



RECORDAÇÃO E MOTIVAÇÃO

Larissa Driemeier

NOSSO CALENDÁRIO



Aula	Data	Tema	Professor
1	1/8	Introdução da disciplina Lista de Exercícios de modelagem Sinais	Larissa
2	2/8	Transformada de Fourier	Larissa
3	8/8	Transformada de Fourier Teste T1 – 30min	Larissa
4	9/8	Transformada de Fourier	Larissa
5	15/8	Diagrama de Bode	Larissa
6	16/8	Diagrama de Bode	Larissa
7	22/8	Diagrama de Bode	Larissa
8	23/8	Diagrama de Bode	Larissa
9	29/8	P1	
21	17/10	P2 + Entrega Primeiro trabalho T1	
31	22/11	P3 + Entrega Segundo Trabalho T2	
32	29/11	Sub	
	Fev/2018	Rec	

AVALIAÇÃO



A avaliação se dará por 3 provas, $P1, P2, P3$, 1 Teste $T1$ e 2 trabalhos, $Tr1$ e $Tr2$, de acordo com:

$$\text{Se } \frac{P1+P2+P3}{3} \geq 4,$$

$$Média = \frac{1}{4} P1 + \frac{1}{4} P2 + \frac{1}{4} P3 + \frac{1}{4} \left(\frac{T1}{3} + \frac{Tr1}{3} + \frac{Tr2}{3} \right)$$

$$\text{Se } \frac{P1+P2+P3}{3} < 4,$$

$$Média = \frac{P1 + P2 + P3}{3}$$

BIBLIOGRAFIA

BÁSICA:

Teoria do Controle Moderno, K Ogata

Vibrações Mecânicas, S. Rao, qualquer edição

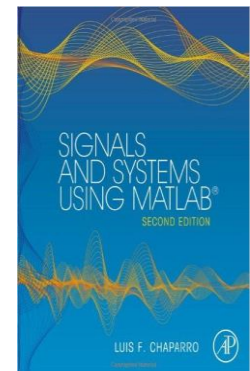
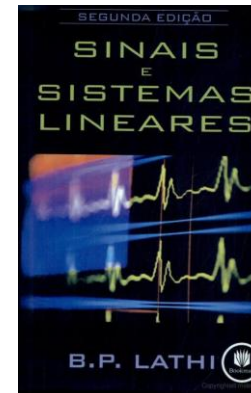
Notas de Aula



AVANÇADA:

Sinais e Sistemas Lineares, B P Lathi

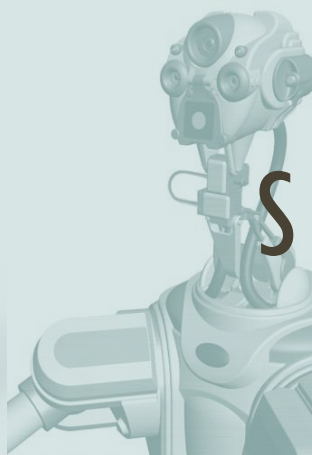
Signals and Systems using MatLab, L P Chaparro





IMPORTANTE...

Listas de exercícios, mudança da programação, entrega de trabalhos, comunicados gerais serão por meio do STOA. Por favor, verifique semanalmente o site.



SINAIS

SINAIS



Matematicamente falando, um sinal é apenas uma função.

Em engenharia é entendido como sinal qualquer evento que carregue informação.

Os *sinais* podem ser descritos de muitas maneiras: através de *números*, *gráficos*, de uma *sequência de dígitos (bits)*, etc.

EXEMPLO DA SIRENE DE POLÍCIA...

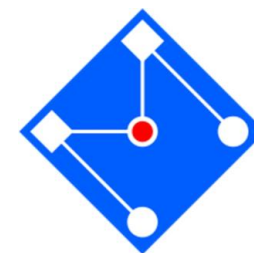
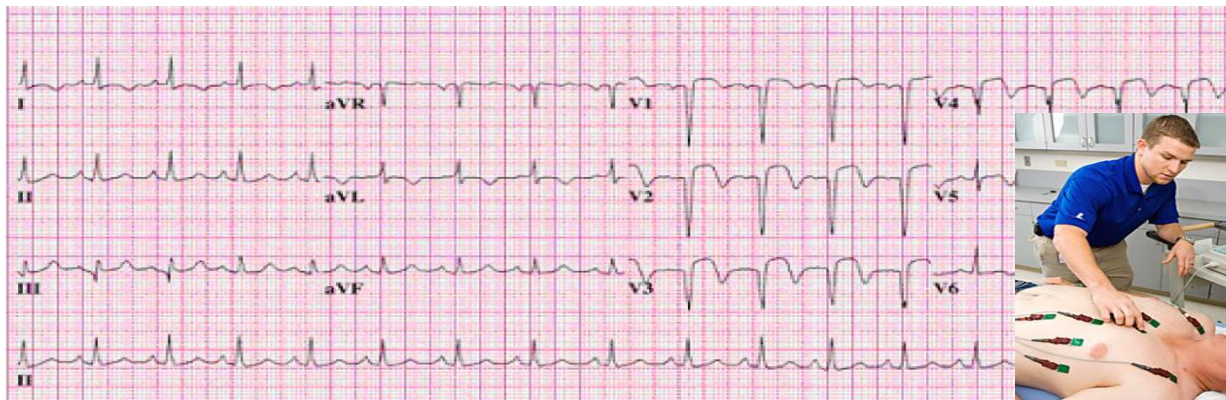


Uma sirene de um carro de polícia **se aproximando** produz uma pressão acústica variável no tempo que nossos ouvidos percebem como som. Uma representação simplificada do sinal de sirene é

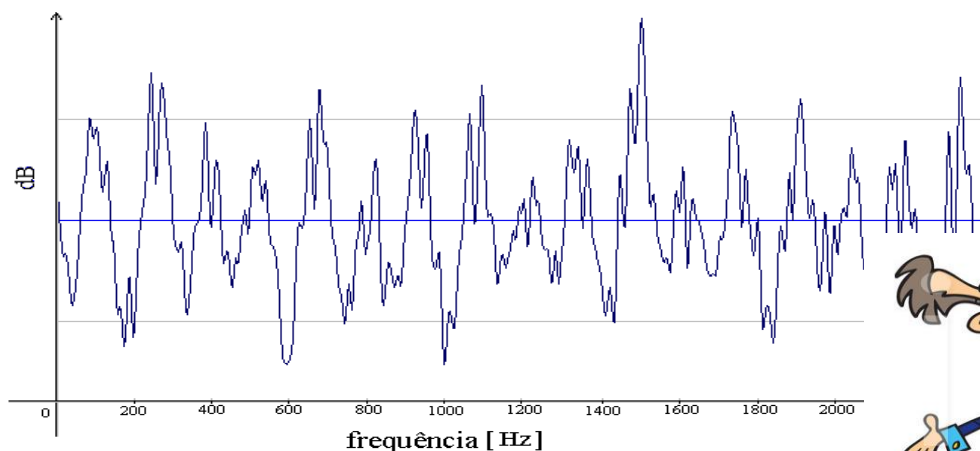
$$s(t) = (1 + t) \sin[2\pi * 1000 + 10 * t + 300 * \sin(2\pi * 2t)]$$

```
dt=1/44100;  
Fs=44100;  
t=0:dt:10;  
f_c=1000;  
beta=300;  
f_m=2*pi;  
  
sirene=(1 + t).* sin(2*pi*f_c+10.*t -  
beta*sin(2*f_m*pi*t))  
sound(sirene,Fs);  
wavwrite(sirene, Fs, 16,'sirene.wav');
```



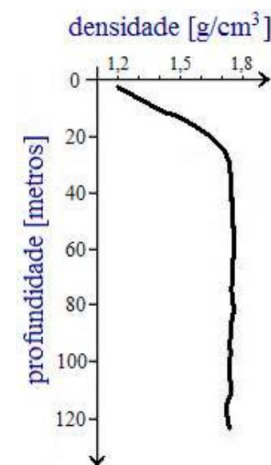


Sinal biomédico: – Eletrocardiograma (ECG) de um paciente



©Ron Leishman * illustrationsOf.com/439451

Sinal de voz, obtido com o uso de um microfone.

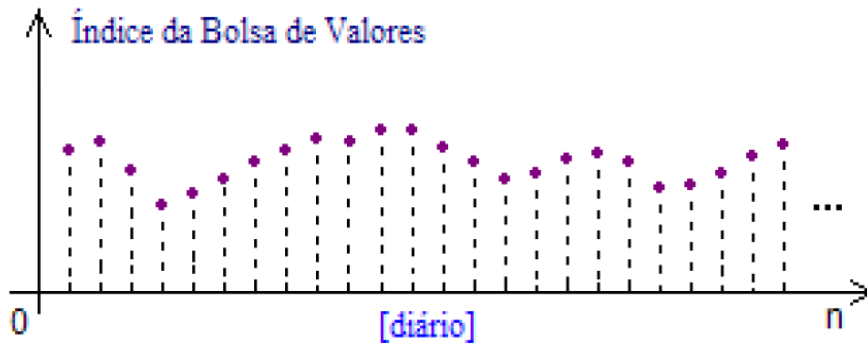


Em geofísica, sinais que representam variações de quantidades físicas do solo.



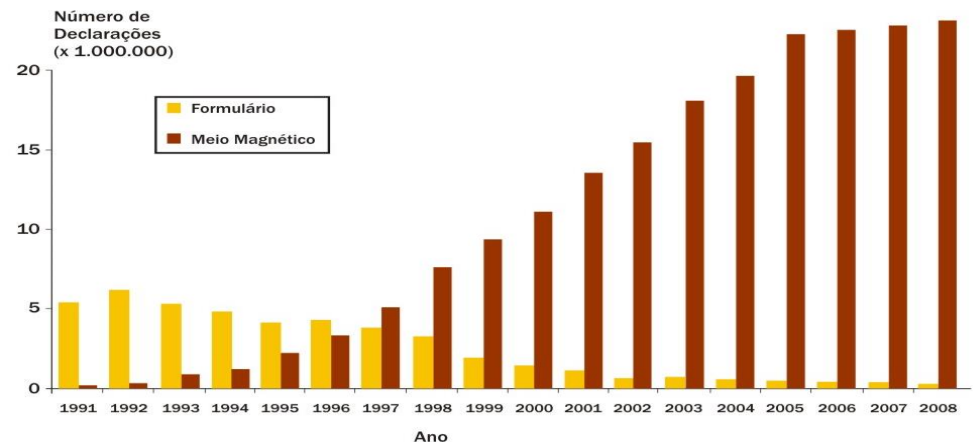
Sinal dos níveis de cinza dos pixels da imagem

120	138	120	151	139
110	129	129	139	146
150	138	137	138	129
137	129	129	128	137
146	145	131	132	145



Sinal do índice da bolsa de valores

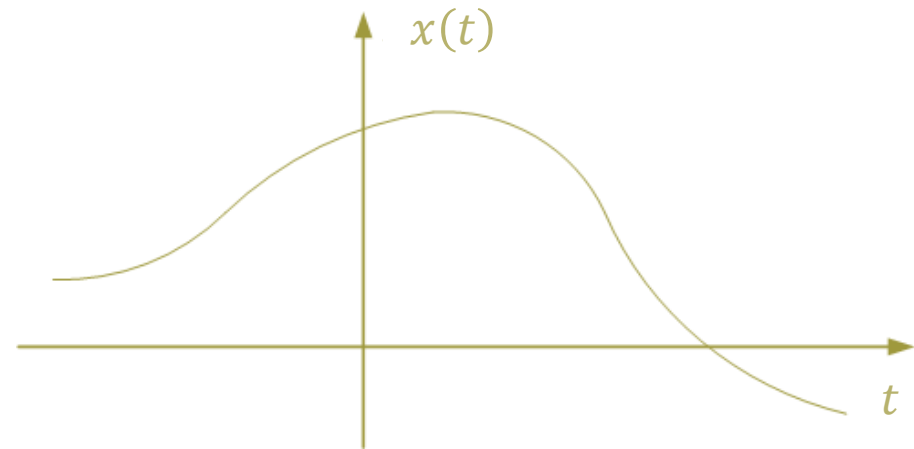
Sinal do número de declarações do IR por formulário e meio magnético



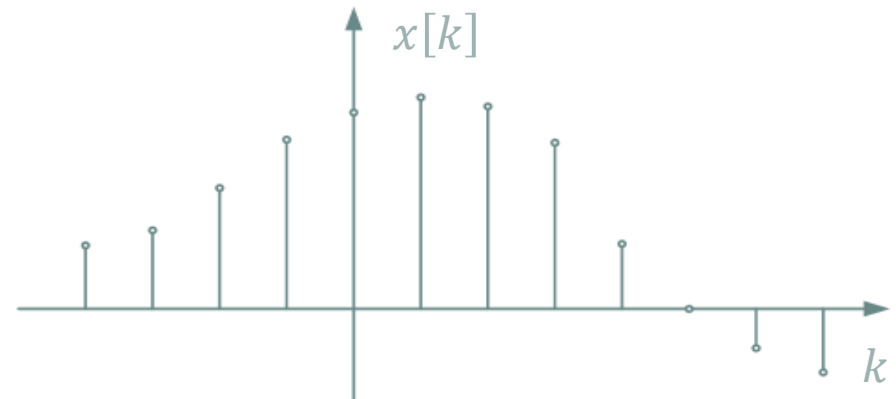
SINAIS DISCRETOS VS CONTÍNUOS



A maioria dos **sinais físicos** são **contínuos**, p.ex., posição e velocidade de um corpo, fala ou música captada por um microfone, tensão ou corrente num circuito elétrico...



Só os **sinais discretos** podem ser armazenados e processados em computadores digitais.



CONTÍNUO VS DISCRETO



Assim, sinais que são naturalmente contínuos no tempo tornam-se sinais discretos para este propósito. Por exemplo:

- No caso de sistemas digitais de áudio
 - *a voz;*
 - *a música;*
 - *o som em geral;*
- No caso de sistemas digitais de imagem
 - *as fotografias que aparecem nos jornais e livros;*
 - *as imagens de um filme gravado em DVD;*
- No caso do piloto automático digital
 - *a posição da aeronave;*
 - *a velocidade da aeronave;*
 - *a direção da aeronave.*

SINAIS PERIÓDICOS

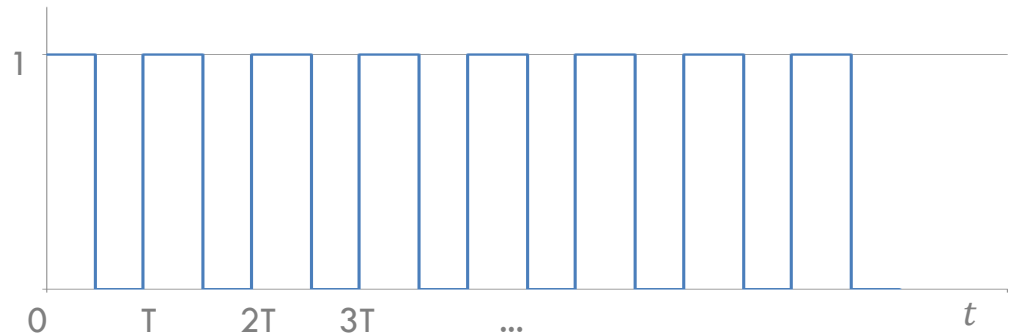


Um sinal é periódico de período T caso se mantenha inalterado por um deslocamento temporal de T ,

$$x(t + T) = x(t)$$

ou, no caso discreto,

$$x[k + N] = x[k]$$



Onde,

N, T representam o **período fundamental do sinal**.



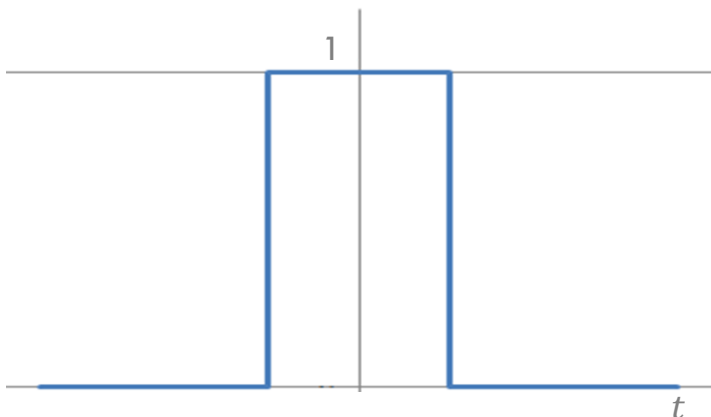
SINAIS NÃO-PERIÓDICOS



Determinísticos

Seu valor pode ser determinado em qualquer instante de tempo.

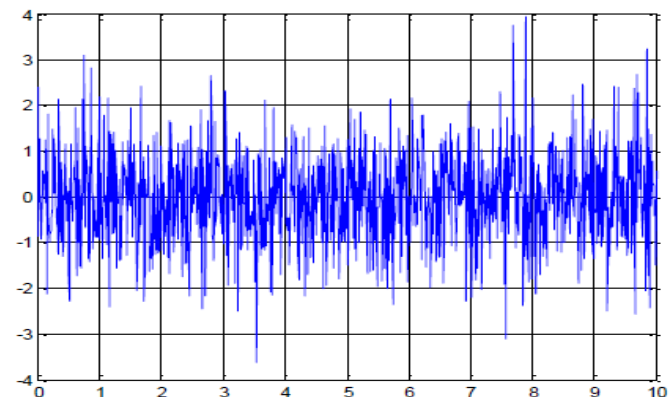
- Ex. Sinal rampa unitária



Aleatórios

Há incertezas associadas ao seu valor em qualquer instante de tempo.

- Ex. ruído branco



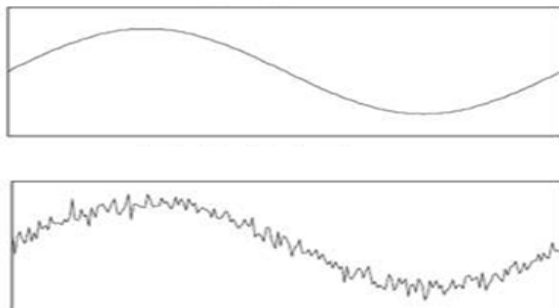
SINAL ANALÓGICO E DIGITAL



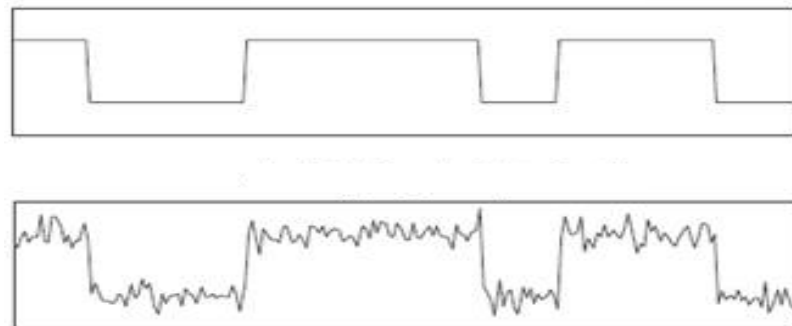
Sinal analógico – caracterizado por variações suavizadas entre máximo e mínimo de sua amplitude, como ondas senoidais.

Sinal digital – caracterizado por variações bruscas, como uma onda quadrada, que pode ser traduzida em código binário.

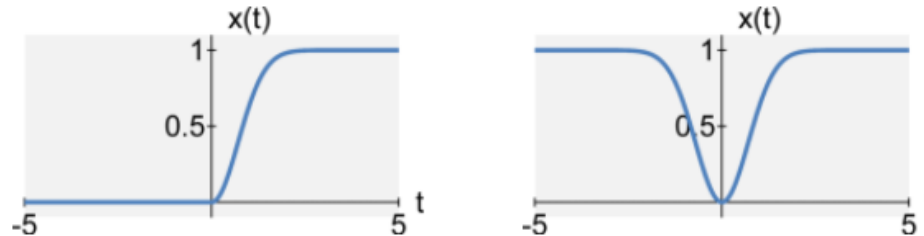
Sinal analógico



Sinal digital



CAUSAL E NÃO CAUSAL



Um sinal contínuo no tempo $x(t)$ é dito ser **causal** quando $x(t) = 0$ para $t < 0$

Caso o sinal comece antes de $t = 0$ e se estenda para $t > 0$ o sinal é chamado de **não causal**

Se o sinal existir apenas para $t < 0$, o sinal é chamado de **anti-causal**

DIMENSÃO



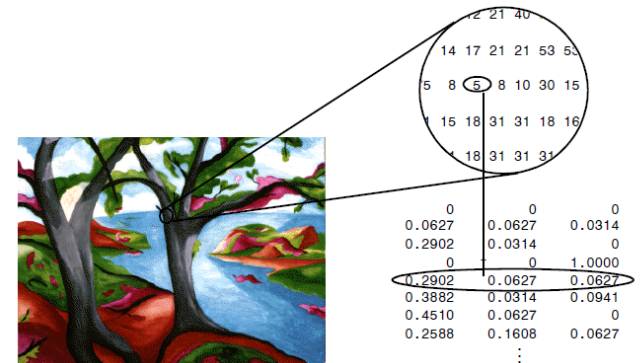
Sinais 1D

Um sinal de áudio é um sinal unidimensional, ou 1D, uma vez que é somente função do tempo, $f(t)$.



Sinais 2D

Uma fotografia colorida é um sinal bidimensional (2D), ou uma imagem, uma vez que é uma função de duas coordenadas espaciais, $f(x, y)$.



Sinais 3D

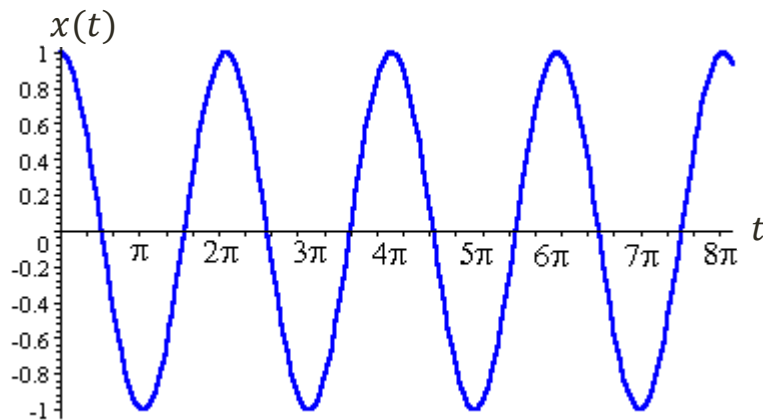
Um filme preto e branco é uma sequência de imagens com variação no $f(x, y, t)$.



SIMETRIA DE SINAIS



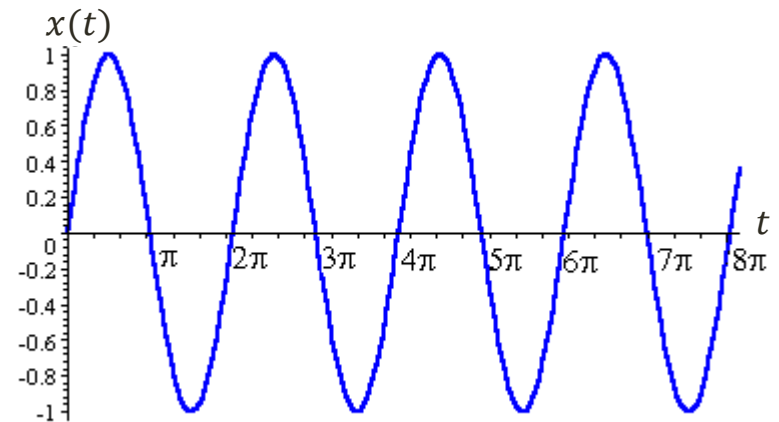
Par



$$x(-t) = x(t)$$

Ex.: $x(t) = \cos t$

Ímpar



$$x(-t) = -x(t)$$

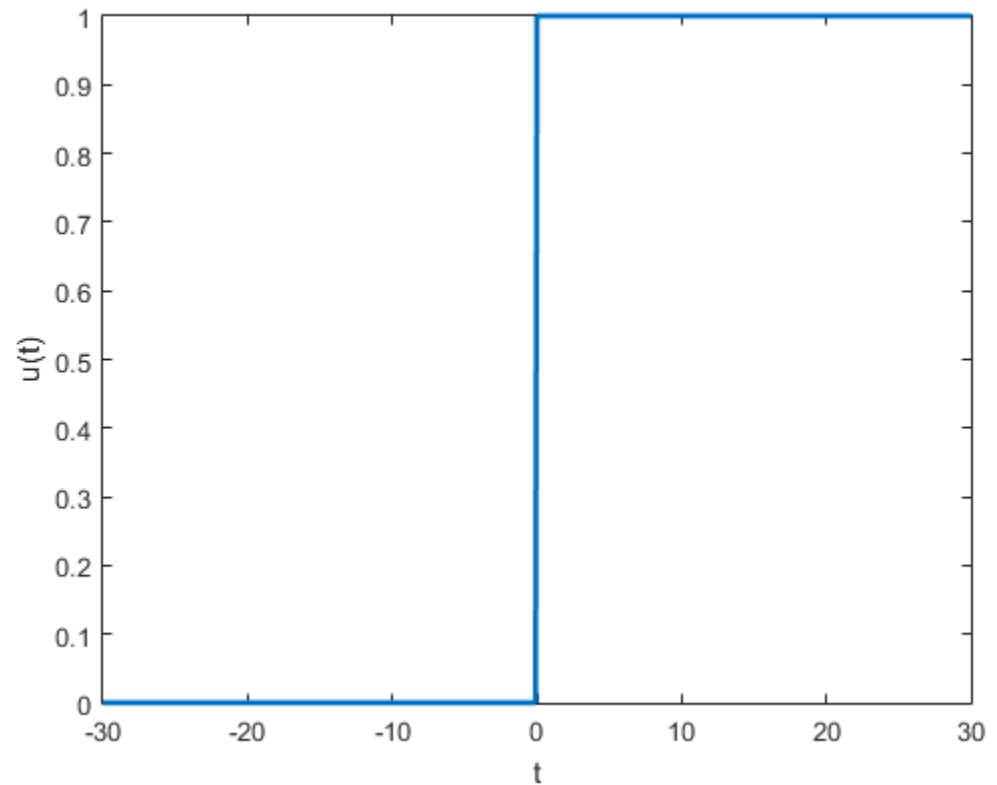
Ex.: $x(t) = \sin t$

ALGUNS SINAIS IMPORTANTES...



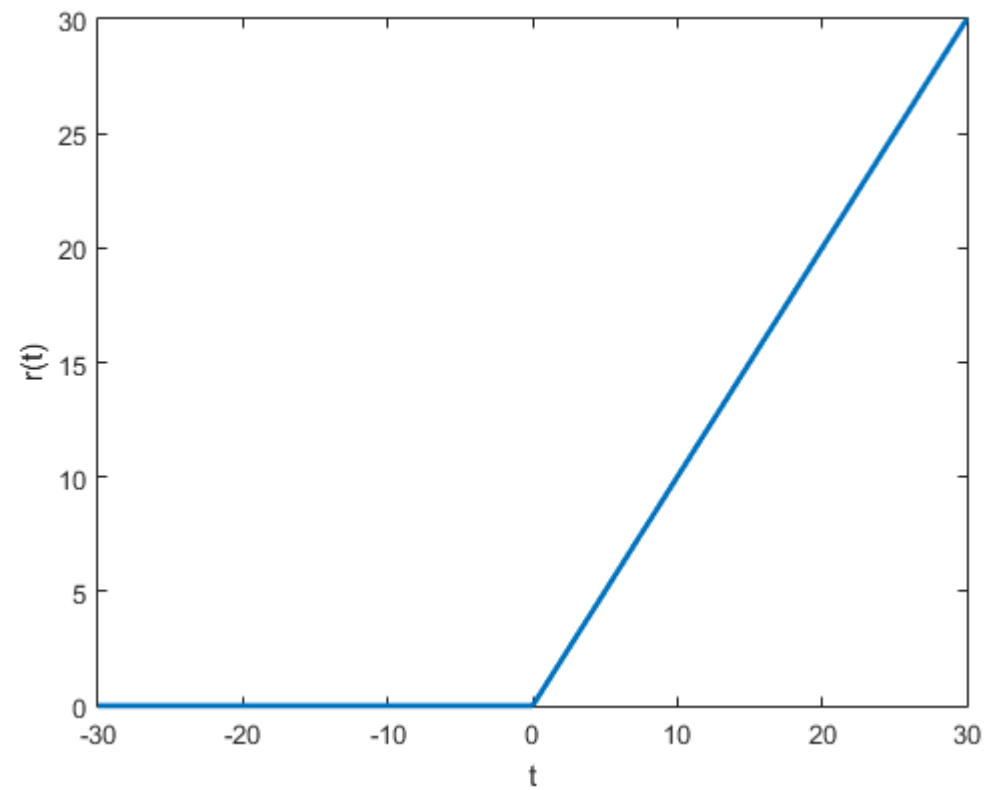
Degrau unitário,

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Rampa unitária,

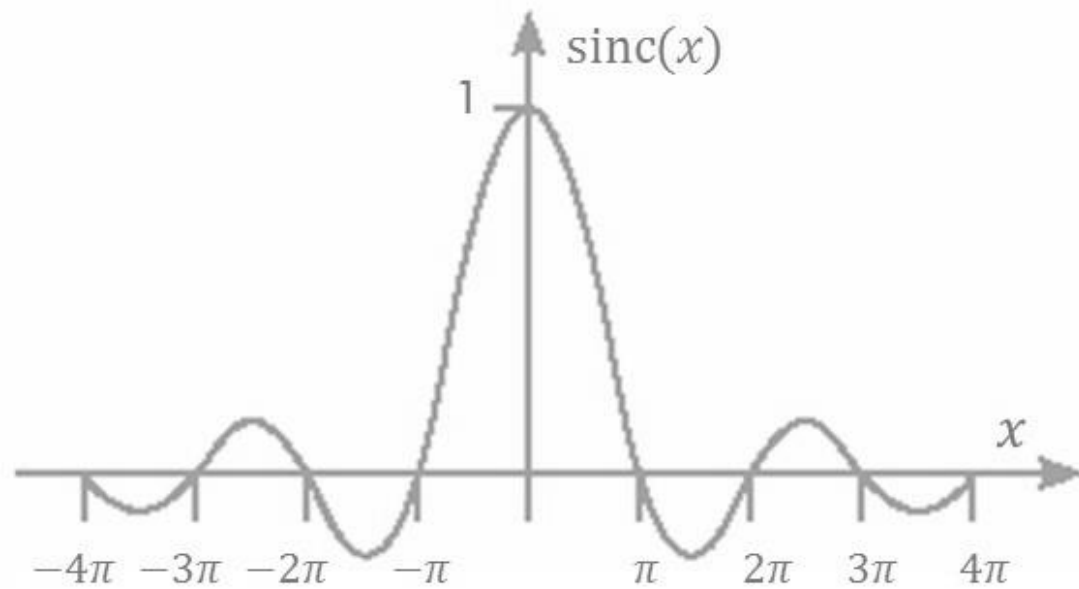
$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

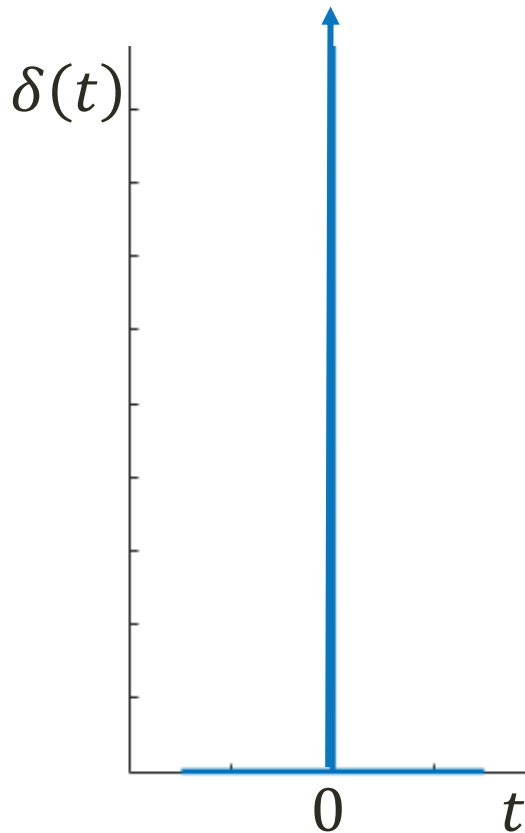


Função sinc



$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$



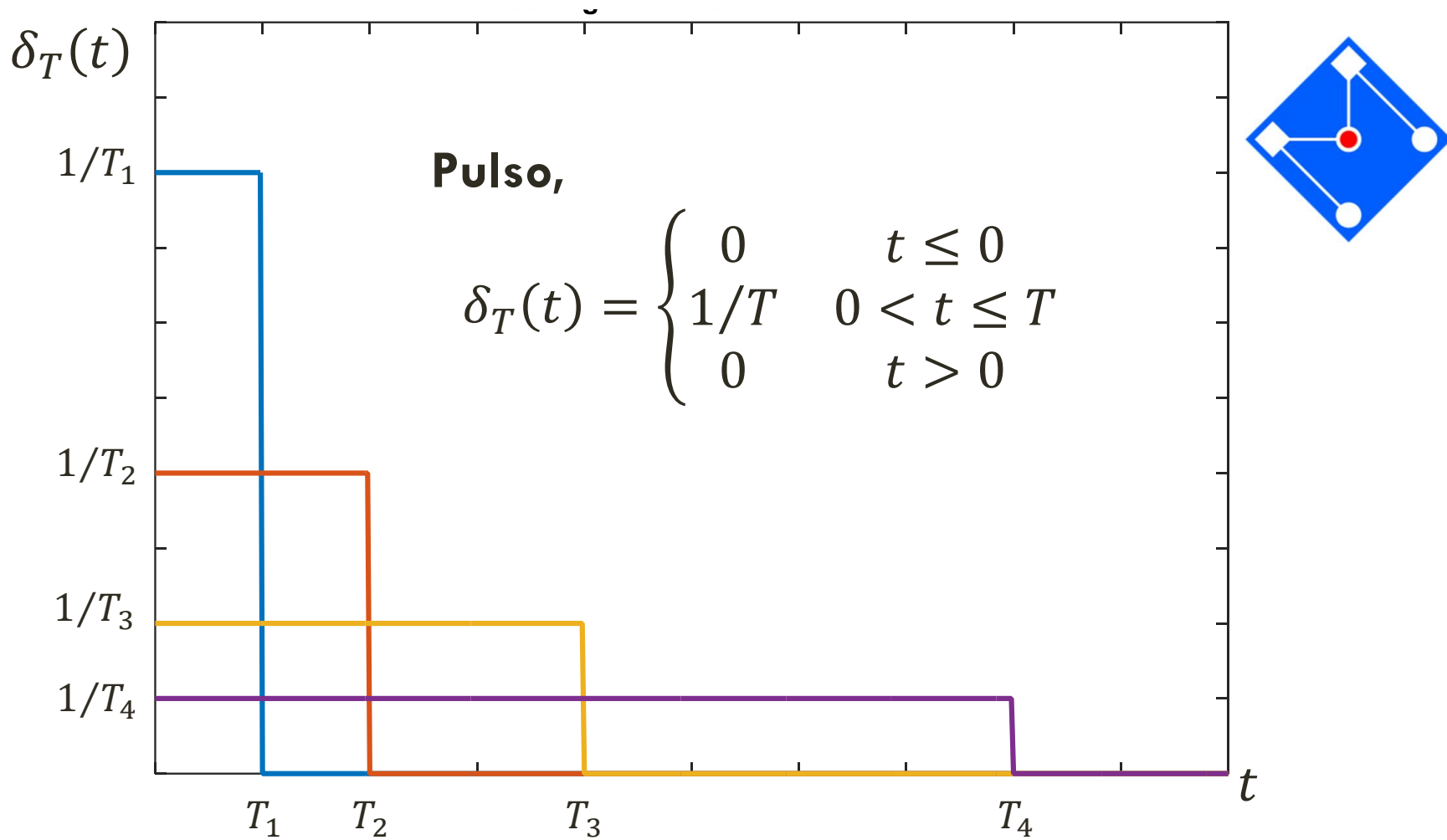


Impulso unitário,

$$\delta(t) = \begin{cases} \text{indef}, & t = 0 \\ 0 & , \quad t \neq 0 \end{cases}$$

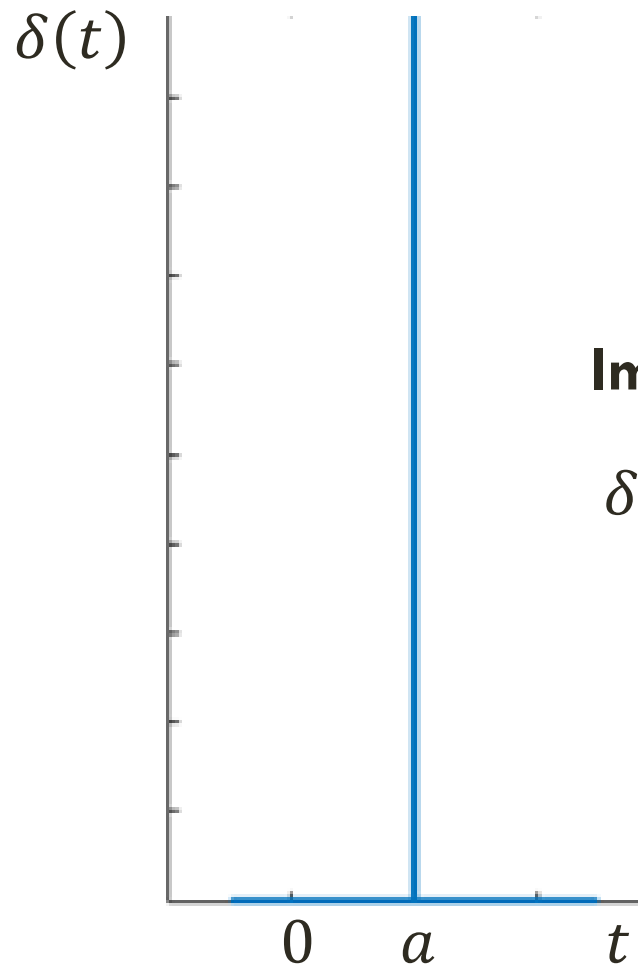
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$





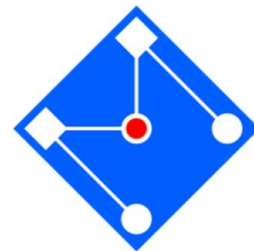
$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \delta_T(t)$$





Impulso unitário deslocado,

$$\delta(t - a) = \begin{cases} \text{indef}, & t = a \\ 0, & t \neq a \end{cases}$$

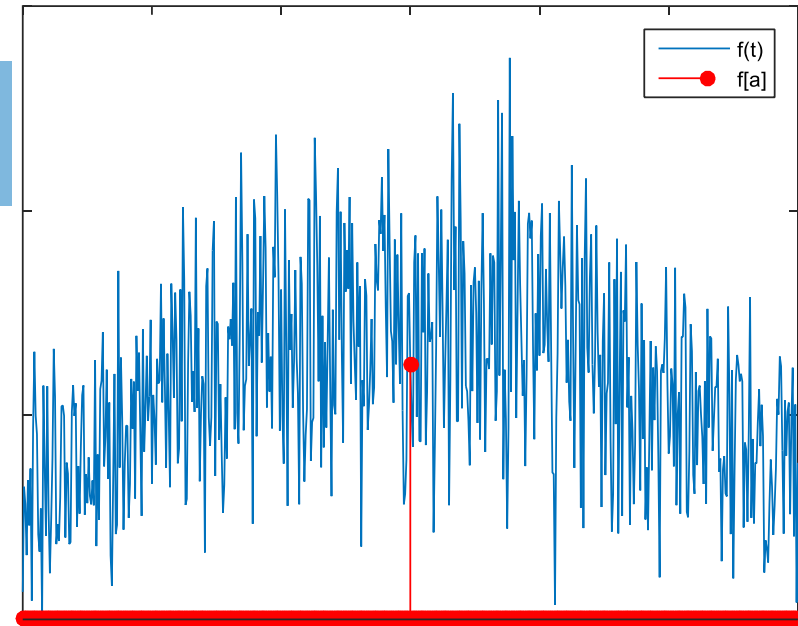
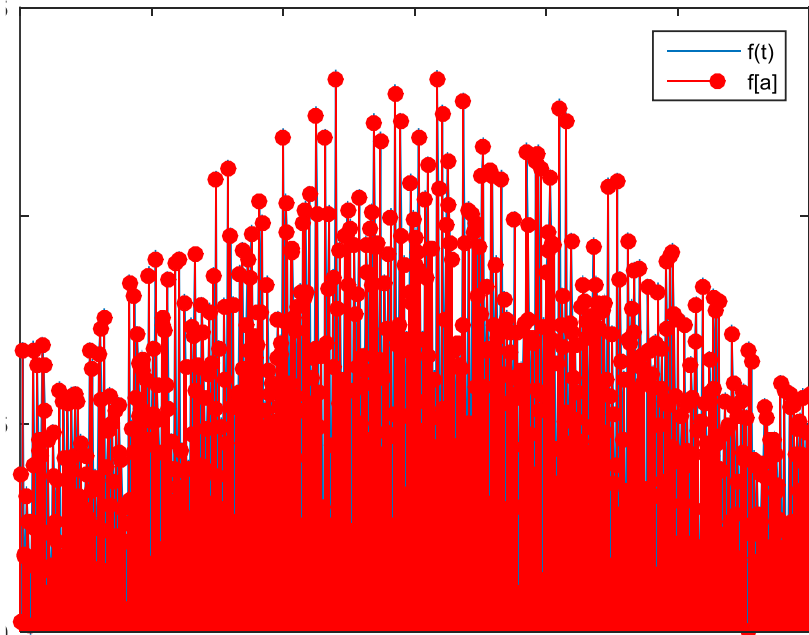




PROPRIEDADE *AMOSTRAGEM* OU *SIFTING* DA FUNÇÃO IMPULSO

REPRESENTANDO QUALQUER SINAL COM A FUNÇÃO IMPULSO

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt = f(a)$$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-na)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(na)$$



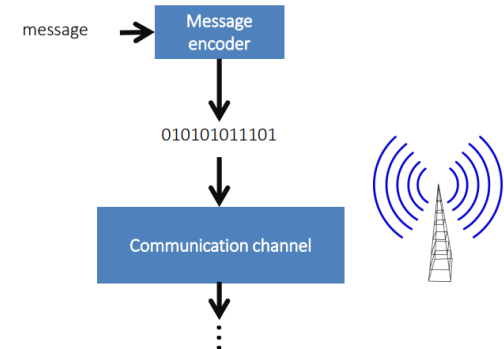
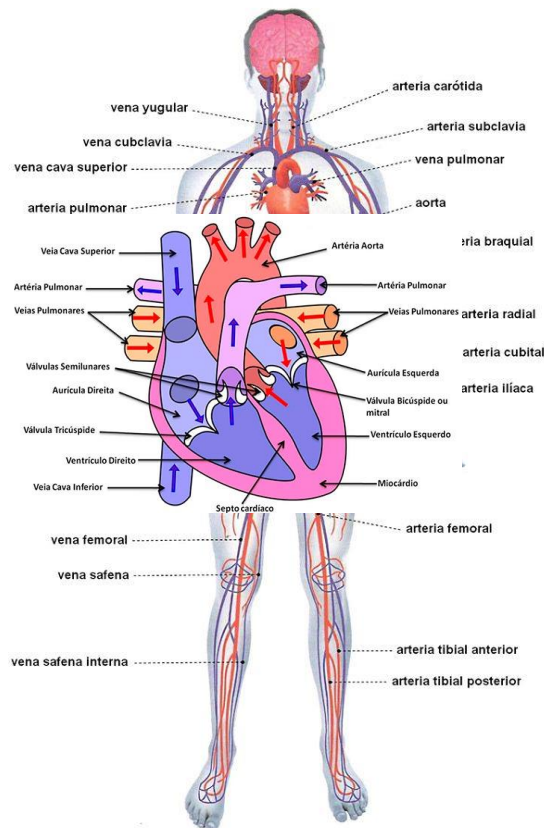
SISTEMAS

SLIT

O QUE É SISTEMA?

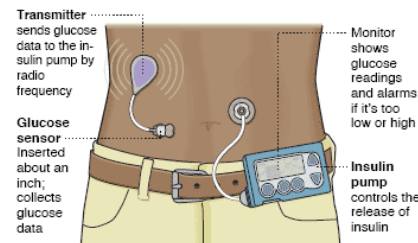
SISTEMA CIRCULATORIO

www.buscate.com.mx



Devices ease monitoring blood sugar

New sensors help diabetics track glucose levels around the clock, closer monitoring than standby finger-prick blood tests provide.



NOTE: The glucose monitor must be replaced every three days. Another sensor works for seven days, but does not have an insulin pump.

SOURCES: Medtronic; Juvenile Diabetes Research Foundation

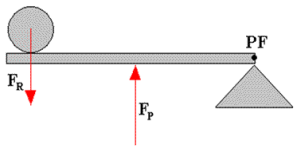
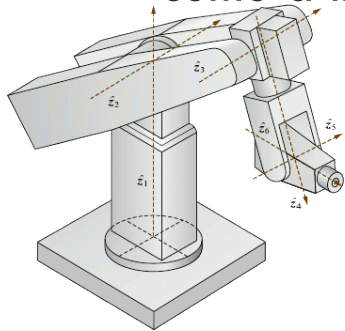


AP

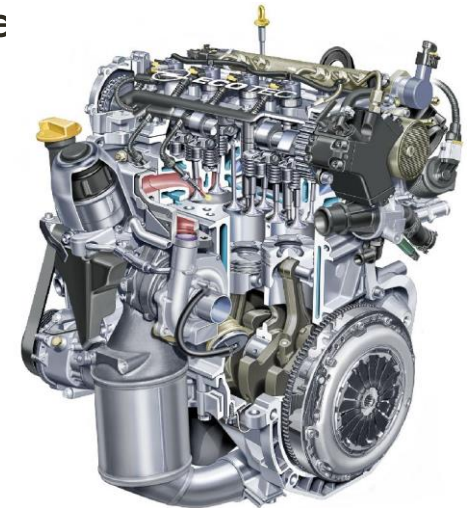


O QUE É UM SISTEMA?

A noção de sistema é intuitiva. Quase tudo que nos rodeia é algum tipo de sistema. Qualquer mecanismo, ou dispositivo, que funcione como a interconexão de componentes físicos é um siste



Sistema: Conjunto de componentes interconectados, que apresentam certas relações de causa e efeito e que atuam como um todo, com um determinado objetivo.



SINAIS E SISTEMAS

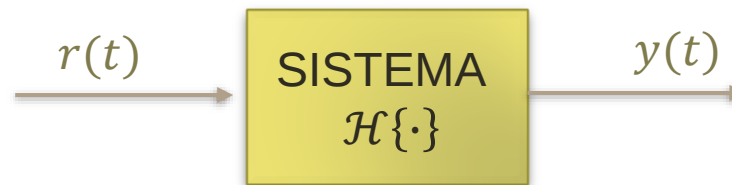


Os sinais que estudamos aqui, em geral, estão associados a algum sistema.

Eles podem representar:

a **entrada** de um sistema (*input*): às vezes também é chamado de *controle* ou mesmo a *excitação* do sistema

saída do sistema (*output*): às vezes também é chamado de *resposta* ou *observação* do sistema.



SLIT - SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO

LTI SYSTEMS (LINEAR TIME INVARIANT SYSTEMS)



sistema linear

Sistemas contínuos são lineares se satisfazem duas propriedades:

homogeneidade

$$r(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow \alpha r(t) \rightarrow \alpha y(t)$$



aditividade

$$r_1(t) \rightarrow y_1(t),$$



$$r_2(t) \rightarrow y_2(t)$$



$$r_1(t) + r_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$



SLIT - SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO

LTI SYSTEMS (LINEAR TIME INVARIANT SYSTEMS)



sistema invariante no tempo



Um sistema é dito invariante no tempo se um deslocamento no tempo do sinal de entrada (retardo ou avanço) implicar em um deslocamento temporal idêntico no sinal de saída:

$$r(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow r(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau)$$

Sistemas invariante e não invariante no tempo, respectivamente:

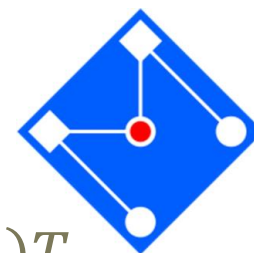
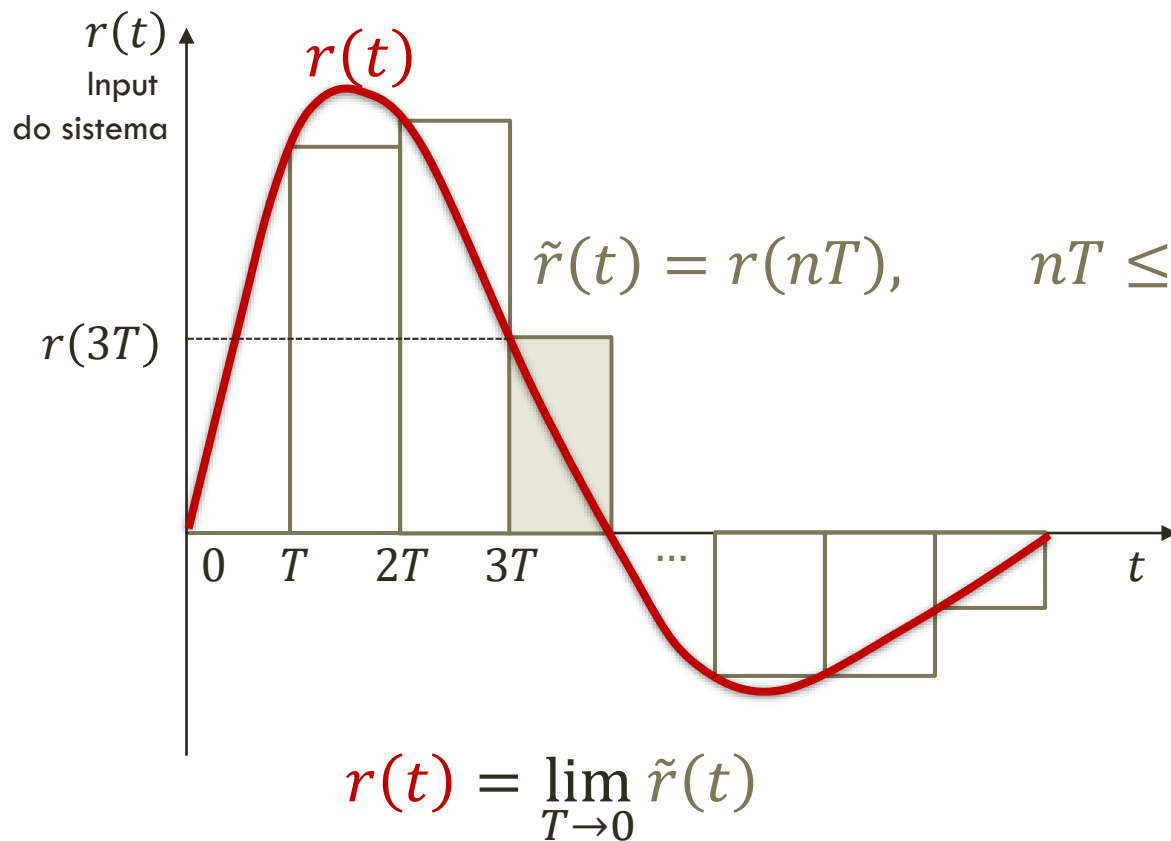
$$\frac{d^2 y}{dy^2} + 4 \frac{dy}{dt} - y = \frac{dx}{dt} + 3x$$

$$\frac{d^2 y}{dy^2} + 6t \frac{dy}{dt} + y = \frac{dx}{dt} - (t - 4)x$$

MOTIVAÇÃO PARA O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES



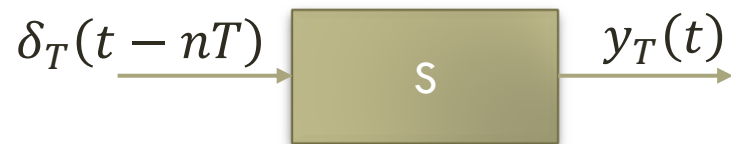
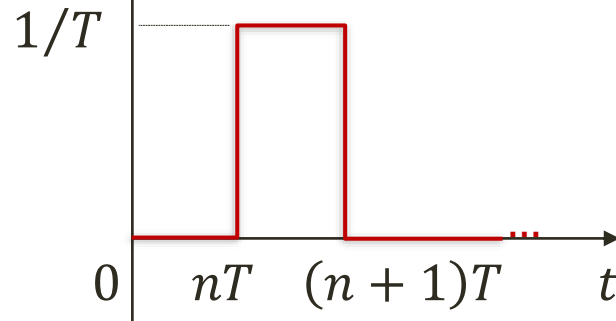
1. Boa parte dos fenômenos físicos podem ser descritos aproximadamente por comportamentos lineares, ao menos em torno de pontos de operação especificados.
2. Poderosas ferramentas para análise e síntese de comportamentos lineares estão disponíveis. Particularmente, existem soluções genéricas e em forma fechada para sistemas lineares.



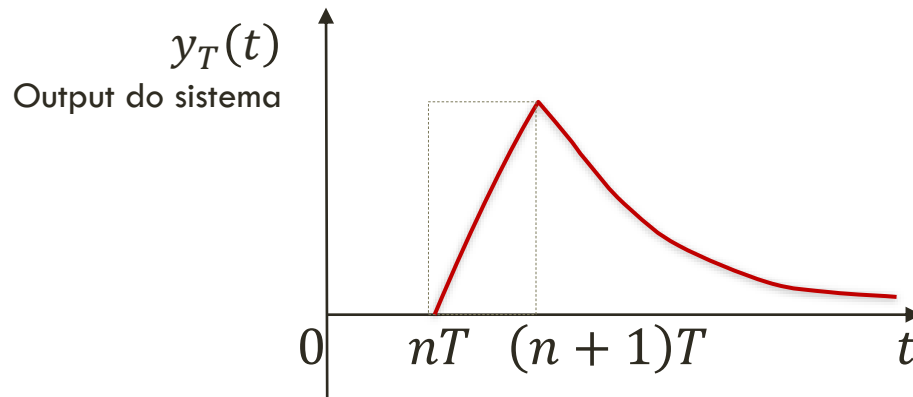
Cada pulso $p_n(t) = r(nT) \delta_T(t - nT)T$

Trem de pulsos $\tilde{r}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(nT) \delta_T(t - nT)T$
 $nT \leq t < (n+1)T$

$\delta_T(t - nT)$
Input do sistema



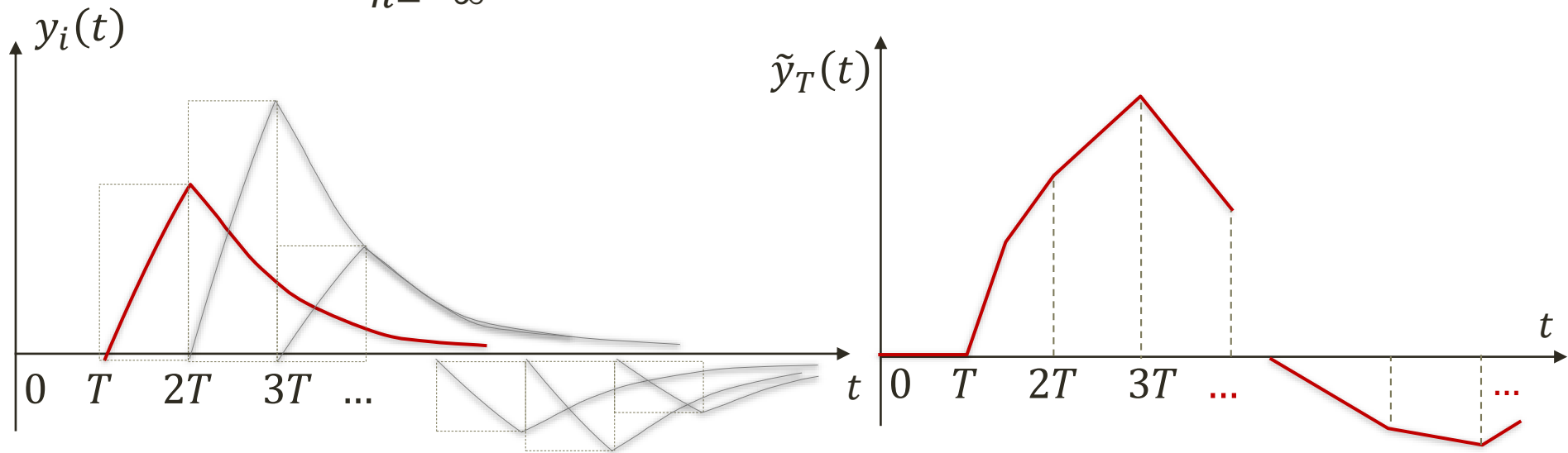
Vamos supor que conhecemos a
saída $y(t) = h(t)$ para uma
entrada pulso $r(t) = \delta_T(t)$



Se o Sistema é **SLIT** então, $y_n(t) = h_T(t - nT)$

SLIT: permite que a resposta total do sistema à entrada $\tilde{r}(t)$ seja escrita como a soma das respostas de todas as componentes do pulso,

$$\tilde{y}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(nT)h_T(t - nT)T$$



$$\tilde{y}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^N r(nT)h_T(t - nT)T$$

$$NT \leq t < (N + 1)T$$

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \delta_T(t) \quad h(t) = \lim_{T \rightarrow 0} h_T(t)$$

$$nT \rightarrow \tau$$

$$T \rightarrow d\tau$$



$$y(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^N r(nT) h_T(t - nT) T = \int_{-\infty}^t r(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = r(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t r(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

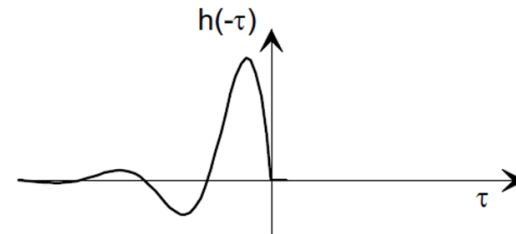
Teorema da convolução!!

COMPREENDENDO GRAFICAMENTE CONVOLUÇÃO

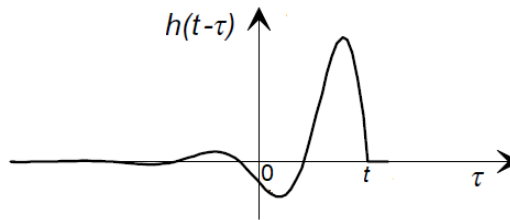


Resposta do Sistema à função impulse $h(\tau)$

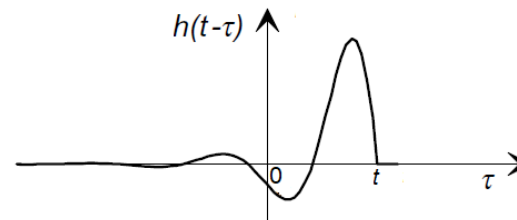
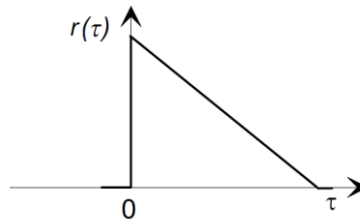
Reverter no tempo $h(-\tau)$

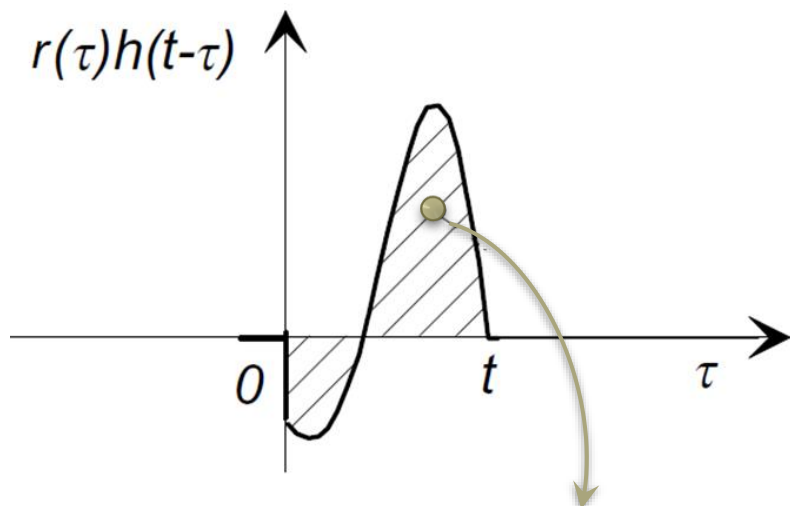
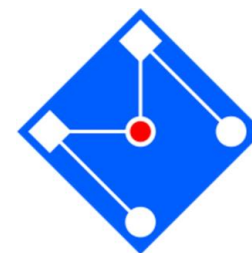


Shifting no tempo $h(t - \tau)$

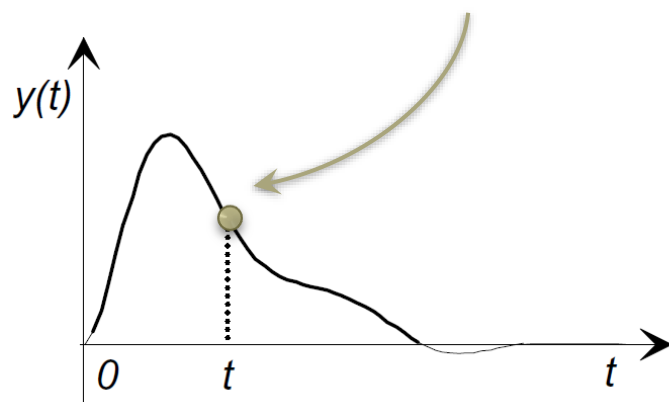


Multiplicar o sinal resultante pelo input do sistema $r(t)$





Resposta no
instante t é
definido pela
área sob a
curva





Sistema invariante no tempo

$$\mathcal{H}\{\delta(t + \tau)\} = h(t + \tau)$$



Linearidade

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = x_1 h(t + \tau_1) + x_2 h(t + \tau_2)$$



Estendendo com a propriedade de amostragem:
convolução

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

ENTENDENDO SISTEMAS LIT



Sistemas LIT

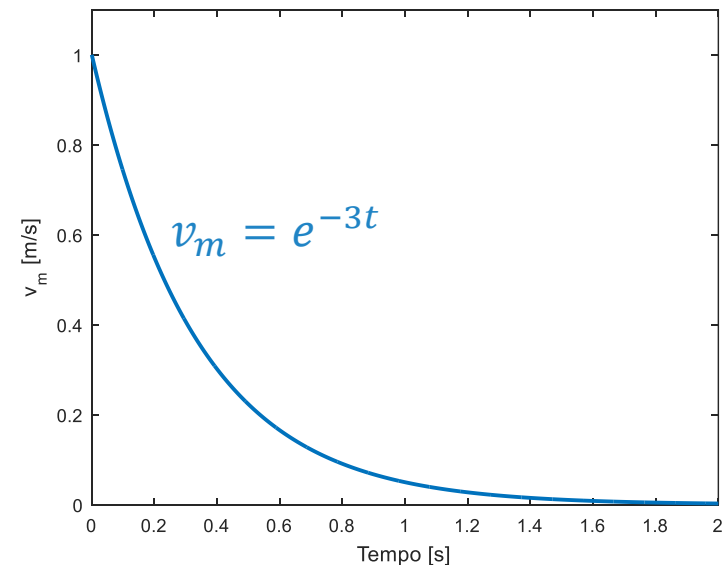
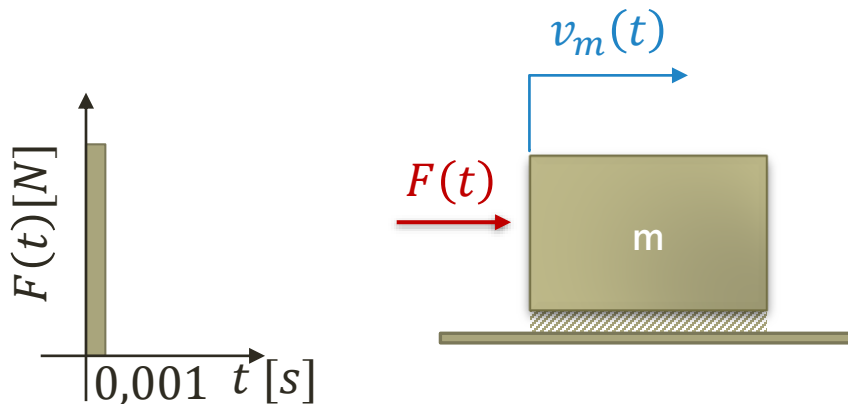
São sistemas especiais porque qualquer caso pode ser expresso como uma soma ponderada de *respostas impulso deslocadas!!!*

O problema de caracterizar um sistema complexo se tornou mais simples agora. Para sistemas LIT, existe apenas a resposta à função impulso para medir. Uma vez que tenhamos medido esta função, podemos prever como o sistema responderá qualquer estímulo.

EXEMPLO



Um elemento de massa em repouso em um plano viscoso, é submetido a uma força impulsiva com duração de $0,001\text{ s}$ e magnitude 1000 N . Observa-se que a massa responde com uma velocidade $v_m = e^{-3t}$. Encontre a resposta da mesma massa para uma força de entrada em forma de rampa $F(t) = t, t > 0$.



EXEMPLO

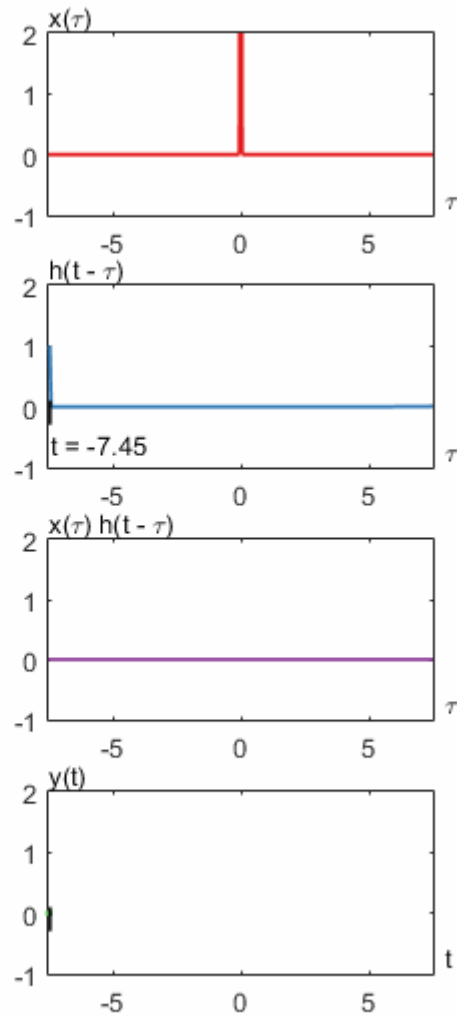
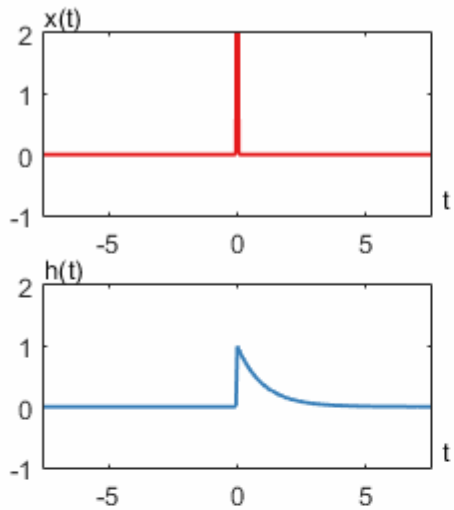


Dada a saída de um circuito RC a uma função impulso,

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u_1(t)$$

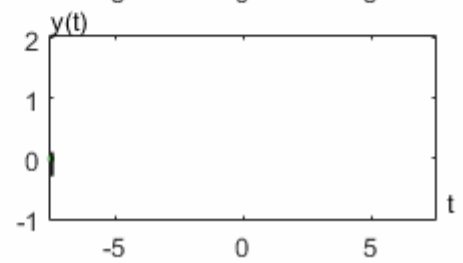
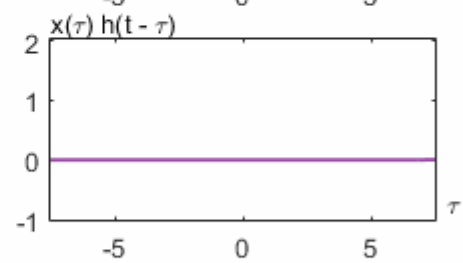
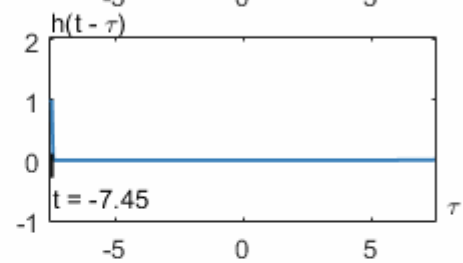
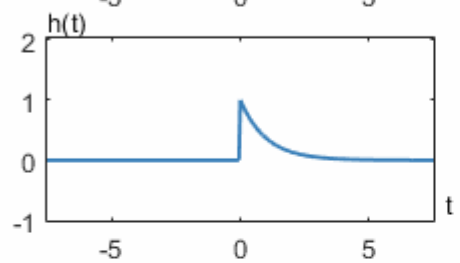
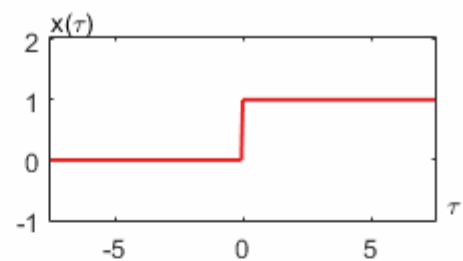
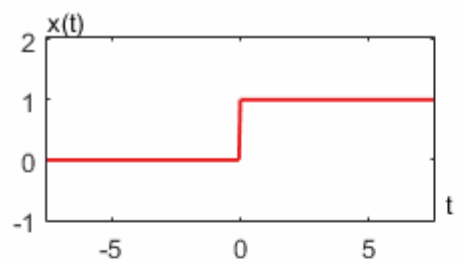
Ache a saída do circuito para uma entrada

- A. Impulso unitário $x(t) = \delta(t)$
- B. Degrau unitário $x(t) = u_1(t)$



Extraído de

<http://www.ece.utah.edu/~ece3500/notes/class06.html>





PARA FAZER EM CASA

Dada a saída de um circuito RC a uma função impulso,

$$h(t) = u(t) - u(t - t_0)$$

onde $t_0 > 0$.

Ache a saída do circuito para uma entrada

- A. Degrau unitário $x(t) = u(t)$
- B. Degrau finito unitário $x(t) = u(t) - u(t - t_0)$

APLICAÇÃO



https://www.youtube.com/watch?v=GQu6_MjDwcU



MOTIVAÇÃO

Frequência
Domínio do tempo vs
domínio da frequência

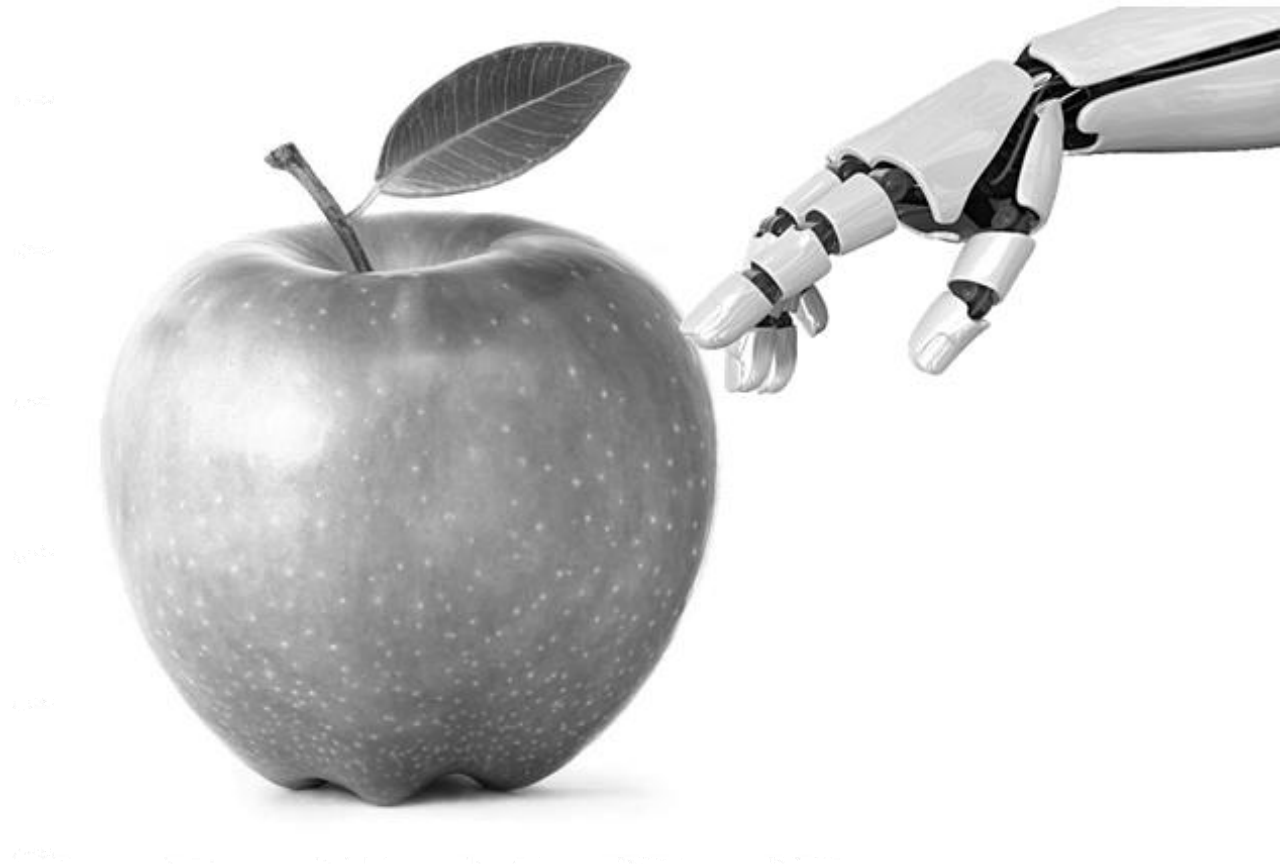
DECOMPOSIÇÃO DO SINAL



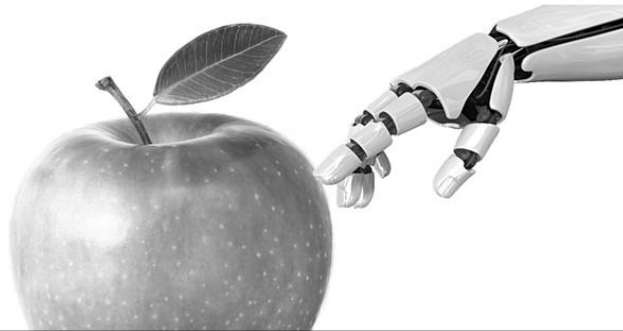
$x[0]$
 $x[1]$

$$\begin{aligned} X[0] &= x[0] + x[1] \\ X[1] &= x[0] - x[1] \end{aligned}$$

REPRESENTAÇÃO HIERÁRQUICA DA IMAGEM



FILTRO NO DOMÍNIO DO TEMPO



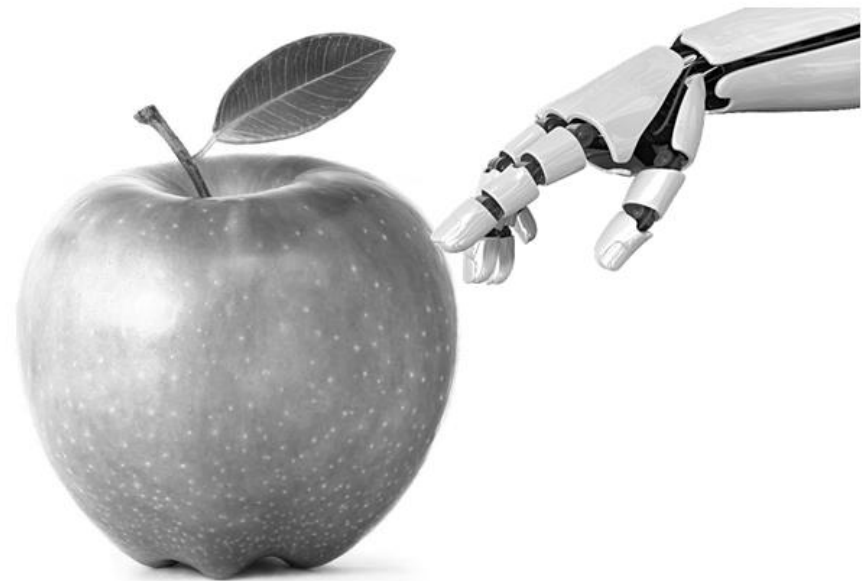
70%

104 KB



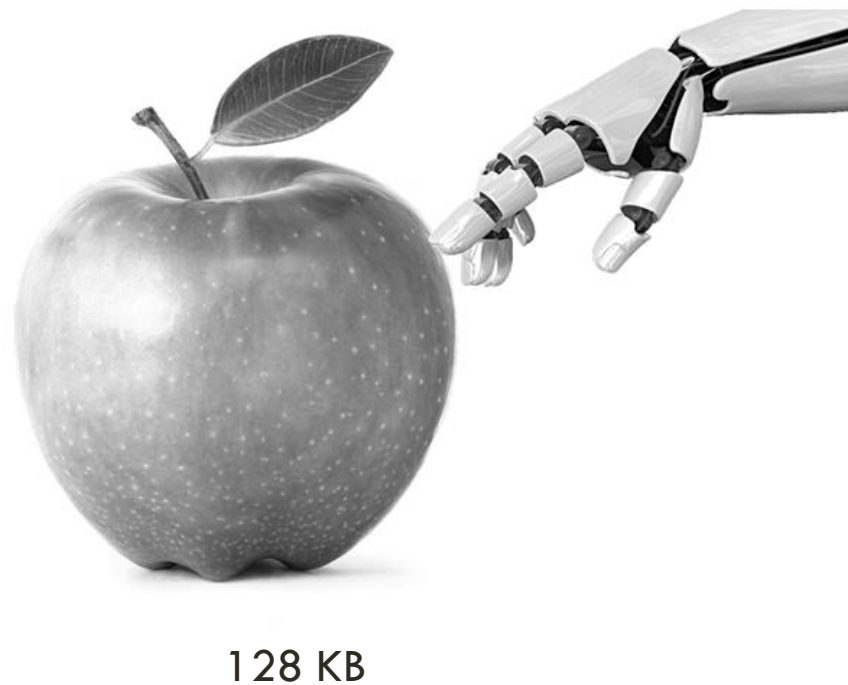
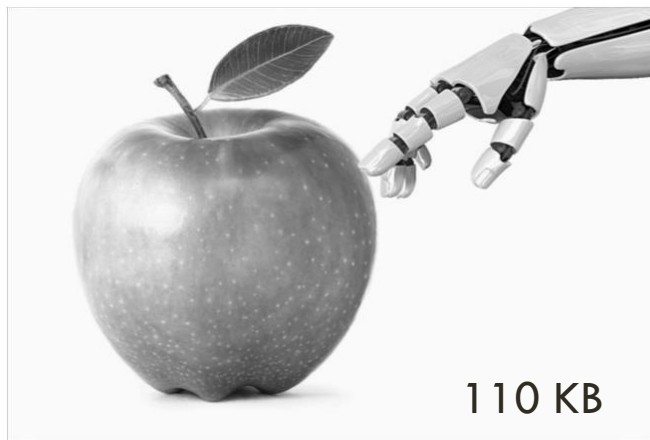
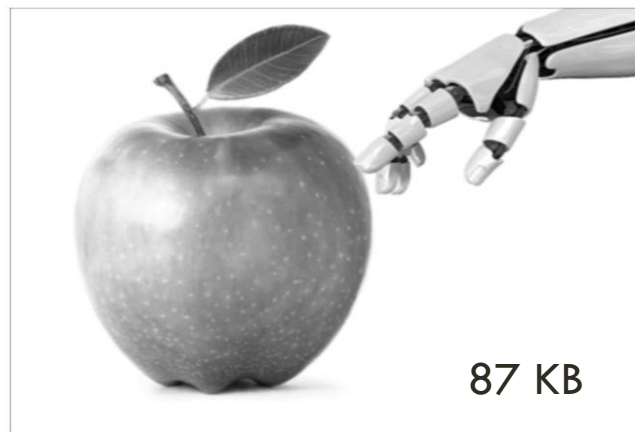
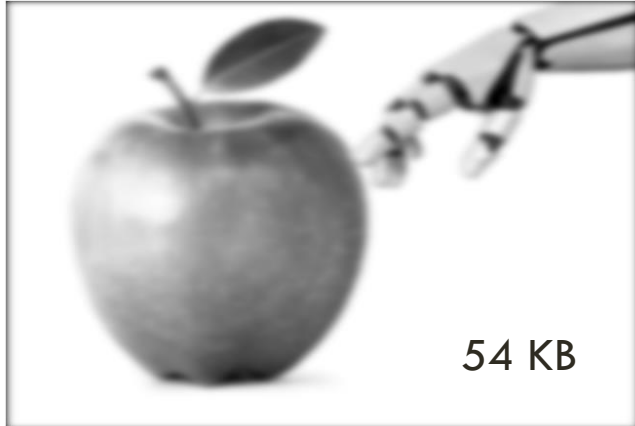
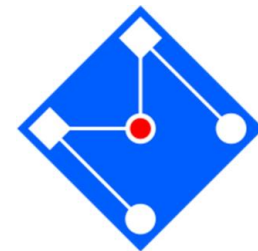
25%

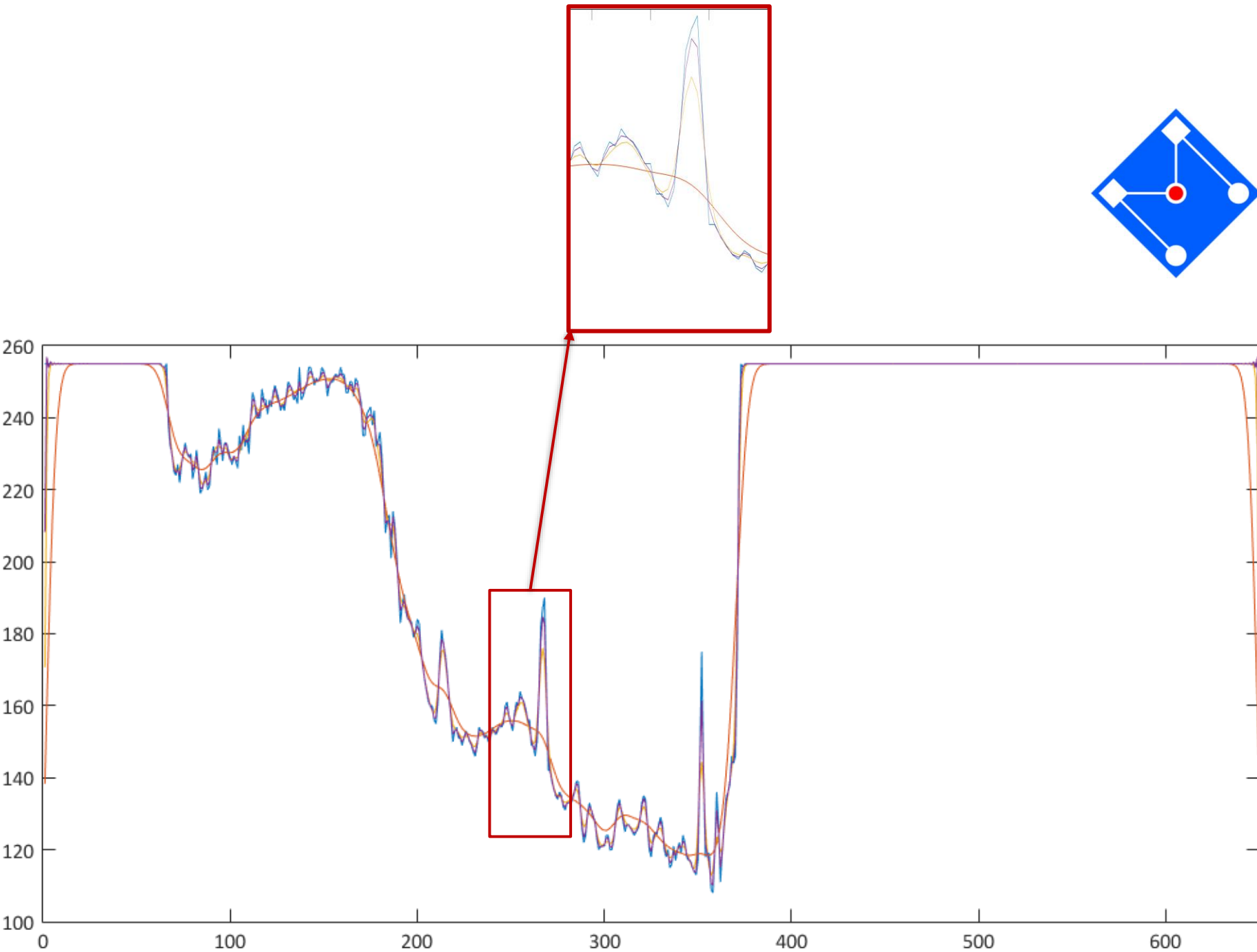
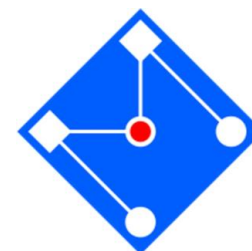
40 KB



128 KB

FILTRO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

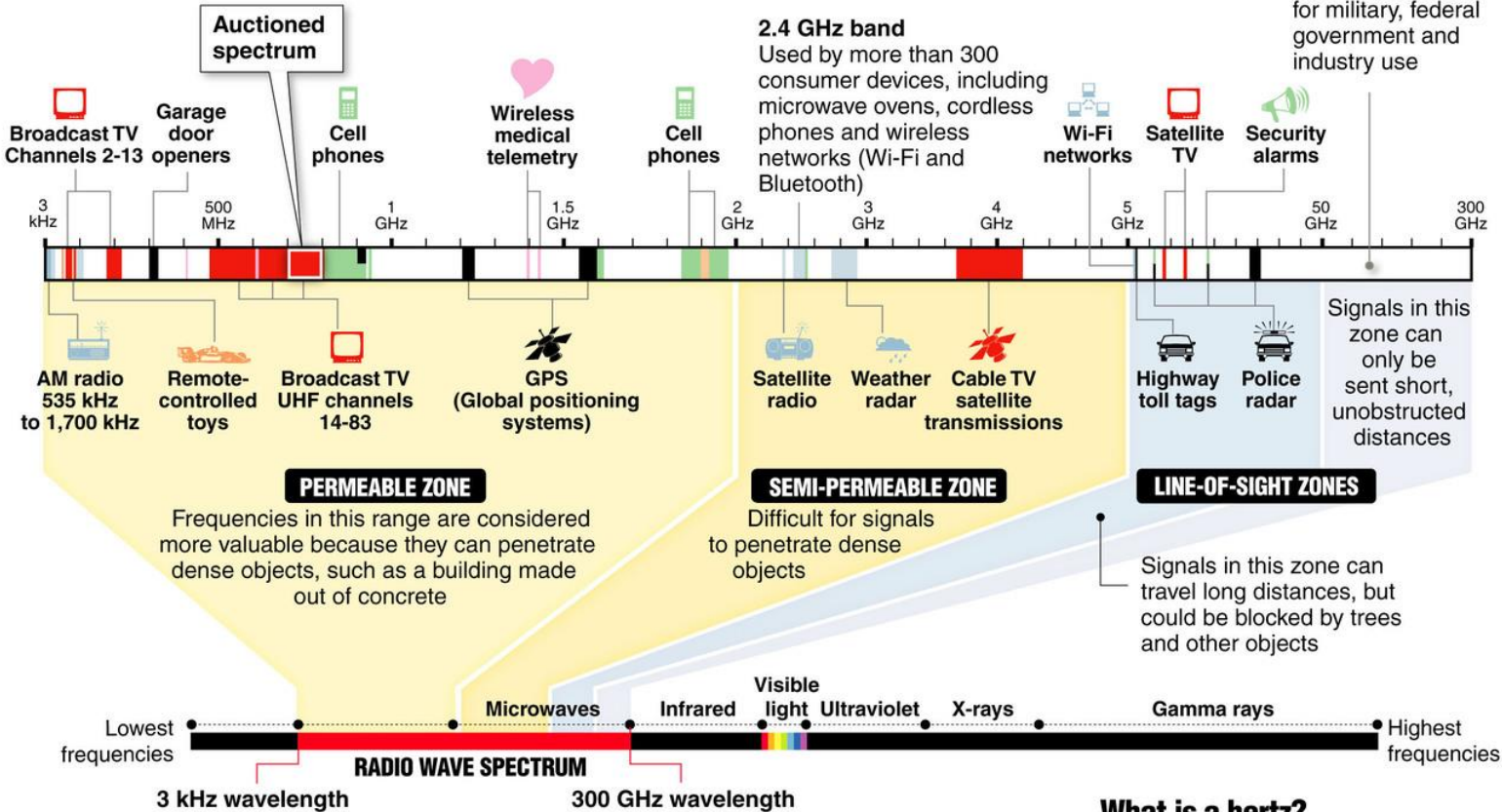




Inside the radio wave spectrum

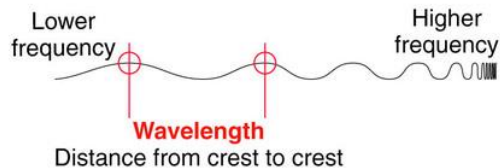
Almost every wireless technology – from cell phones to garage door openers – uses radio waves to communicate. Some services, such as TV and radio broadcasts, have exclusive use of their frequency within a geographic area. But many devices share frequencies, which can cause interference. Examples of radio waves used by everyday devices:

Most of the white areas on this chart are reserved for military, federal government and industry use



The electromagnetic spectrum

Radio waves occupy part of the electromagnetic spectrum, a range of electric and magnetic waves of different lengths that travel at the speed of light; other parts of the spectrum include visible light and x-rays; the shortest wavelengths have the highest frequency, measured in hertz



What is a hertz?

One hertz is one cycle per second. For radio waves, a cycle is the distance from wave crest to crest

1 kilohertz (kHz) = 1,000 hertz

1 megahertz (MHz) = 1 million hertz

1 gigahertz (GHz) = 1 billion hertz

Source: New America Foundation, MCT, Howstuffworks.com
Graphic: Nathaniel Levine, Sacramento Bee

© 2008 MCT

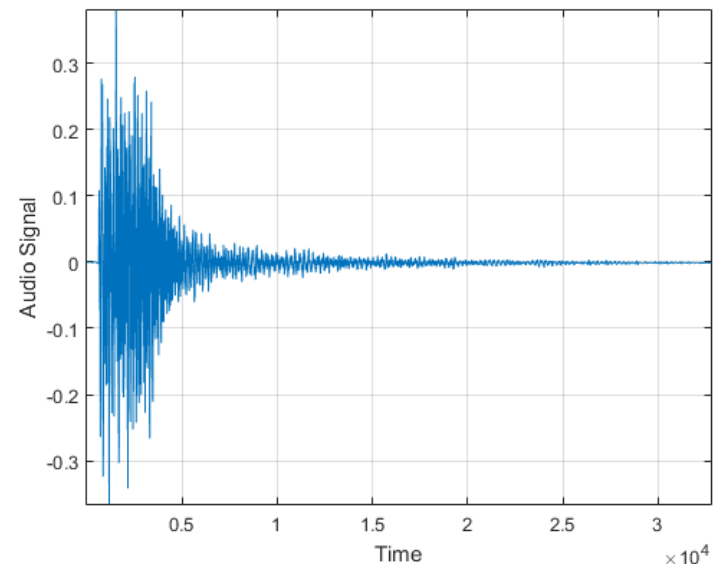
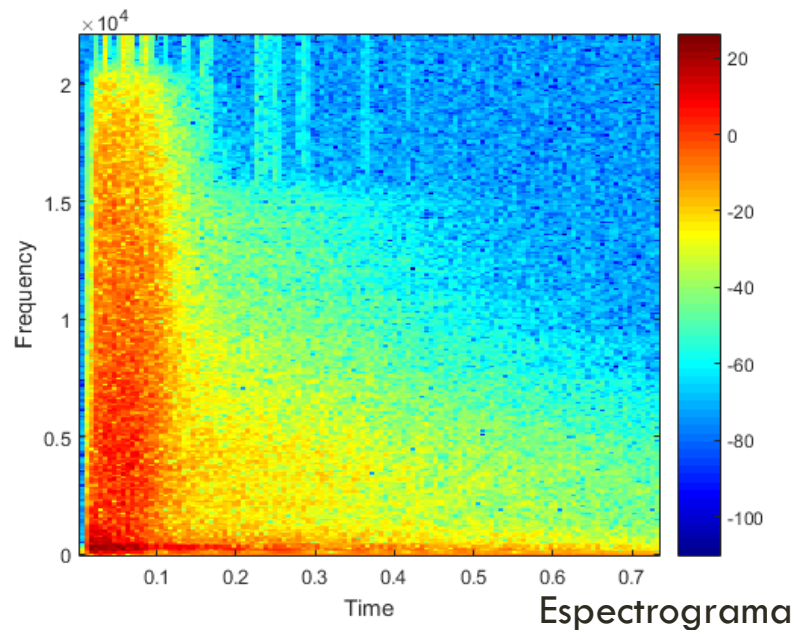
MÚSICA

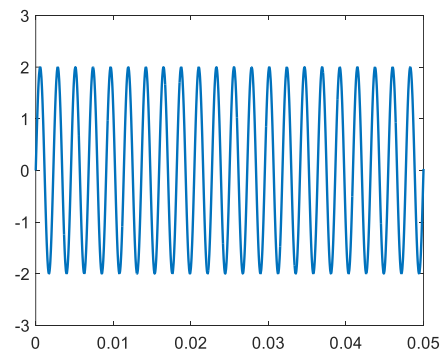
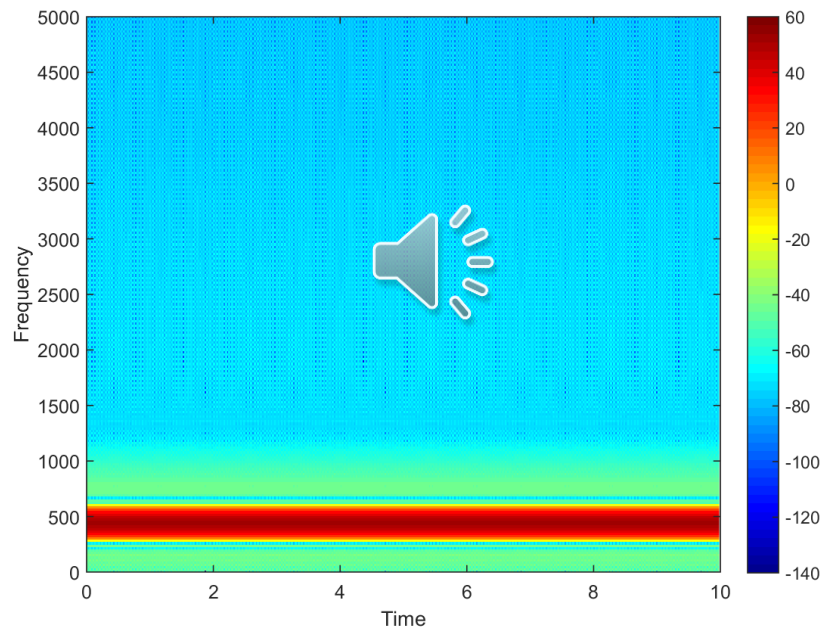
Em quais são as características de uma música tocada em um piano você está mais interessado???

Tempo de duração de uma nota ou no que faz a nota soar daquela maneira ??? O tempo dita **quando** você ouve alguma coisa, mas a frequência dita **o que** você ouve!!!!

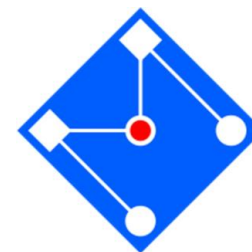


Tarola

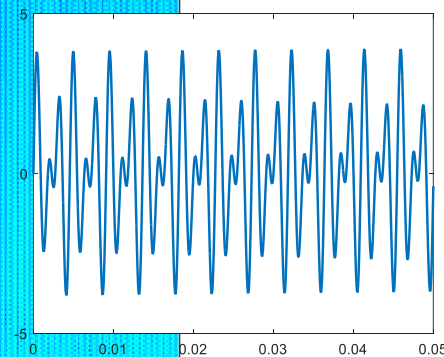
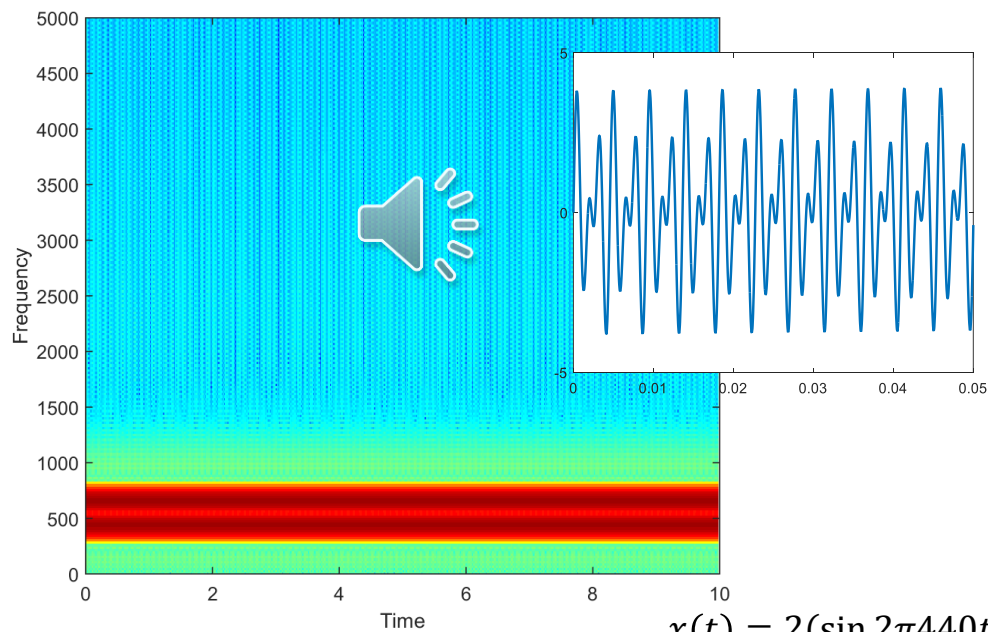




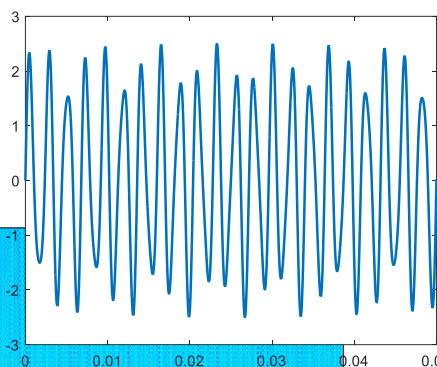
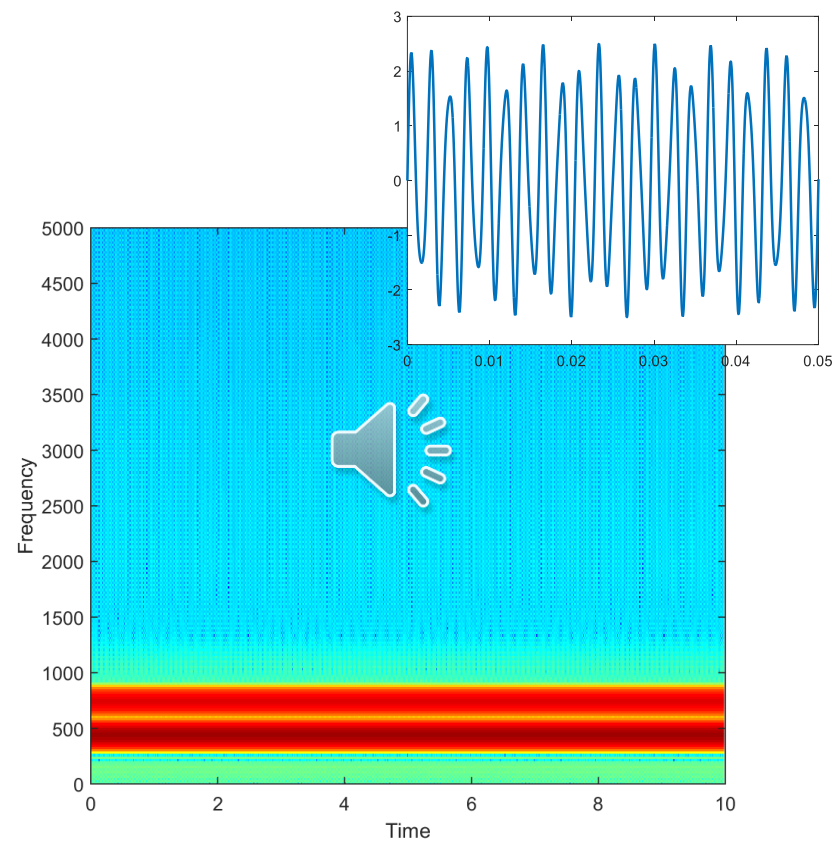
$$x(t) = 2 \sin 2\pi 440t$$

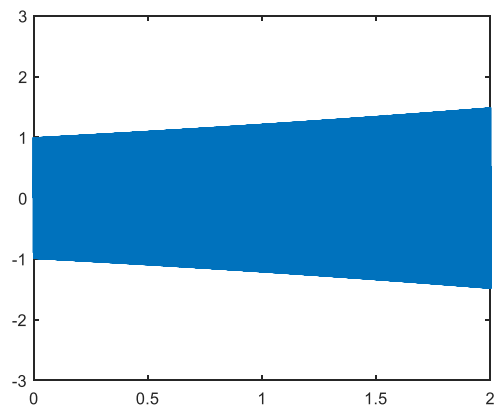
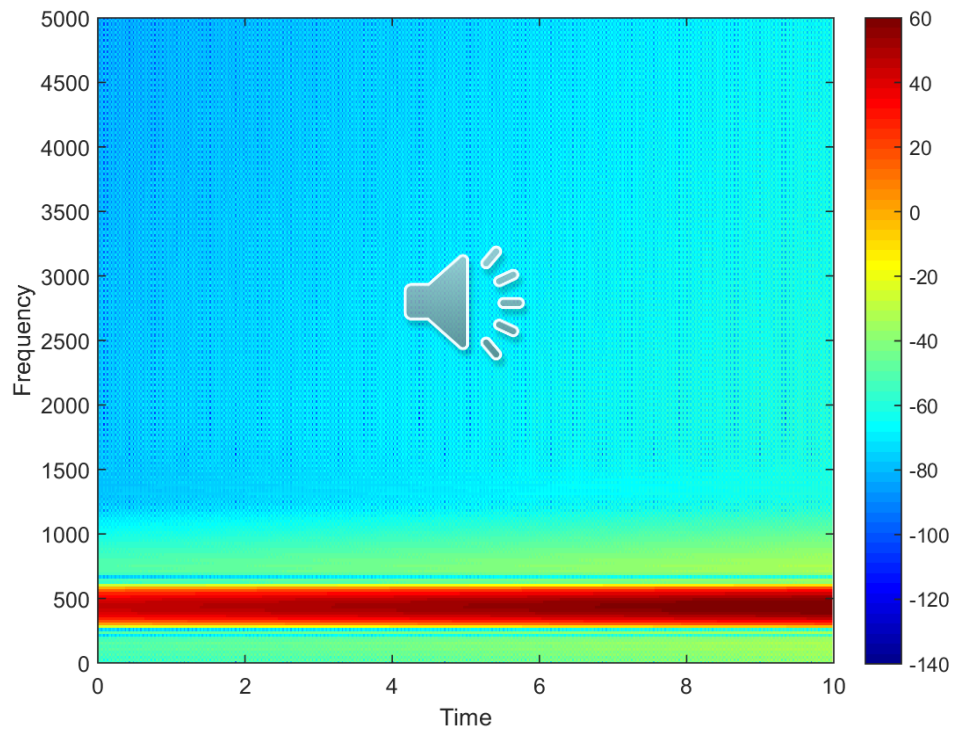


$$x(t) = 2 \sin 2\pi 440t + 0.5 \sin 2\pi 739.9t$$

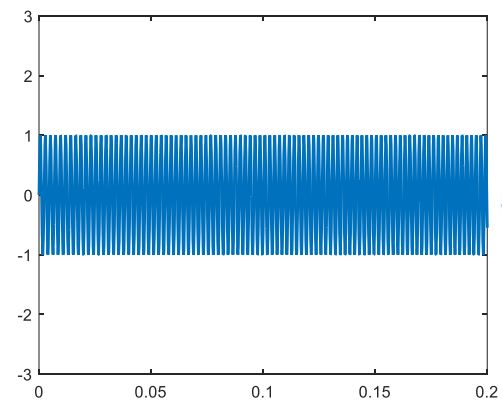


$$x(t) = 2(\sin 2\pi 440t +$$

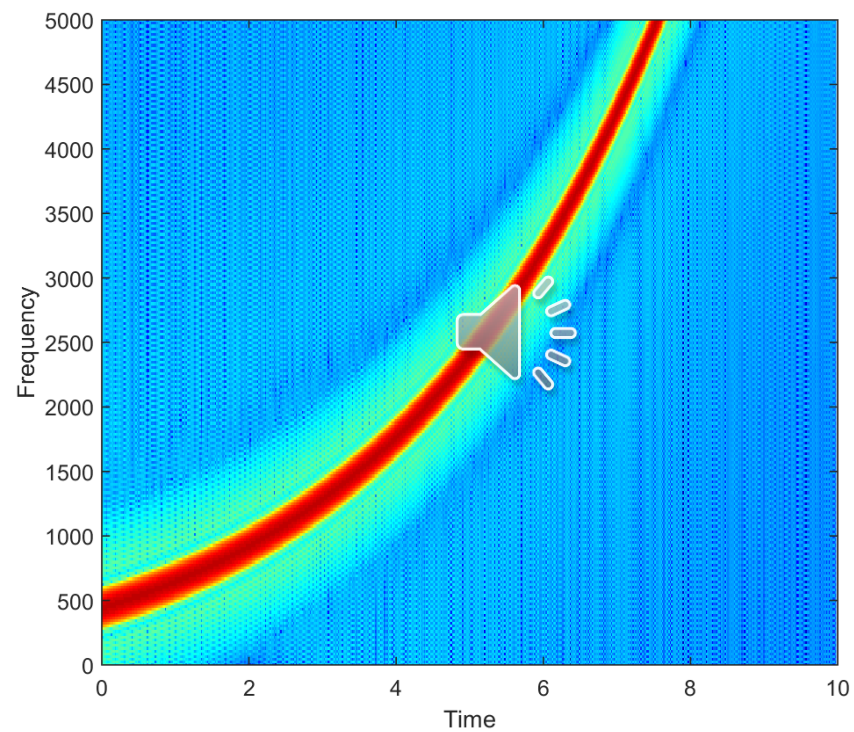
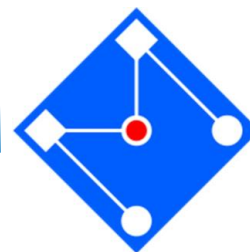




$$x(t) = 2 e^{0.2t} \sin 2\pi 440t$$

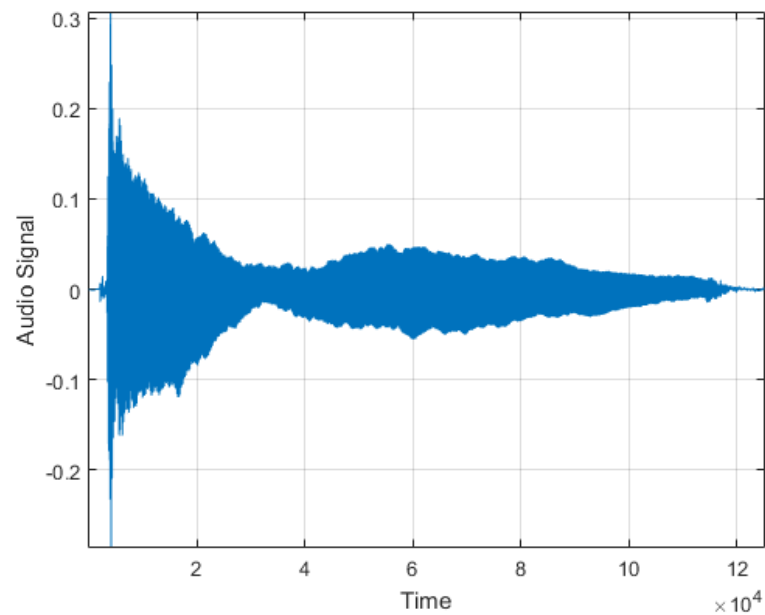
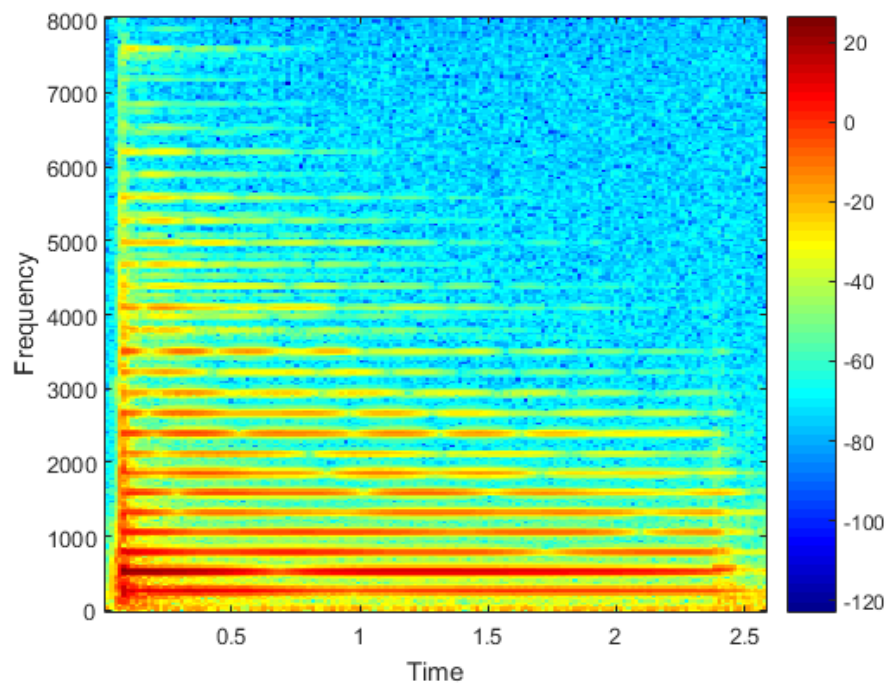
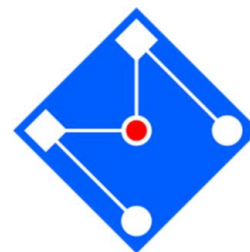


$$x(t) = 2 \sin 2\pi 440 e^{0.2t} t$$



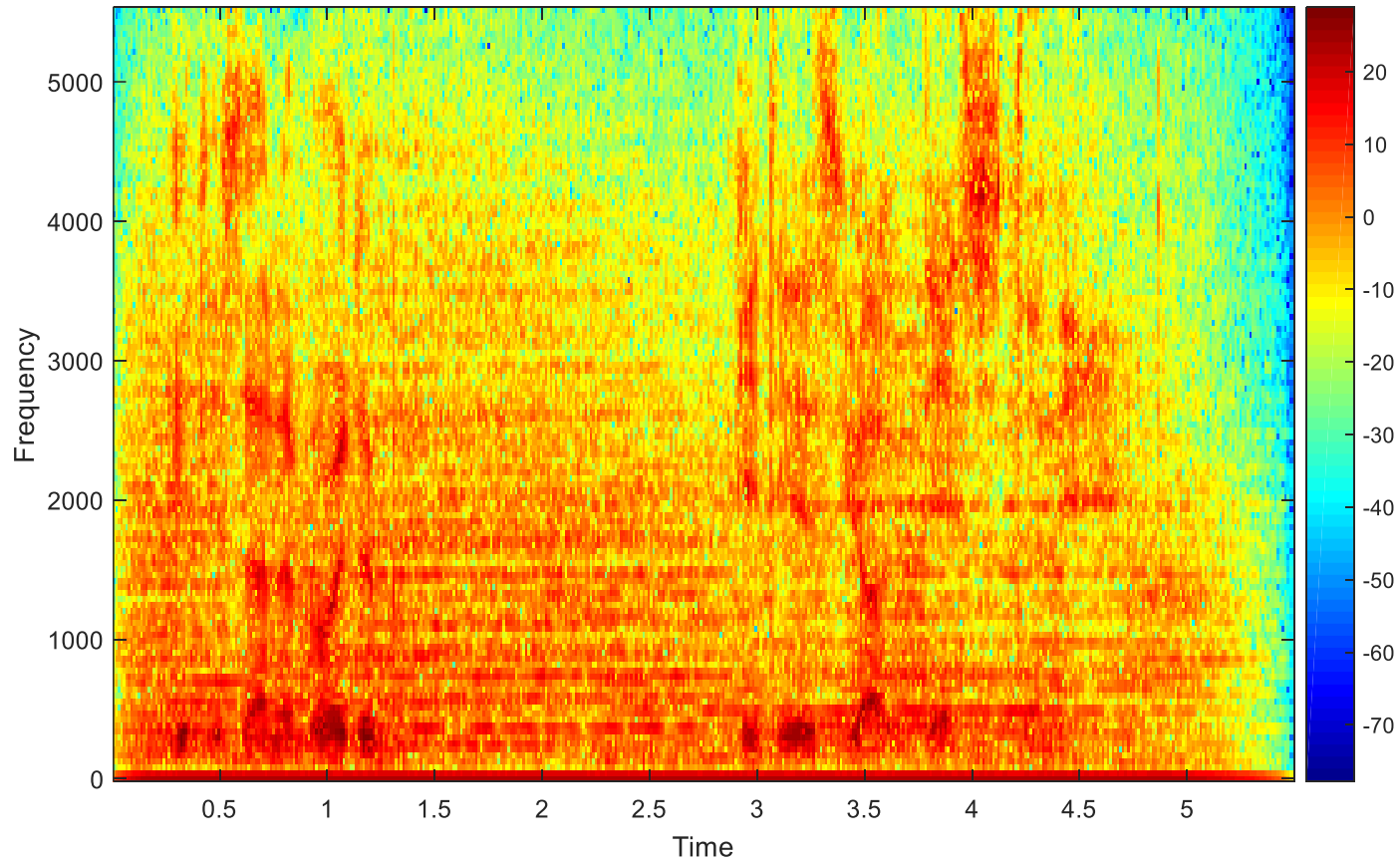
DÓ MÉDIO NO PIANO

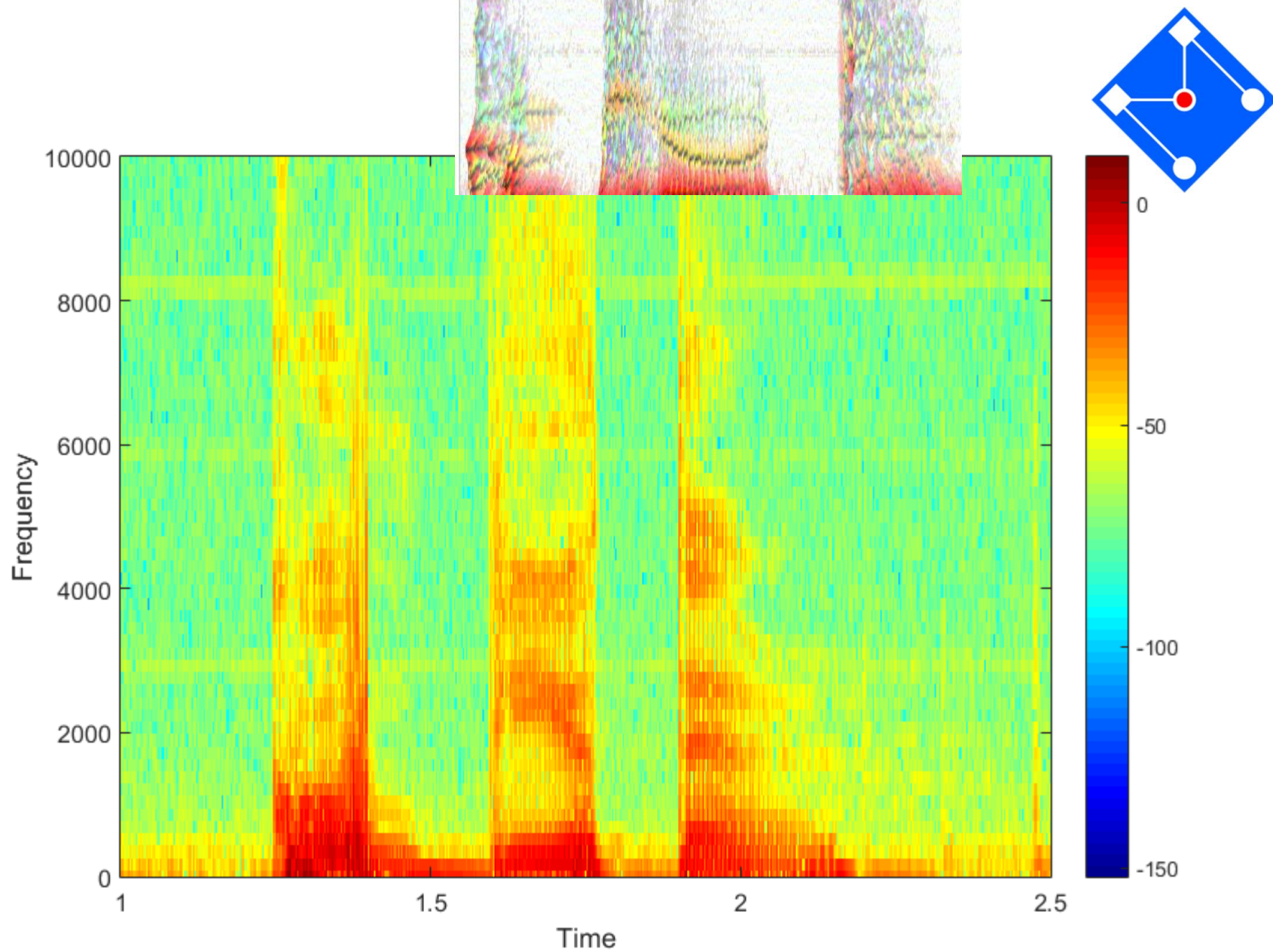
Frequência fundamental: 261 Hz



Return of the Jedi

Ian McDiarmid as the Emperor: "It is unavoidable... It is your destiny."





DOMÍNIOS E TRANSFORMAÇÕES



Temos o olho esquerdo, então por que precisamos do olho direito? A resposta é perspectiva.

Domínio do tempo e domínio da frequência são duas maneiras de olhar para o mesmo sistema dinâmico.

Eles são permutáveis entre si, isto é, nenhuma informação é perdida na mudança de um domínio para outro.

São pontos de vista complementares. Isso leva a uma compreensão completa e clara do comportamento de um sistema dinâmico de engenharia.

Descrevemos o que acontece no **domínio do tempo** como **temporal** e no **domínio da frequência** como **espectral**.

O que é transformação?????
É o mapeamento entre domínios!



Todos tem a mesma informação!

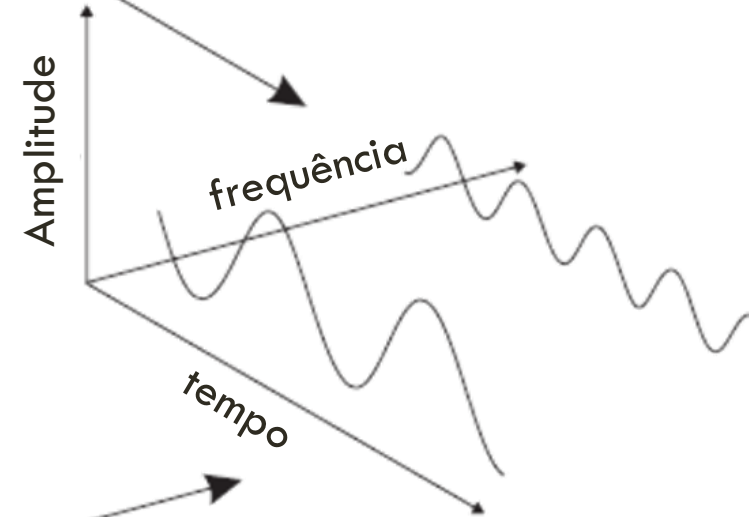
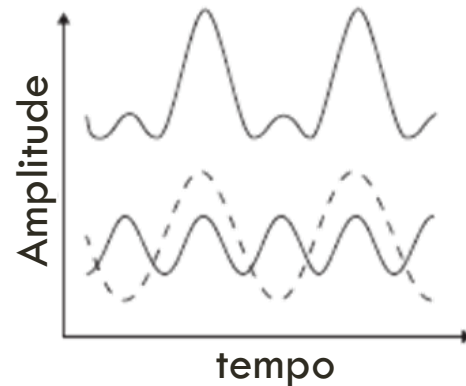
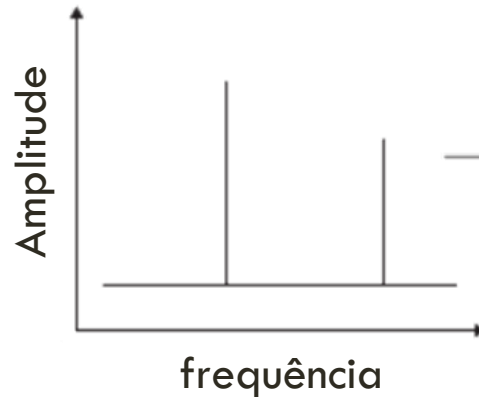
ANÁLISE E SÍNTESE DE UM SINAL



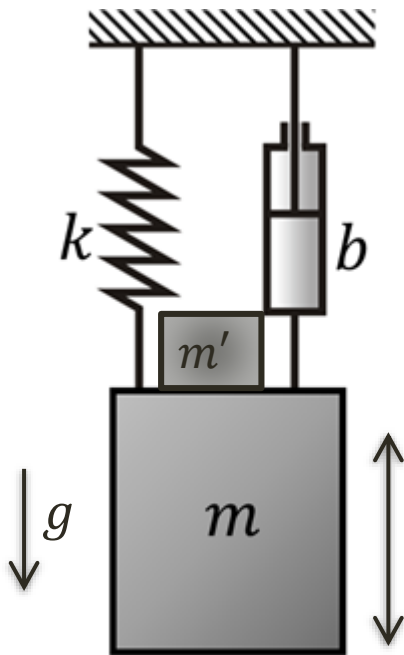
Domínio da frequência



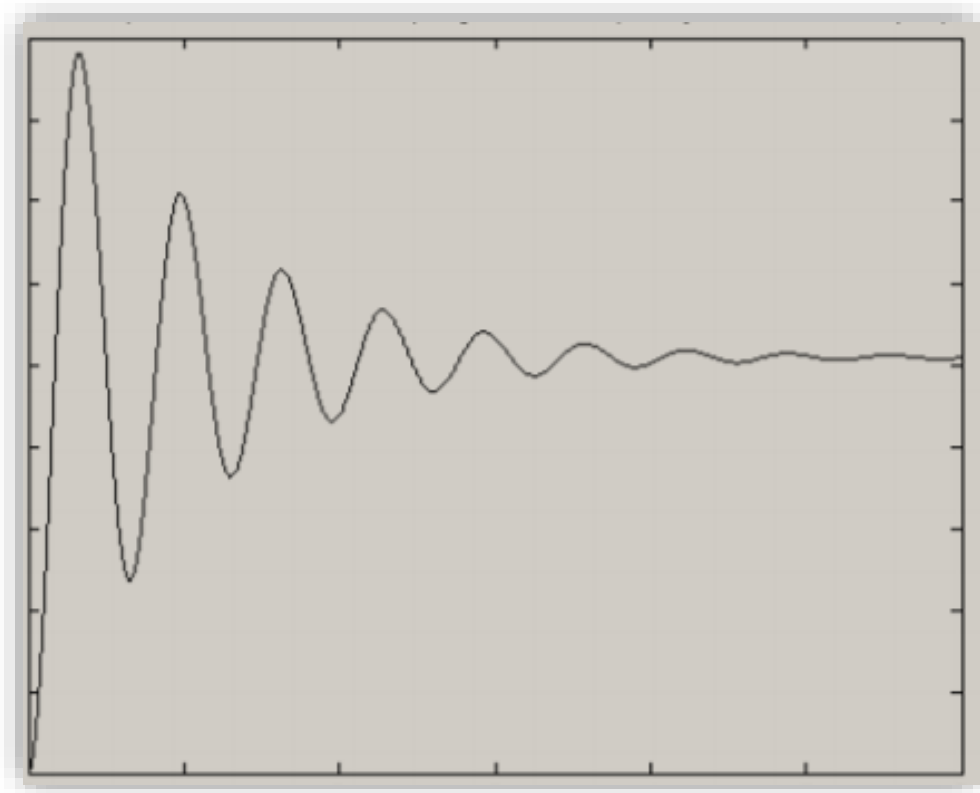
Domínio do tempo



DOMÍNIO DO TEMPO



deslocamento da massa $m + m'$



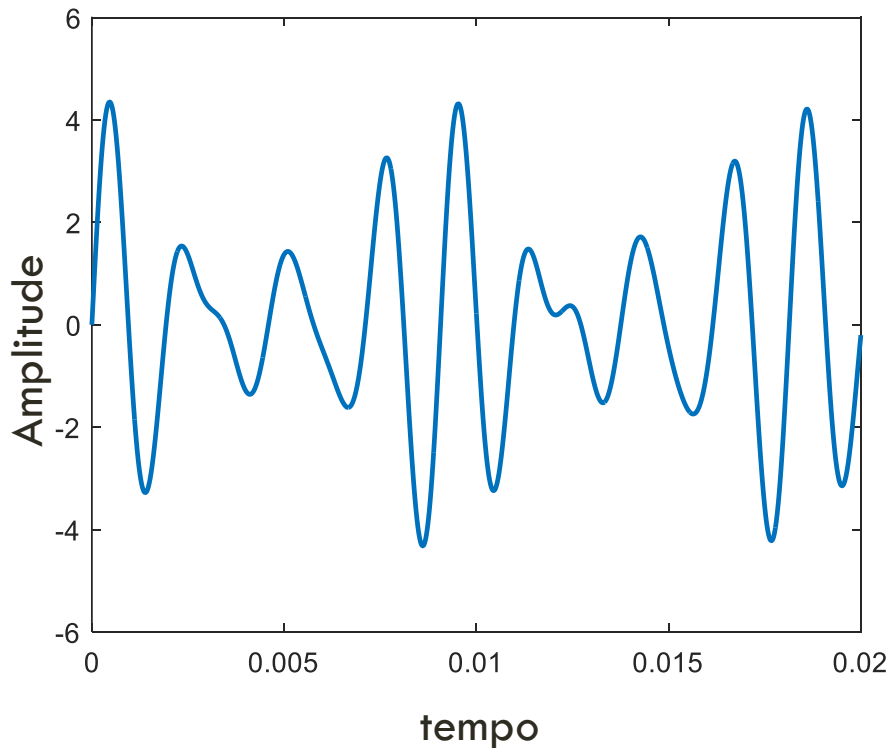
tempo



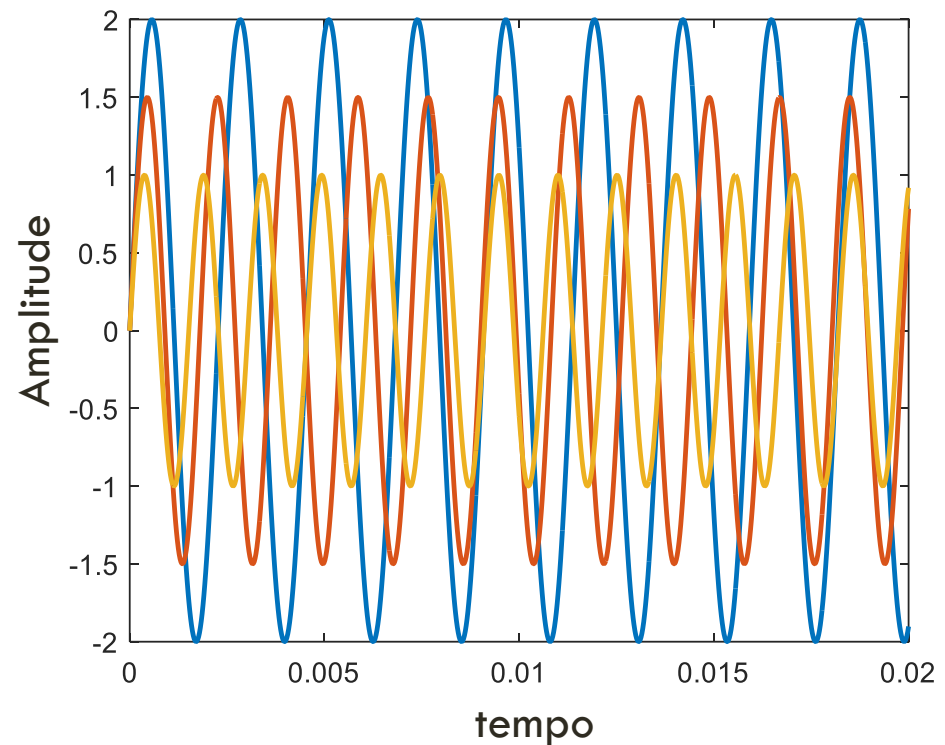
DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

OUTRA FORMA DE OLHAR O SINAL

Sinal do Mundo real

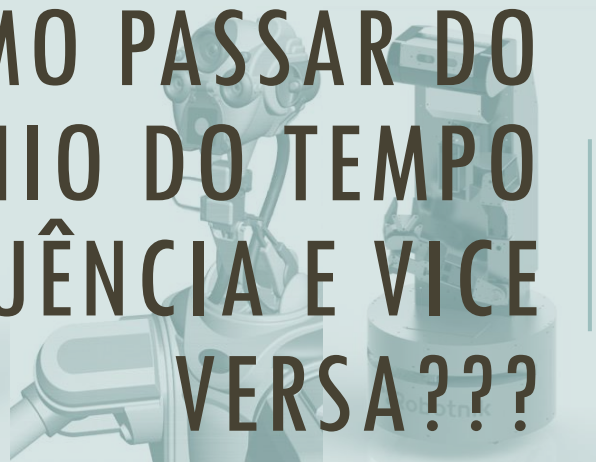


Sinal do Mundo real = Soma de três sinais



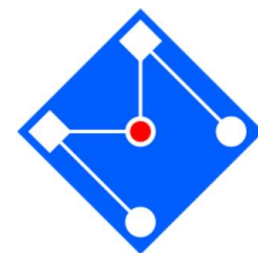
$$x(t) = 2 \sin 2\pi 440t + 1.5 \sin 2\pi 554.37t + 1.5 \sin 2\pi 659.26t$$

COMO PASSAR DO
DOMÍNIO DO TEMPO
PARA FREQUÊNCIA E VICE
VERSA???



JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER

FRANCÊS, 1768-1830



Apresentou um artigo em 1807 ao Instituto de França, com uma ideia maluca:

Qualquer função periódica pode ser reescrita como uma soma ponderada de senos e cossenos de diferentes frequências.

Entre os revisores do artigo tinha dos matemáticos famosos: **Joseph Louis Lagrange** e **Pierre Simon de Laplace**

Laplace e outros revisores votaram para publicar o artigo, mas Lagrange foi contra.

—Lagrange insistia que essa abordagem não pode ser utilizado para representar sinais com *quinas*(ondas quadradas)

—Somente baseado no parecer do Lagrangre, o Instituto de França rejeitou o artigo.

—O artigo foi publicado depois da morte do Lagrange





SÉRIE DE FOURIER



Uma **função periódica** $x(t)$ que satisfaça as **condições de Dirichlet** pode ser expressa como uma série de Fourier, com termos seno e cosseno harmonicamente relacionados,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad \text{equação de síntese}$$

$\omega_0 = 2\pi/T$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_T x(t) dt,$$

*média do sinal num período, i.e., termo DC
ou componente de frequência zero*

equações de análise

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

$n = 1, 2, \dots$

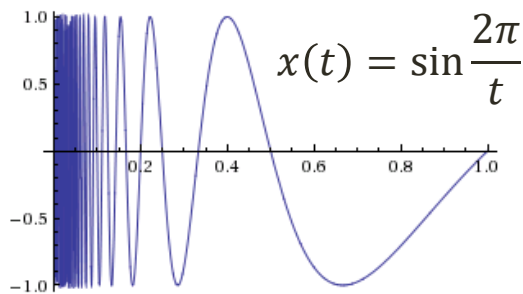
formam uma base ortogonal do
espaço de sinais.

CONDIÇÕES DE DIRICHLET



Em um intervalo periódico:

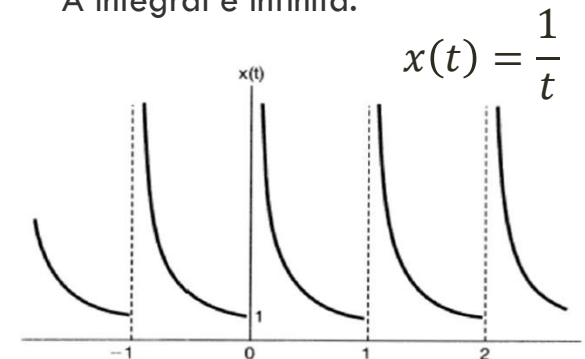
- 1) O sinal deve ser absolutamente integrável:
 $\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt$ não tendem ao infinito.
- 2) $x(t)$ deve ter um número finito de descontinuidades;
- 3) $x(t)$ deve ter um número finito de máximos e mínimos.



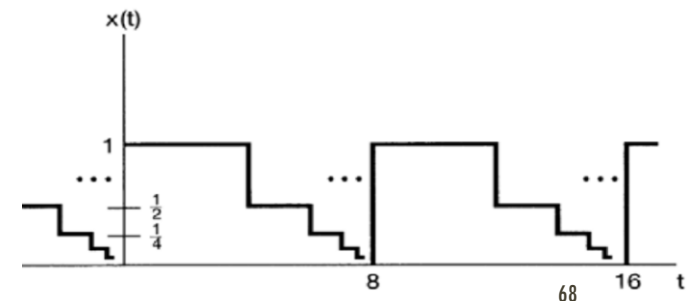
Não atende ao item 3:
 nesse intervalo a função varia entre infinitos valores de máximo e mínimo e não há como representar tal função usando os coeficientes da série de Fourier.

Não atende ao item 1:

A integral é infinita.



Não atende ao item 2:



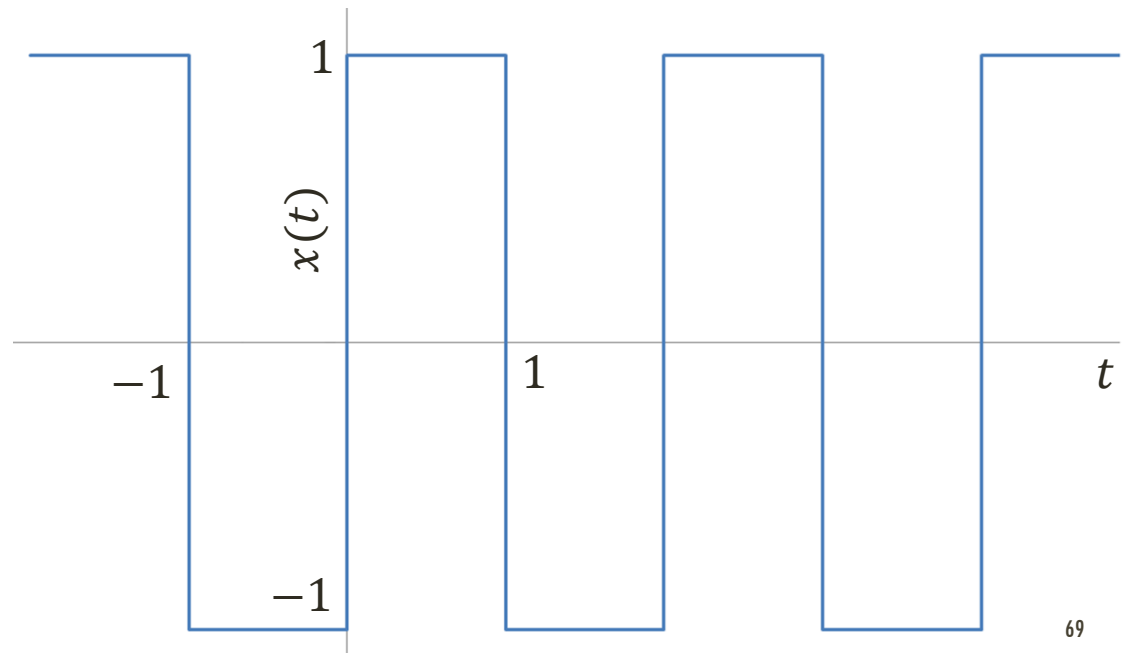


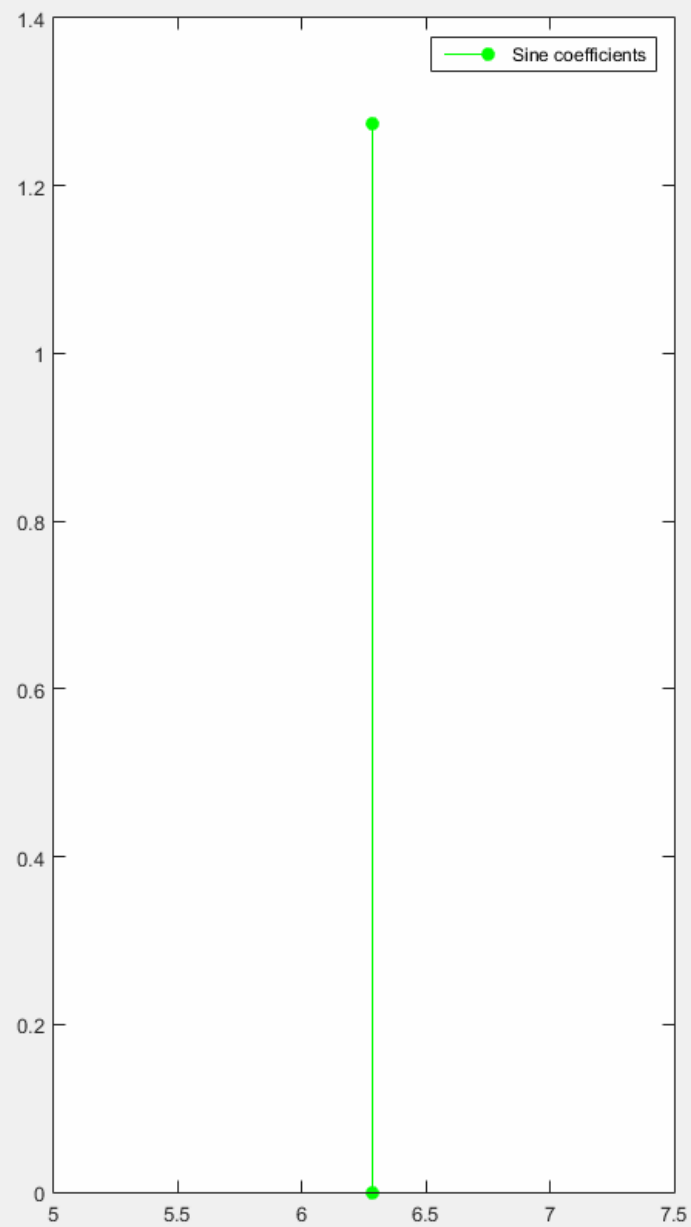
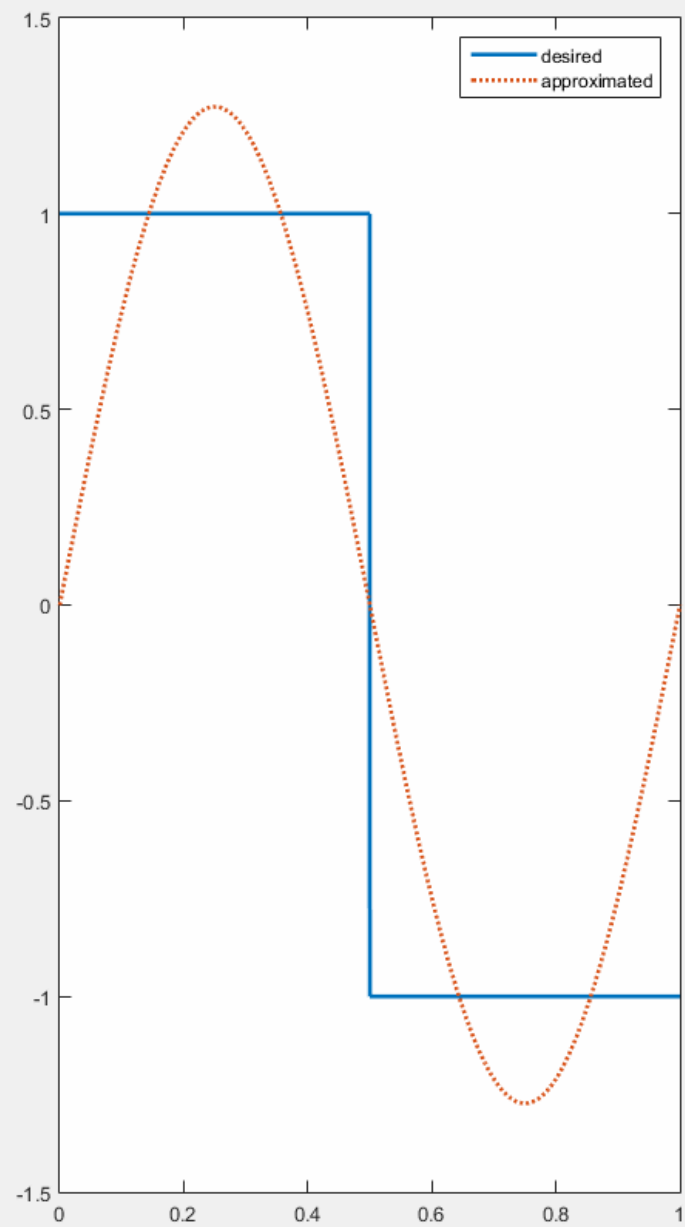
EXEMPLO: ONDA QUADRADA

$$x(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < t < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < t < 1 \end{cases}$$

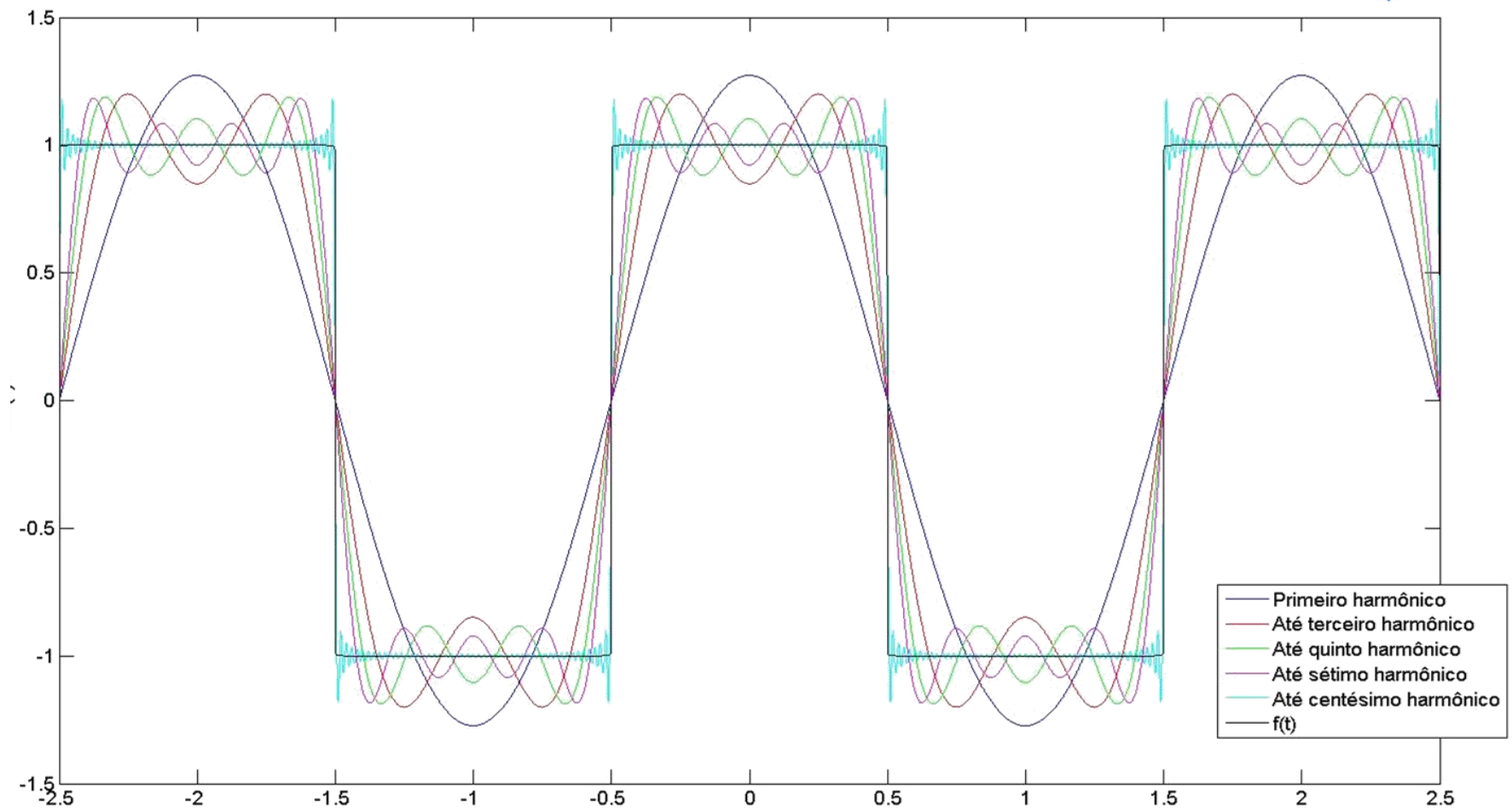
$$x(t + k) = x(t), k \text{ inteiro (período } T = 2s)$$

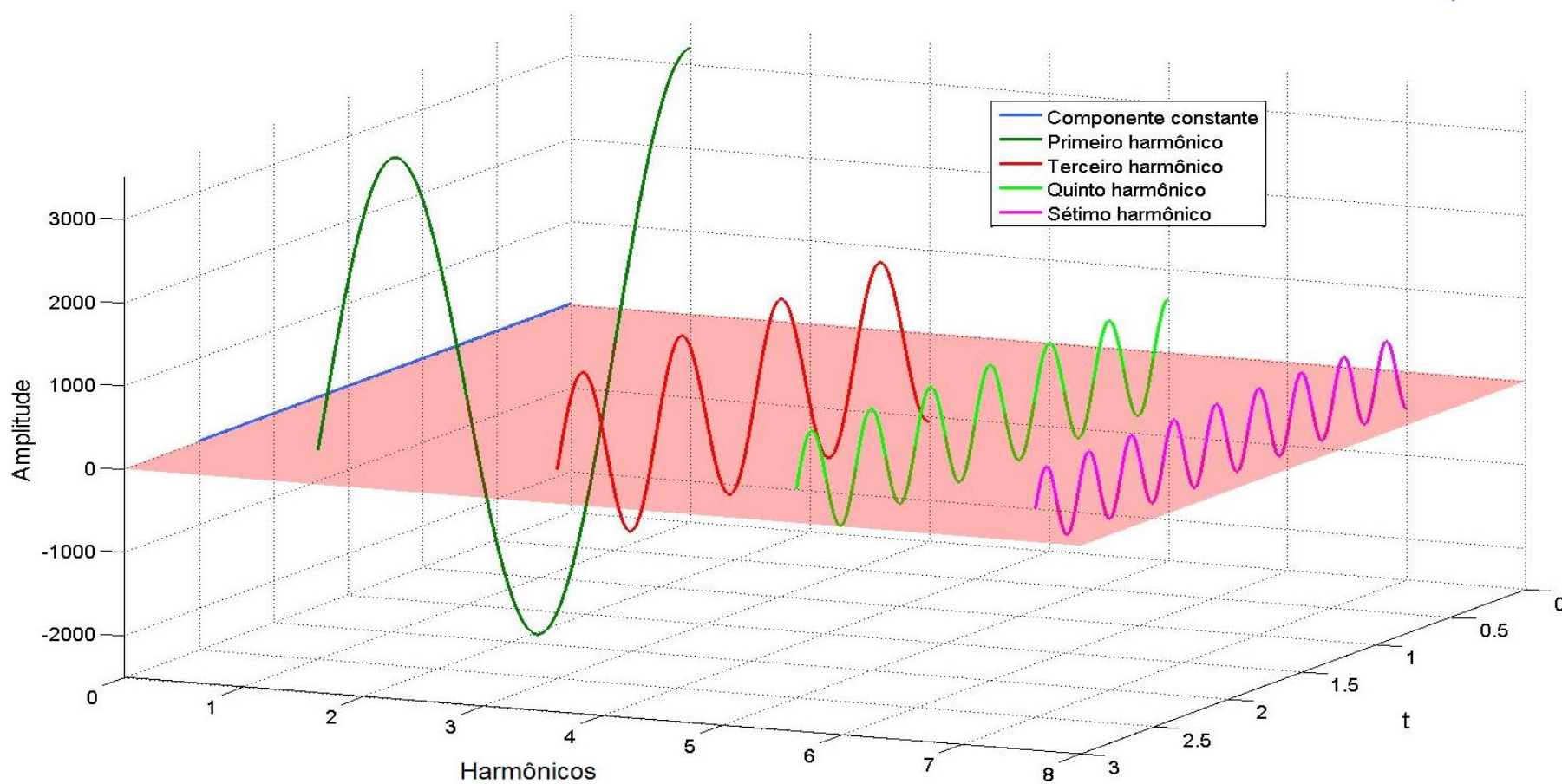
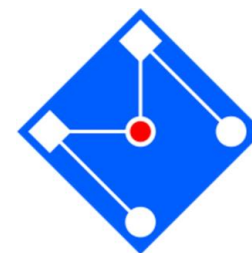
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$





Obviamente, na prática, não é possível trabalhar com infinitas parcelas e um número finito deve ser empregado...







FENÔMENO DE GIBBS

Fenômeno de Gibbs e ocorre sempre que você tentar reconstruir uma função com saltos de descontinuidade usando a série de Fourier.



7 – 25 – 100 e 1000 primeiros harmônicos!

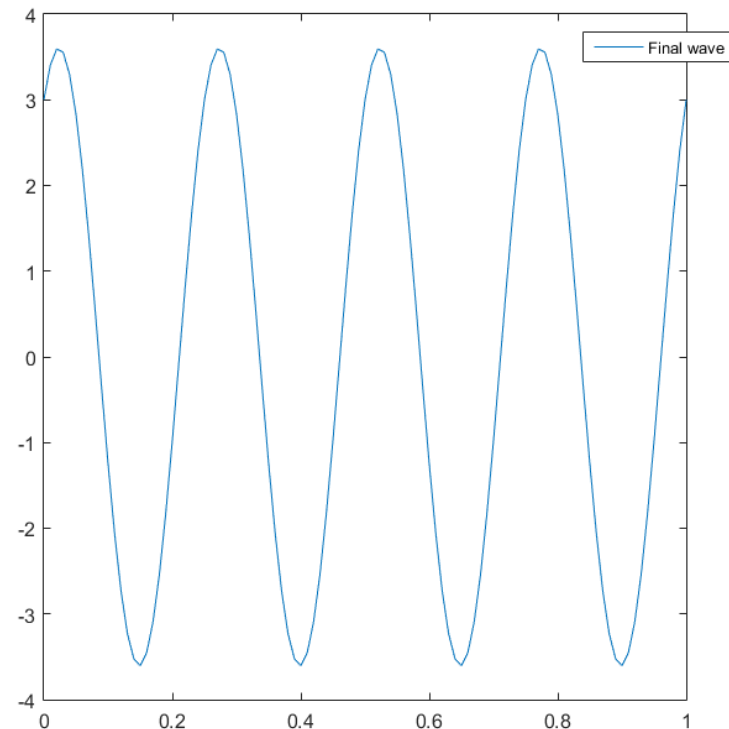
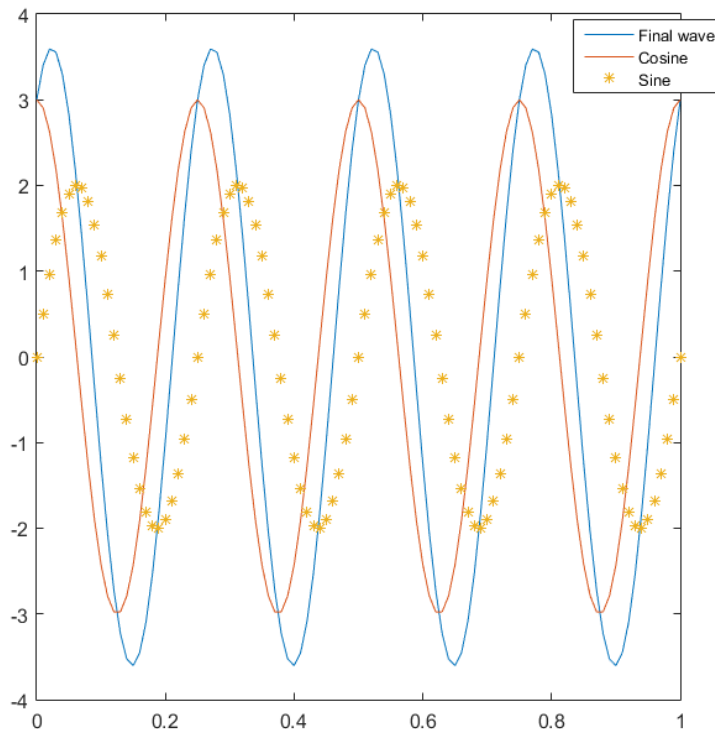
OUTRAS MANEIRAS DE ESCREVER A SÉRIE...



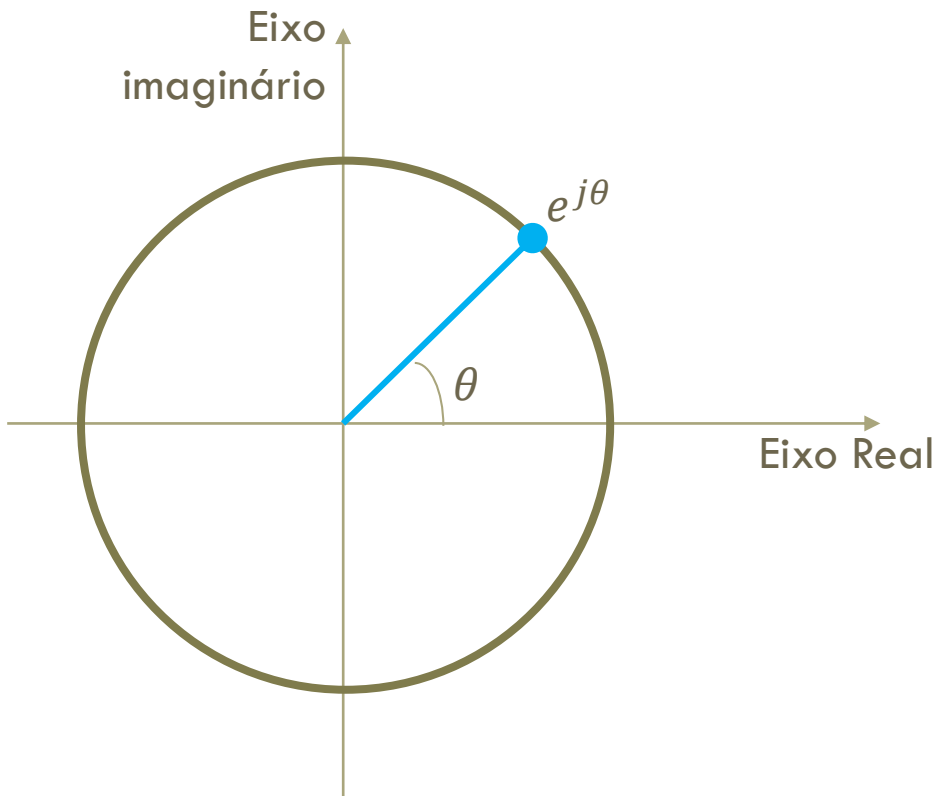
$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

$$\varphi_n = \text{atan} \frac{a_n}{b_n}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$



REVISÃO DA FORMA EXPONENCIAL DE UM NÚMERO COMPLEXO



Relação de Euler

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



LEMBRANDO QUE A SÉRIE DE FOURIER...

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$



FORMULAÇÃO COMPLEXA DA SÉRIE DE FOURIER

OU SÉRIE EXPONENCIAL DE FOURIER

Síntese

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[n] e^{jn\omega_0 t}$$

Harmônicos $X[n]$ distanciados $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$

Análise

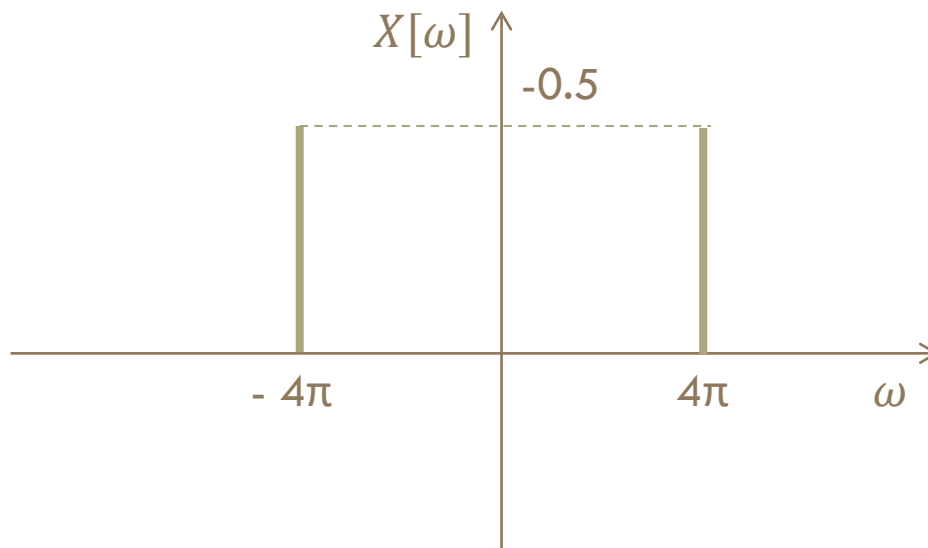
$$X[n] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

FUNÇÃO COSSENO



Encontre os coeficientes da série complexa de Fourier para o sinal

$$x(t) = \cos 4\pi t$$

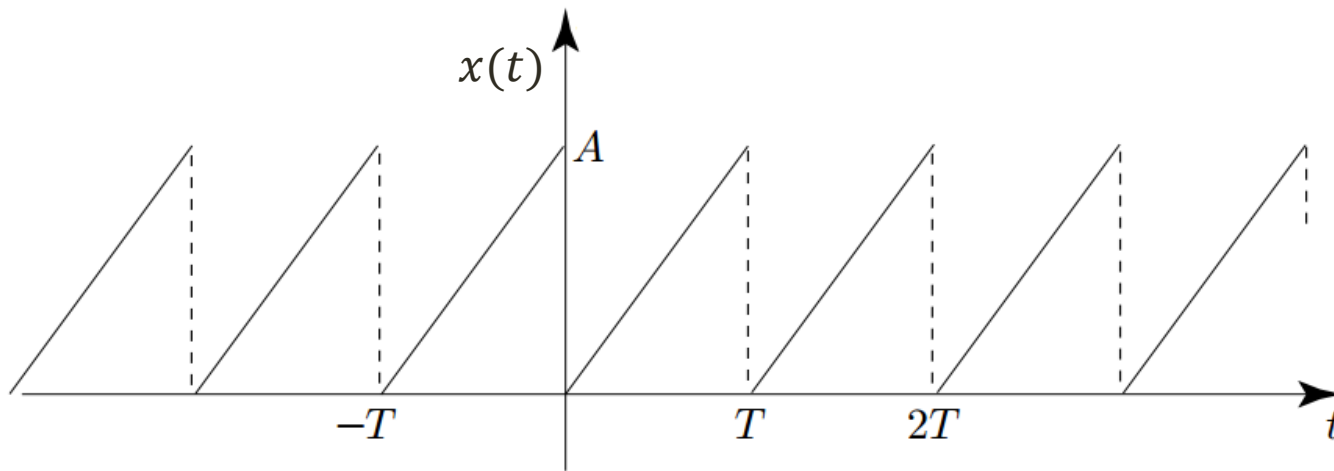


EXEMPLO: ONDA DENTE DE SERRA



$$x(t) = \frac{At}{T} \quad \text{para } 0 < t < T$$

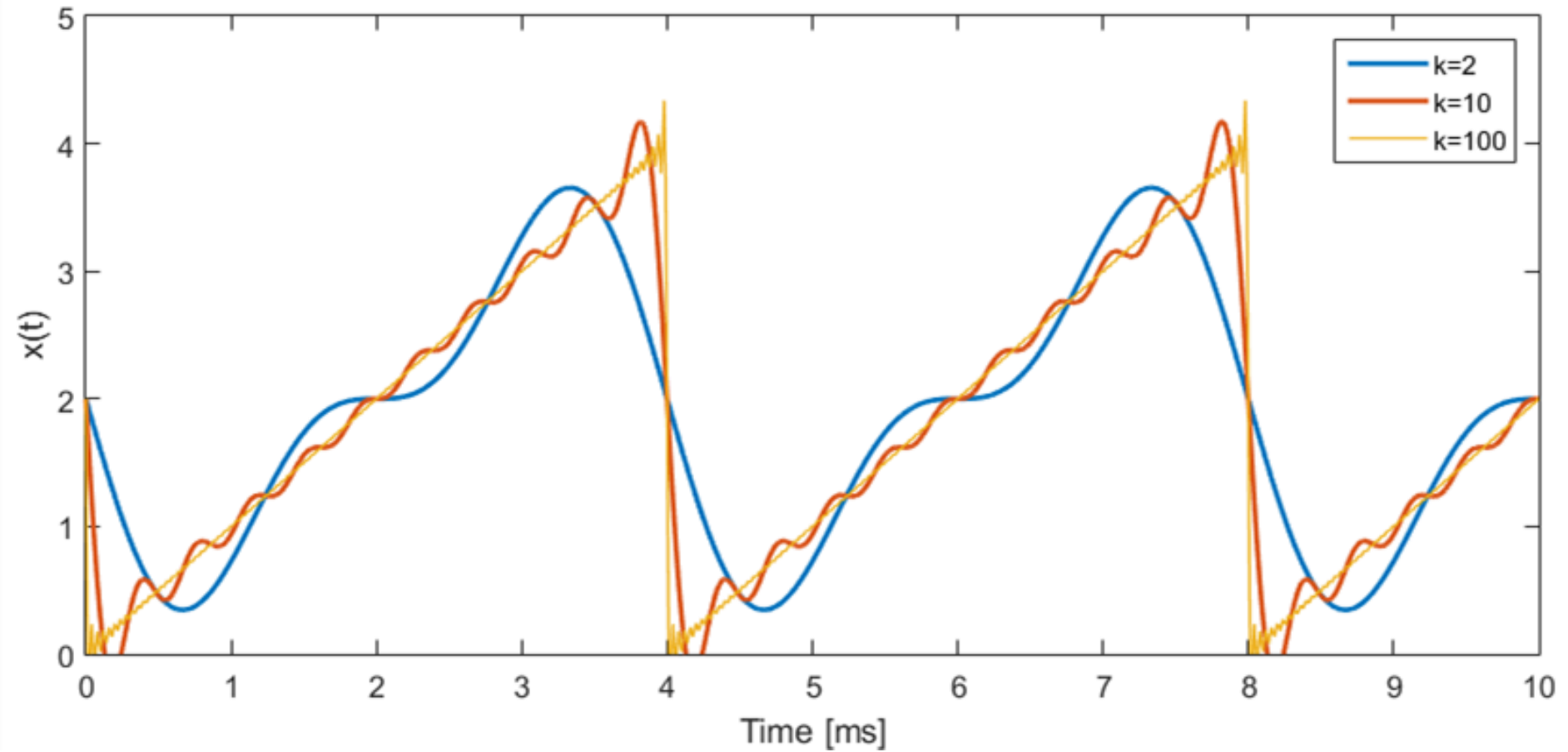
$x(t + T) = x(t)$, onde T é o período, de modo que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



$$T = 4\text{ms}$$

$$A = 4$$

$$x(t) = \frac{A}{2} + j \frac{A}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{jk\omega_0 t}}{k}$$



PROPRIEDADES DAS SÉRIES DE FOURIER



1. Linearidade
2. Translação no tempo
3. Sinal refletido (reversão no tempo)
4. Escalonamento no tempo
5. Multiplicação
6. Translação na frequência
7. Convolução no período
8. Derivada
9. Integral



RESUMO DOS QUATRO CASOS

Domínio do tempo	Extensão finita	Extensão infinita
Contínuo	Série de Fourier (FS)	Transformada de Fourier (FT)
Discreto	Transformada Discreta de Fourier (DFT)	Transformada de Fourier Discreta no Tempo (DTFT)

Série de Fourier (FS)

Para $x(t)$ de duração T , onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

$$x(t) : 0 \leq t \leq T$$

$$X[k] : k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$X[k] = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

Transformada de Fourier (FT)

$$x(t) : -\infty < t < \infty$$

$$X(\omega) : -\infty < \omega < \infty$$

$$X(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Para $x[n]$ de dimensão N , onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$.

$$x[n] : n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X[k] : k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\omega_0 n}$$

Transformada de Fourier Discreta no Tempo (DTFT)

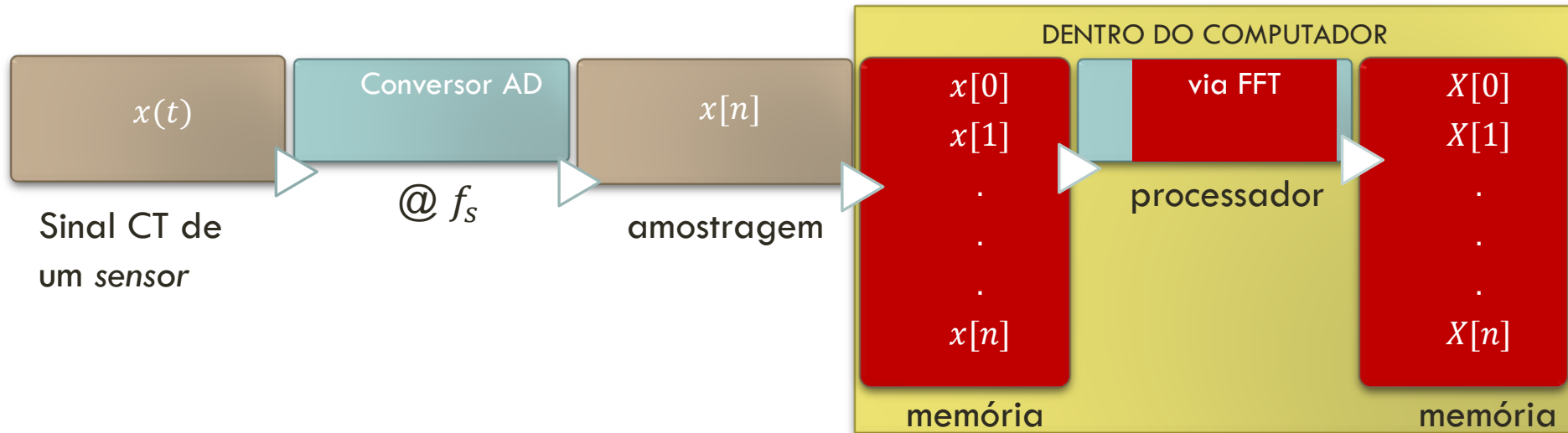
$$x[n] : n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

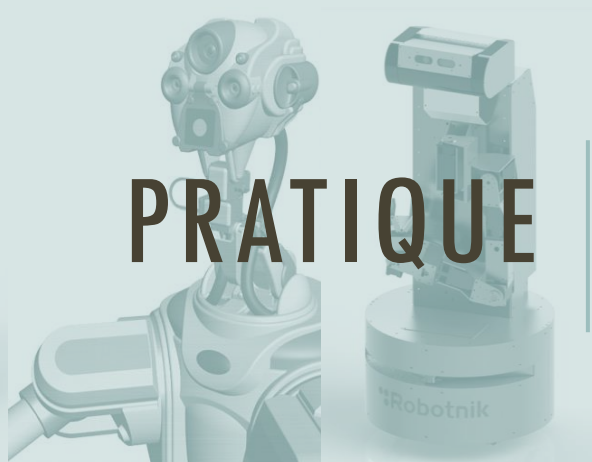
$$X(\omega) : -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

O QUE QUEREMOS NO ESTUDO DE ANÁLISE DE SINAIS????





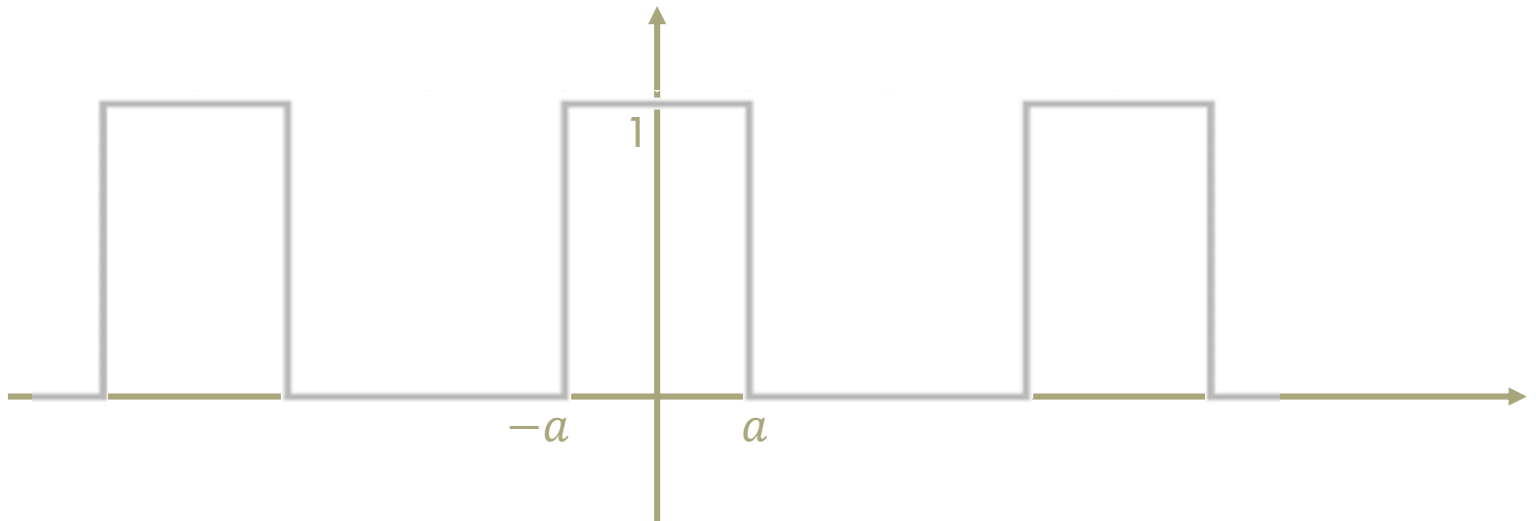
PRATIQUE

Exercícios para você
resolver...

ONDA QUADRADA



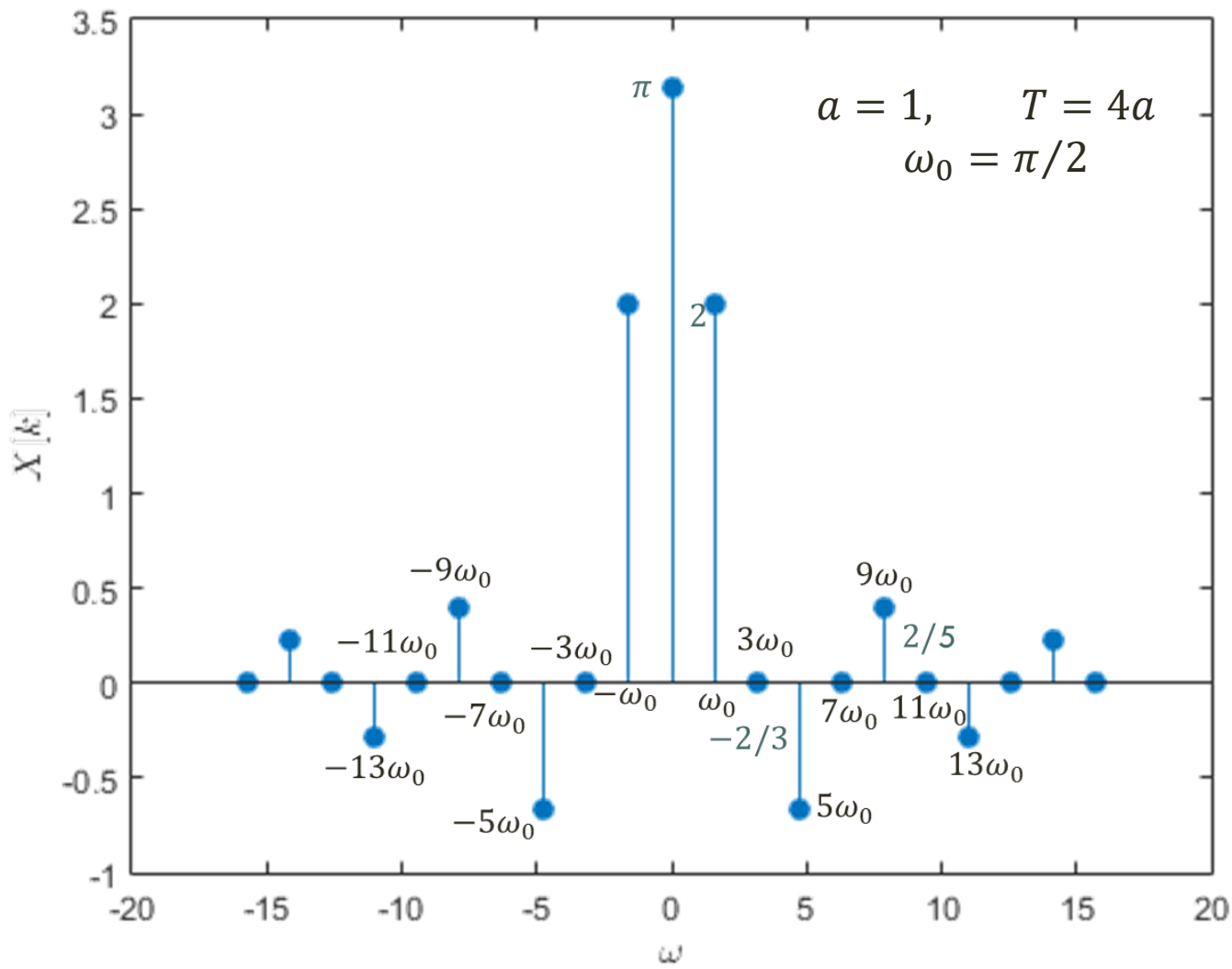
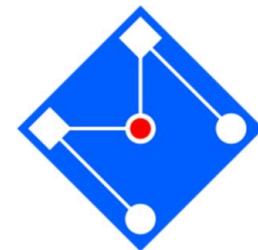
Ache a série de Fourier e desenhe as funções no domínio do tempo e frequência, para a funções periódica da Figura, supondo $T = 4a$.



$$X[k] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$X[0] = \frac{1}{T} \int_{-a}^a 1 dt = \frac{2a}{T}, \quad k = 0$$

$$X[k] = \frac{\sin(k\omega_0 a)}{k\pi}, \quad k \neq 0$$



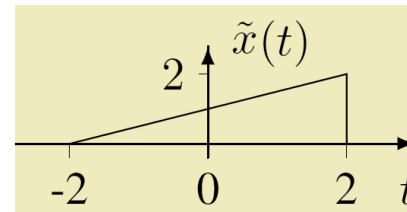


SINAL DESLOCADO

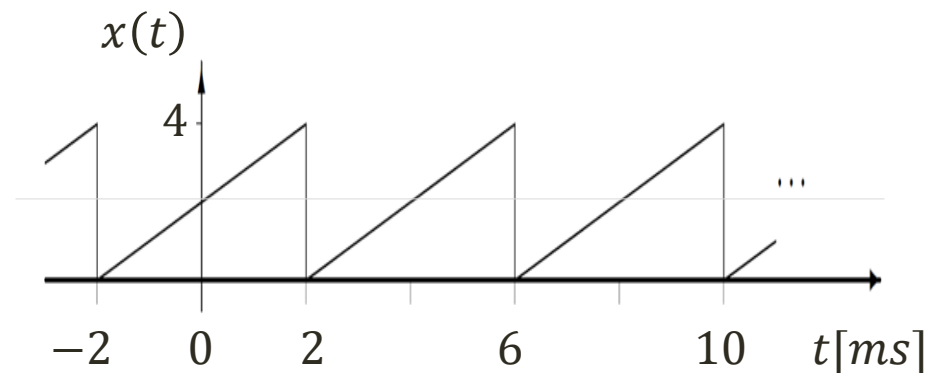
1. Investigue uma aplicação mais geral da técnica, considerando a onda em forma de dente de serra, nesse caso com um deslocamento de fase. Imagine extrapolarmos a onda para trás no tempo, fazendo com que esta não seja mais simétrica em $t = 0$.

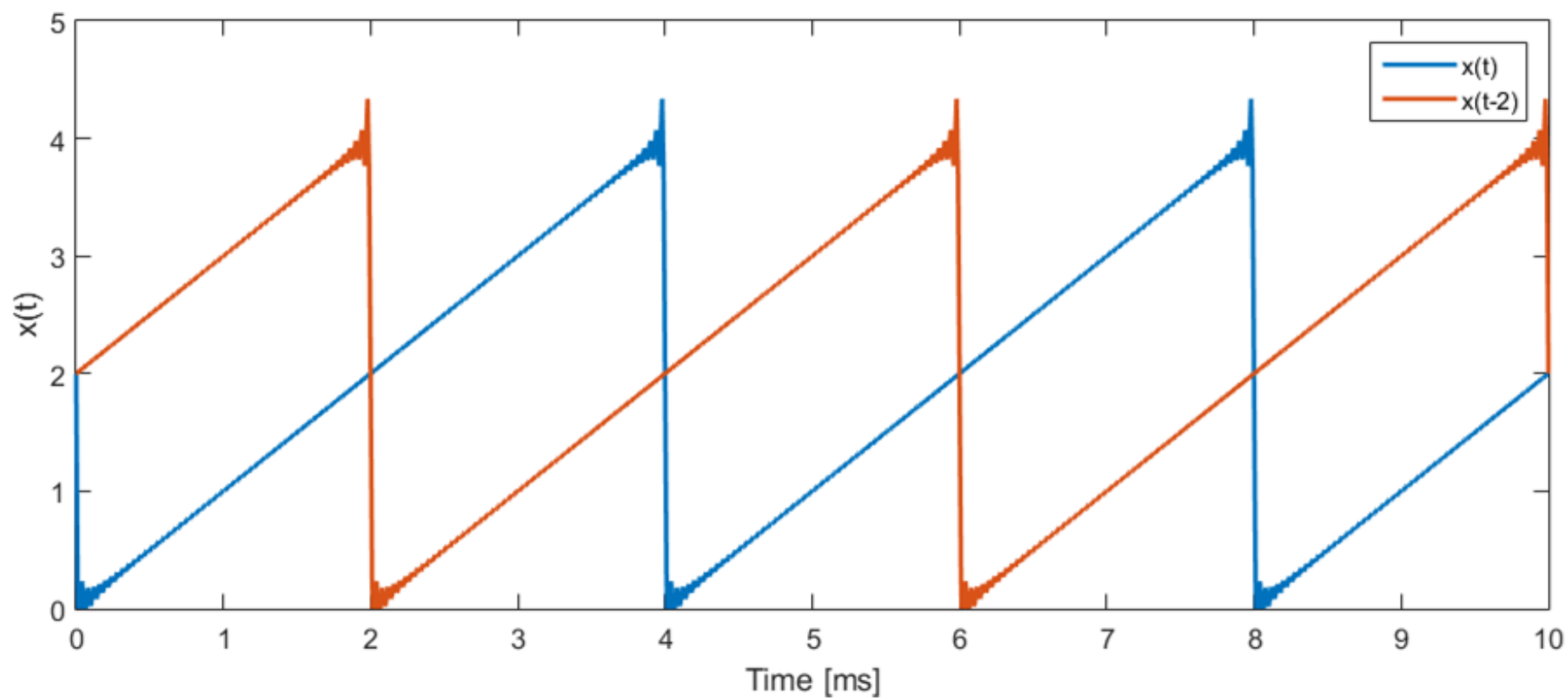
$$T = 4ms.$$

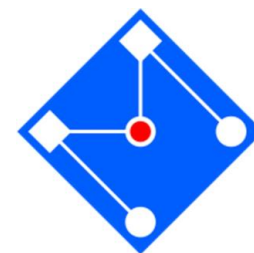
$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} + 1 & \text{se } |t| < 2 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t - kT)$$







FUNÇÕES PERIÓDICAS

Ache a série de Fourier e desenhe as funções no domínio do tempo e frequência, das funções periódicas:

1. $x(t) = t$ para $t \in [-\pi, \pi]$
2. $x(t) = t$ para $t \in [0, 2\pi]$
3. $x(t) = e^t$ para $t \in [-\pi, \pi]$

Gabarito:

1

$$x(t) = j \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{jkt}}{k}$$

2

$$x(t) = \pi + j \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{jkt}}{k}$$

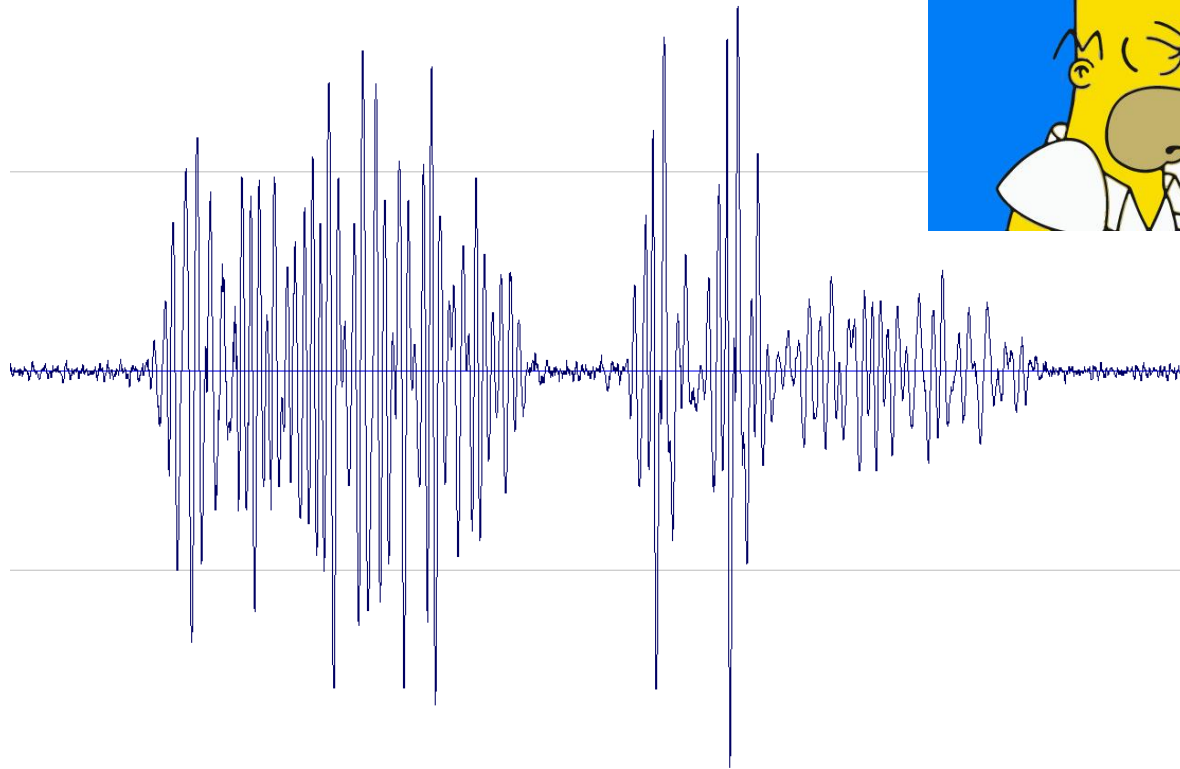
3

$$x(t) = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{(1 + jk)}{(1 + k^2)} e^{jkt}$$

Este não é um sinal periódico.

Queremos calcular seu espectro
usando análise de Fourier, mas
aprendemos que o sinal deve ser
periódico.

O que fazer?



SEMANA DE REVISÃO

Sinal

Sistema

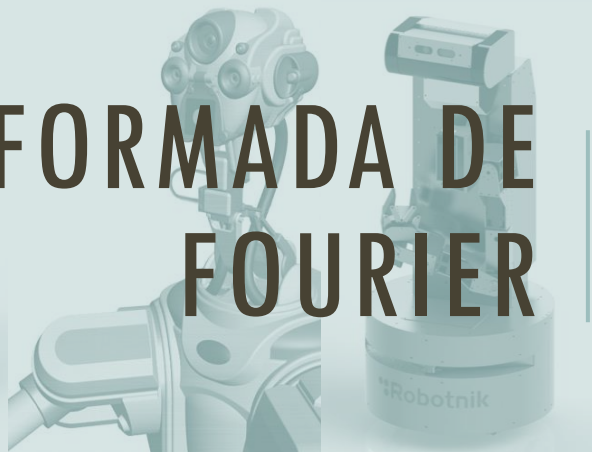
Convolução

Série de Fourier – somente para sinais periódicos e infinitos, porém a base de toda análise de sinais

So far...



TRANSFORMADA DE FOURIER



Aguardem próxima
semana;
Façam os exercícios
desta semana. NÃO
DEIXEM ACUMULAR!!!!

