \frac{l_H}{i}. \tag{14}$$

Assim,

$$\sigma_H = \frac{\pi^2 EI}{\frac{l_H^2}{A}} = \frac{\pi^2 E I A}{l_H^2}, \quad \Rightarrow \quad \sigma_H = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{15}$$

A equação acima é válida apenas para tensões inferiores ao limite de proporcionalidade do material, σ_p , pois até agora admitimos a linearidade entre tensão e deformação ($\sigma = E\varepsilon$).

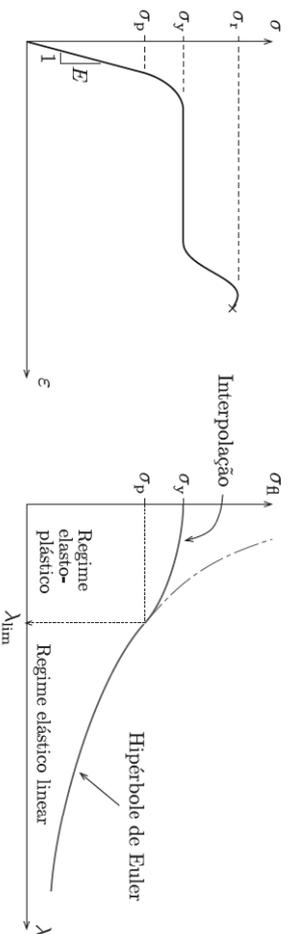


Fig. 18: Diagrama tensão-deformação e hipérbole de Euler.

A Eq. (15) descreve a *hipérbole de Euler* no plano de σ_H versus λ . No gráfico à direita da Fig. 18, o parâmetro λ_{lim} está associado à tensão σ_p e recebe o nome de *índice de esbeltez limite*. Ele demarca dois trechos com equações distintas: a hipérbole de Euler para $\lambda \geq \lambda_{lim}$ e uma curva de interpolação para $\lambda < \lambda_{lim}$.

Para tensões maiores que σ_p são adotadas curvas de interpolação obtidas experimentalmente. Não havendo esta informação, é usual adotarmos uma interpolação parabólica na forma

$$\sigma_H = \sigma_y - (\sigma_y - \sigma_p) \left(\frac{\lambda}{\lambda_{lim}} \right)^2, \tag{16}$$

em que σ_y é a tensão de escoamento do material. Por exemplo, para um aço com $\sigma_y = 24 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_p = 21 \text{ kN/cm}^2$ e $E = 21 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2$, temos $\lambda_{lim} = \pi \sqrt{E/\sigma_p} = 99,3 \approx 100$, resultando a expressão

$$\sigma_H = 24 - 3 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \quad \text{para} \quad \lambda < \lambda_{lim} \quad \left[\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right], \tag{17}$$

representada na Fig. 19.

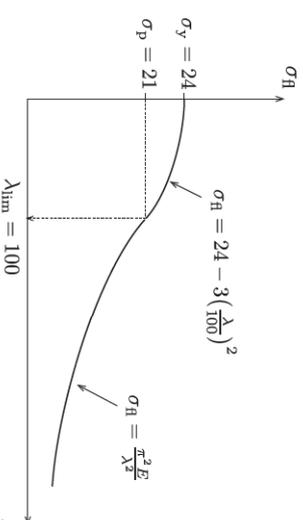


Fig. 19: Tensão de flambagem em kN/cm^2 .

Exemplo 11 Dimensione a seção transversal da barra da figura, admitindo as seguintes propriedades do material: $E = 21 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_y = 24 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_p = 21 \text{ kN/cm}^2$. Considere um coeficiente de segurança $\gamma = 2$.

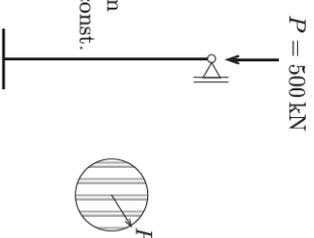


Fig. E.11

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{\pi R^4}{4} \\ A &= \pi R^2 \end{aligned} \right\} i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{R}{2}.$$

• Índice de esbeltez

$$\lambda = \frac{l_H}{i} = \frac{0,7 \ell}{\frac{R}{2}} = \frac{280}{R},$$

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = 99,3 \approx 100.$$

• Admitindo inicialmente $\lambda > \lambda_{lim}$

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \frac{\sigma_H}{\gamma}, \quad \text{com} \quad \sigma_H = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

SOLUÇÃO

• Seção transversal [medidas em cm]

Logo,

$$\frac{\gamma P}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{2 \times 500}{\pi R^2} = \frac{\pi^2 21 \times 10^3}{\frac{280^2}{R^2}}$$

$$\pi^3 R^4 = \frac{2 \times 500 \times 280^2}{2,1 \times 10^4} \Rightarrow R = 3,31 \text{ cm.}$$

Verificação: $\lambda = \frac{280}{3,31} = 84,6 < 100$, portanto a hipótese **não** se verifica.

• Admitindo $\lambda < \lambda_{lim}$

$$\sigma_H = 24 - 3 \left(\frac{\lambda}{\lambda_{lim}} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{2 \times 500}{\pi R^2} = 24 - 3 \left(\frac{280}{R \cdot 100} \right)^2$$

$$\Rightarrow R = 3,77 \text{ cm.}$$

Exemplo 12 (3^ª prova, PEF-202, 1/12/1986) Determine o comprimento ℓ do pilar de modo que se tenha um coeficiente de segurança $\gamma = 3$ em relação à flambagem. São dados: $E = 7 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_y = 5 \text{ kN/cm}^2$ e $\sigma_p = 4 \text{ kN/cm}^2$. Considere uma interpolação quadrática entre σ_p e σ_y no gráfico de σ em função de λ .

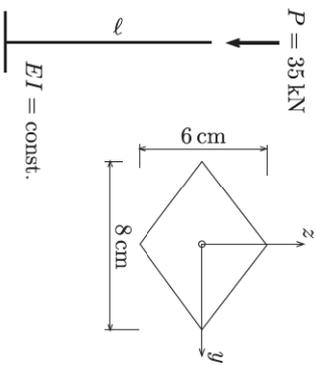


Fig. E 12

SOLUÇÃO

• Seção transversal

Como as condições de contorno são as mesmas nas duas direções centrais, a flexão ocorre em torno do eixo central y com o menor momento de inércia

$$A = 2\left(3 \times \frac{8}{2}\right) = 24 \text{ cm}^2,$$

$$I_2 = I_y = 2 \left(\frac{8 \times 3^3}{12} \right) = 36 \text{ cm}^4.$$

• Índice de esbeltez

$$\lambda = \frac{l_H}{i_y} = \frac{2\ell}{\sqrt{\frac{36}{24}}} = 1,633\ell,$$

Exemplo 13 Determine a carga admissível $\bar{P} = F_H/\gamma$ para o pilar da figura. Note que o apoio no topo apenas restringe os deslocamentos na direção y . São dados: $E = 21 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_y = 24 \text{ kN/cm}^2$ e $\sigma_p = 21 \text{ kN/cm}^2$. Considere $\gamma = 3$ e uma interpolação parabólica para $\lambda < \lambda_{lim}$.

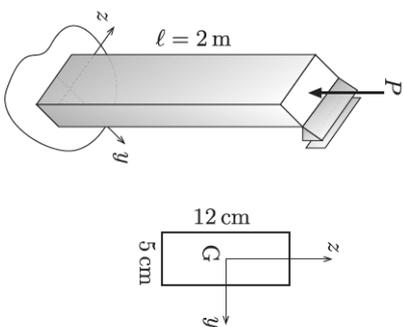


Fig. E 13

SOLUÇÃO As diferentes condições de contorno em cada plano vertical *central* levam a comprimentos de flambagem e índices de esbeltez distintos.

• Plano vertical normal a z :
barra engastada-articulada, $l_H = 0,7\ell$

$$A = 60 \text{ cm}^2,$$

$$I_z = \frac{12 \times 5^3}{12} = 125 \text{ cm}^4,$$

$$i_z = \sqrt{\frac{125}{60}} = 1,443 \text{ cm.}$$

Portanto,

$$\lambda_z = \frac{0,7 \times 200}{1,443} = 97,0.$$

• Plano vertical normal a y :
barra engastada, $l_H = 2\ell$

$$I_y = \frac{5 \times 12^3}{12} = 720 \text{ cm}^4,$$

$$i_y = \sqrt{\frac{720}{60}} = 3,46 \text{ cm.}$$

Portanto,

$$\lambda_y = \frac{2 \times 200}{3,46} = 115,6.$$

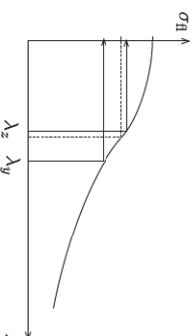


Fig. E13-i

A flambagem ocorrerá primeiro no plano normal a y com $\lambda > \lambda_{lim}$

$$\sigma_H = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 2,1 \times 10^4}{115,6^2} = 15,51 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\bar{P} = \frac{P_H}{\gamma} = \frac{\sigma_H A}{\gamma} = \frac{15,51 \times 60}{3}$$

$$\Rightarrow \bar{P} = 310,2 \text{ kN.}$$

Exemplo 14 Determine as *dimensões econômicas* da seção transversal retangular do pilar abaixo. São dados: $E = 21 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_y = 24 \text{ kN/cm}^2$ e $\sigma_p = 21 \text{ kN/cm}^2$. Considere $\gamma = 3$ e uma interpolação parabólica para $\lambda < \lambda_{\text{lim}}$.

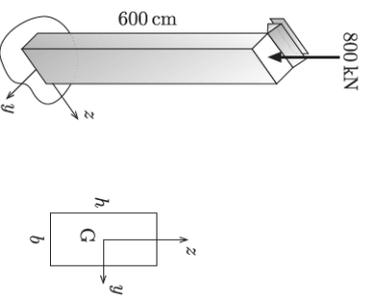


Fig. E14

SOLUÇÃO Como os custos relativos ao material e à construção do pilar não foram dados, restringimos a condição econômica à ocorrência simultânea da flambagem nas duas direções, ou seja

$$\sigma_{H y} = \sigma_{H z} \Rightarrow \lambda_y = \lambda_z,$$

em que os subscritos y e z indicam os eixos centrais de flexão:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}},$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{b^3h}{12bh}} = \frac{b}{2\sqrt{3}};$$

Referências

- [1] Belyaev, N. M. *Strength of Materials*. English ed., Mir, Moscow, 1979.
- [2] Crandall, S. H. and Dahl, N. C. and Lardner, Thomas J. *An Introduction to the Mechanics of Solids*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1978.
- [3] Feodosiev, V. I. *Resistencia de Materiales*. 2nd. ed. (espanhol), MIR, Moscow, 1980.
- [4] Lindenberg, Henrique. *Notas de Aula*, 1988.
- [5] Popov, E. P. *Introdução à Mecânica dos Sólidos*. (Introduction to Mechanics of Solids, 1968), Edgard Blücher, São Paulo, 1978.
- [6] Timoshenko, S. P., Gere, J. E. *Theory of Elastic Stability*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
- [7] Zagottis, D. *Estabilidade e Instabilidade do Equilíbrio das Estruturas*. Apostila do PEF - EPUSP, São Paulo, 1980.

$$\lambda_y = \frac{k_{H y}}{i_y} = \frac{2 \times 600}{\frac{h}{2\sqrt{3}}} = \frac{2400\sqrt{3}}{h},$$

$$\lambda_z = \frac{k_{H z}}{i_z} = \frac{0,7 \times 600}{\frac{b}{2\sqrt{3}}} = \frac{840\sqrt{3}}{b}.$$

Impondo $\lambda_y = \lambda_z$, chegamos a $b = 0,35h$. Para o dimensionamento, admitimos inicialmente que o pilar trabalhe em regime elástico linear,

$$\gamma\sigma \leq \sigma_H \Rightarrow \frac{\gamma P}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

ou

$$3 \times 800 = \frac{\pi^2 \times 21 \times 10^3}{0,35h^2} = \left(\frac{2400\sqrt{3}}{h}\right)^2,$$

logo

$$h = 27,5 \text{ cm} \quad b = 9,6 \text{ cm}.$$

Finalmente, verificamos a hipótese de $\lambda \geq \lambda_{\text{lim}}$,

$$\lambda = \frac{2400\sqrt{3}}{27,5} = 151,2 > 100.$$

Index

- carga de flambagem, 14
- dimensão econômica, 33
- efeito de segunda ordem, 3
- equilíbrio
 - estável, 13
 - indiferente, 13
 - instável, 13
- flambagem, 15
- hipérbole de Euler, 29
- momento de segunda ordem, 2
- raio de giração, 29
- superposição modificada, 4
- tensão de Euler, 29
- tensão de flambagem, 29
- índice de esbeltez, 29
- índice de esbeltez limite, 29