

Trem de engrenagens

Prof. Chi Nan **Pai**

MS-14

chinan.pai@usp.br



Transmissão de movimento

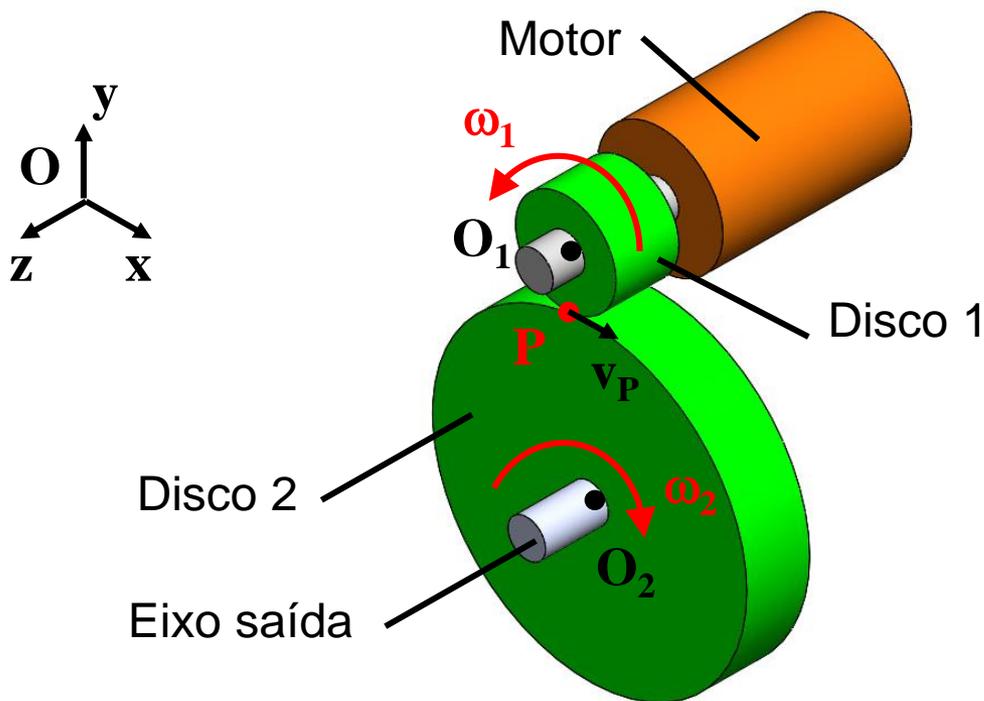
- **Engrenagens**
 - Médio e alta potência: material metálico
 - Baixa potência: material plástico
- Conjunto correia e polia
- Conjunto corrente e roda dentada





Ação conjugada

- Razão entre as velocidades é constante
 - Ex: discos de fricção



$$|V_P| = |\omega_1| r_1 = |\omega_2| r_2$$

$$\frac{\omega_{saida}}{\omega_{entrada}} = \frac{-\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$P_1 = P_2 \quad P = T\omega$$

$$|T_1| |\omega_1| = |T_2| |\omega_2|$$

$$\frac{|T_2|}{|T_1|} = \frac{|\omega_1|}{|\omega_2|}$$

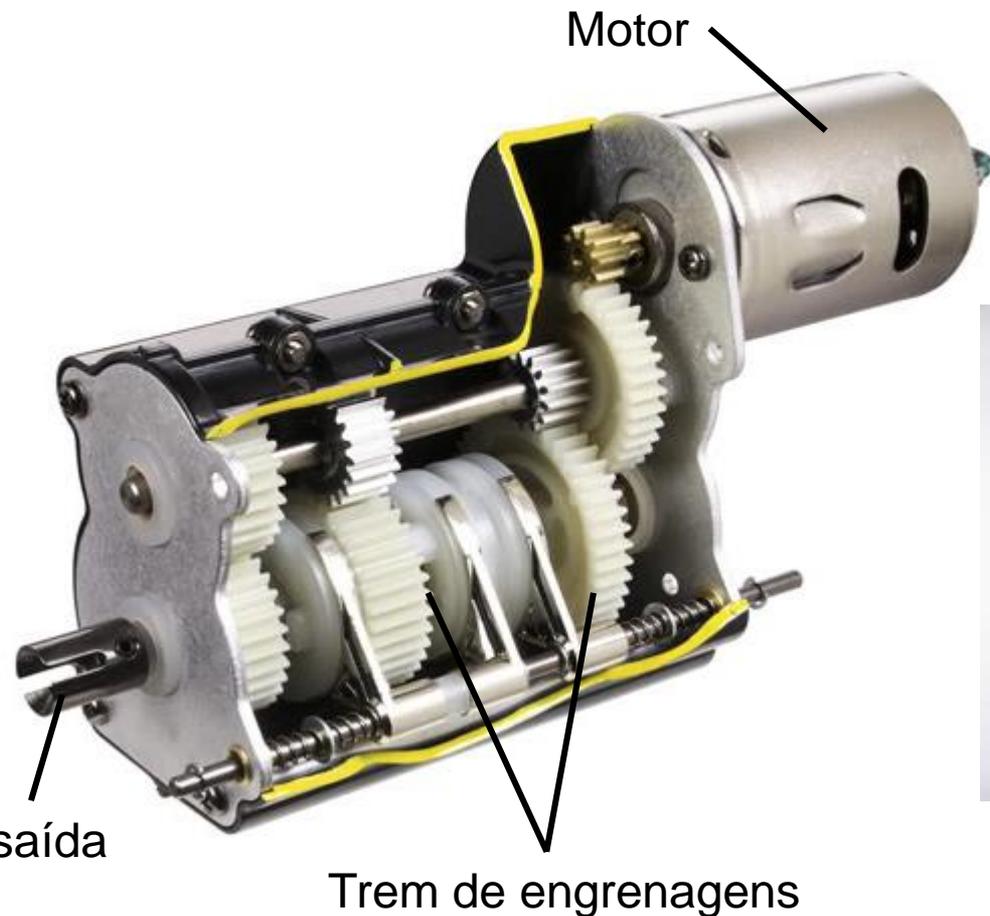
$$r_1 < r_2 \rightarrow \omega_2 < \omega_1 \rightarrow T_1 < T_2$$



Engrenagem



- Cilindro com dentes em toda a superfície lateral
- Contato de pelo menos um par de dentes entre um par de engrenagens



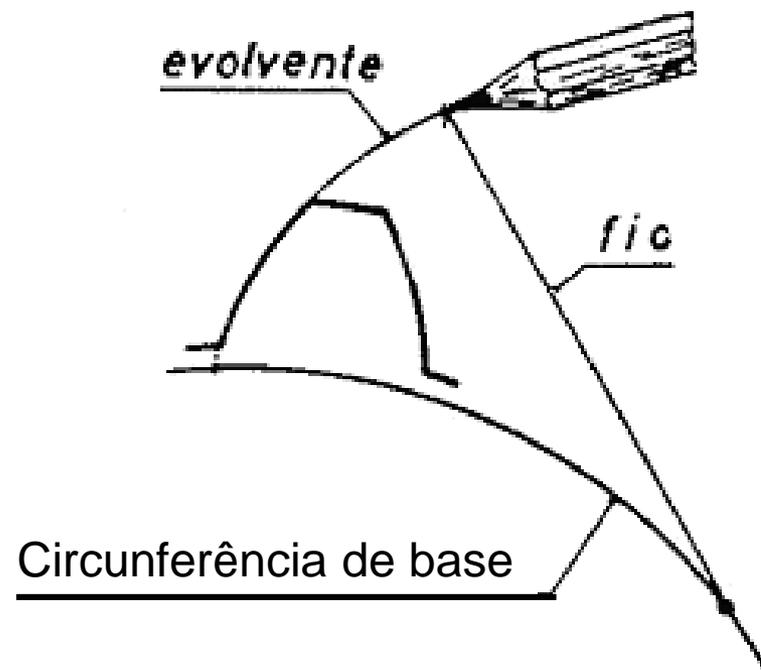
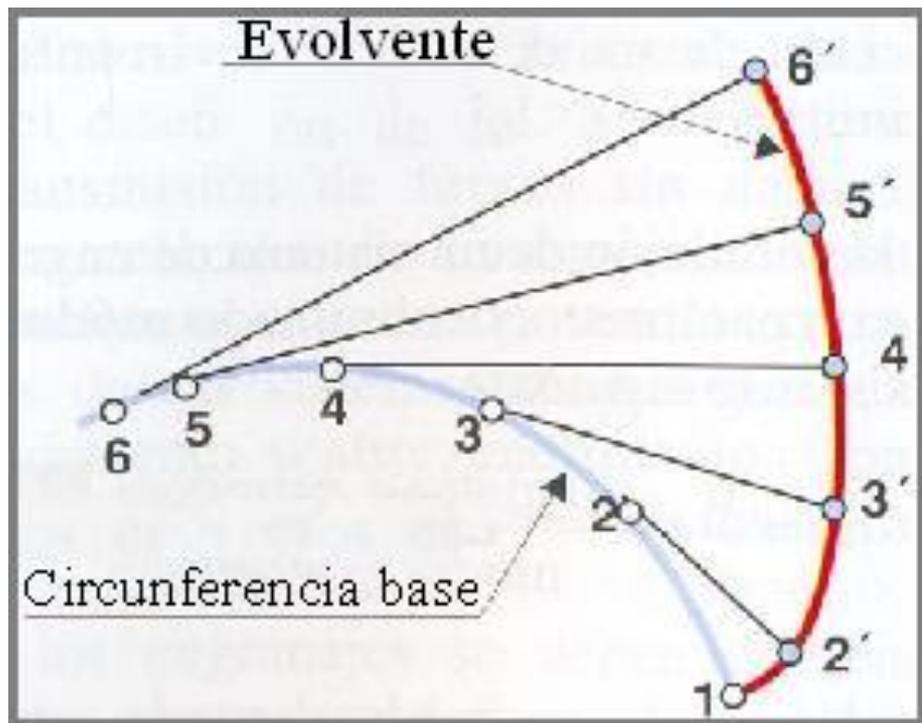
Dentes em contato simultâneo





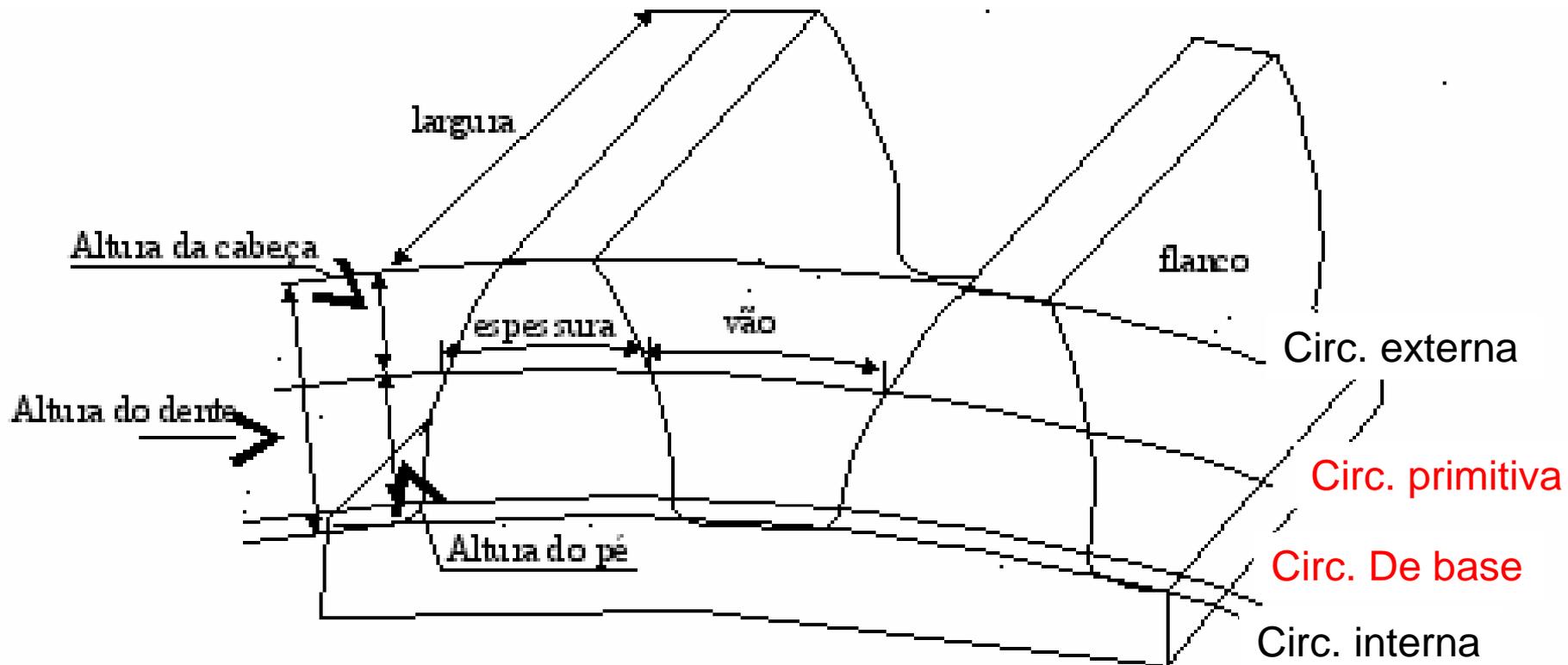
Formato dos dentes

- Perfil evolvente → ação conjugada





Medidas





Circunferência de base

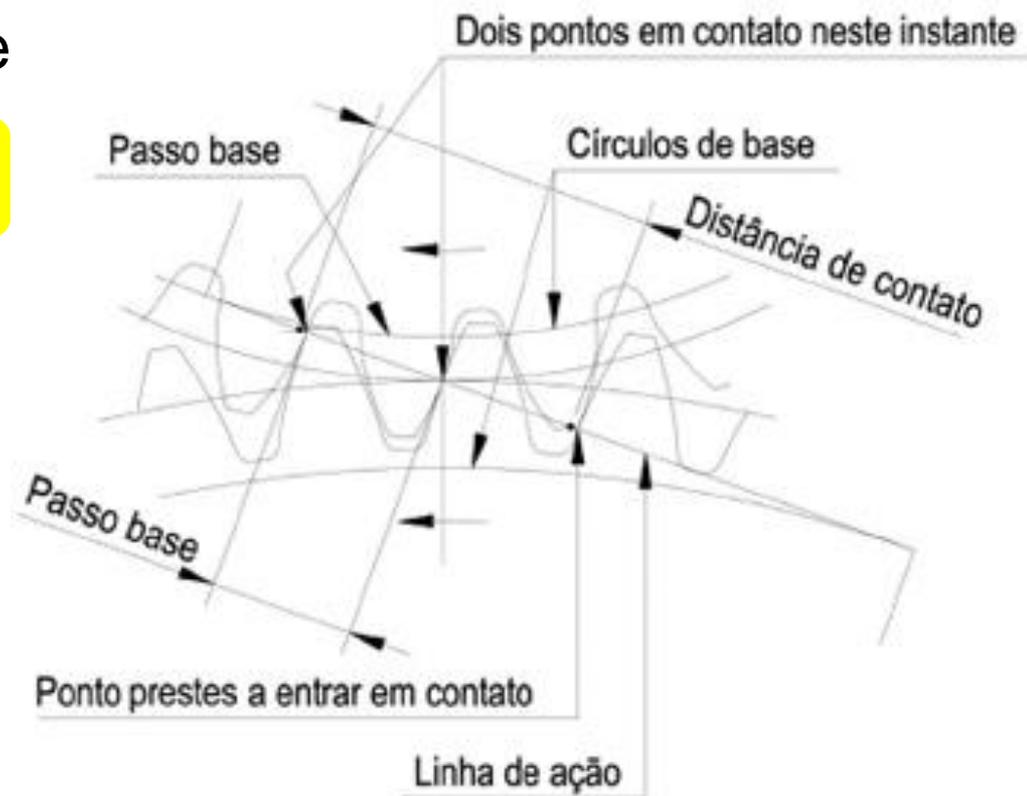
- Gerar perfil evolvente

Circunferência primitiva

- Estabelecer a razão constante entre a velocidade e o raio

Linha de ação

- Reta tangente simultaneamente a duas circ. de base
- Formada pelos pontos de contato entre os dentes





Módulo

- Relação entre o diâmetro da circ. primitiva (d) e o número de dentes (N), em **milímetros**

$$m = \frac{d}{N}$$

Diametral pitch

- Relação entre o número de dentes (N) e o diâmetro da circ. primitiva (d), em **polegadas**

$$P = \frac{N}{d}$$



- Associação de duas ou mais engrenagens
- Usados como redutores em sistemas de transmissão
- Ação conjugada:

$$\frac{\omega_{saida}}{\omega_{entrada}} = \frac{-\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \qquad \frac{|T_2|}{|T_1|} = \frac{|\omega_1|}{|\omega_2|}$$

- Cada par de engrenagens diretamente acopladas devem ser do mesmo módulo

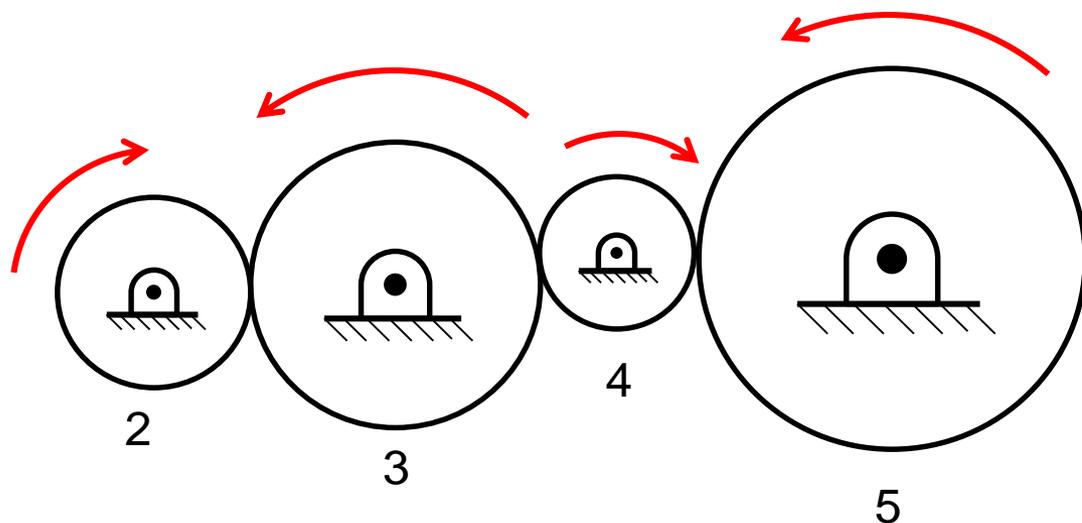
$$m = \frac{d}{N}$$



Trem simples

Usar razão máxima de até 10:1

- Eixos são fixos
- Cada eixo tem uma engrenagem



$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = -\frac{d_2}{d_3} = -\frac{N_2}{N_3}$$

$$\frac{\omega_4}{\omega_3} = -\frac{d_3}{d_4} = -\frac{N_3}{N_4}$$

$$\frac{\omega_5}{\omega_4} = -\frac{d_4}{d_5} = -\frac{N_4}{N_5}$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} \frac{\omega_4}{\omega_3} \frac{\omega_5}{\omega_4} = \left(-\frac{d_2}{d_3}\right) \left(-\frac{d_3}{d_4}\right) \left(-\frac{d_4}{d_5}\right)$$



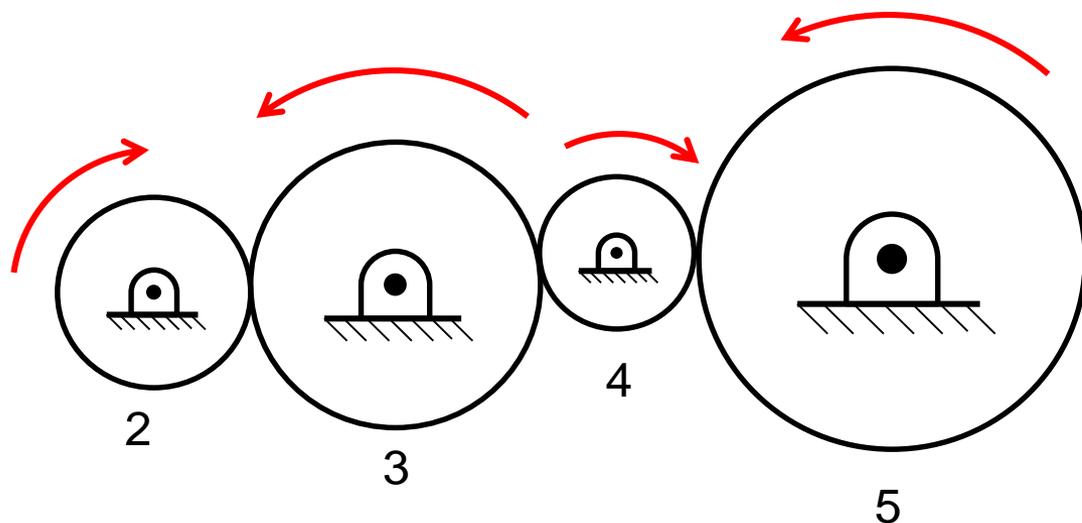
Trens de engrenagem



Trem simples

Usar razão máxima de até 10:1

- Eixos são fixos
- Cada eixo tem uma engrenagem



$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = -\frac{d_2}{d_3} = -\frac{N_2}{N_3}$$

$$\frac{\omega_4}{\omega_3} = -\frac{d_3}{d_4} = -\frac{N_3}{N_4}$$

$$\frac{\omega_5}{\omega_4} = -\frac{d_4}{d_5} = -\frac{N_4}{N_5}$$

$$\frac{\cancel{\omega_3}}{\omega_2} \frac{\cancel{\omega_4}}{\cancel{\omega_3}} \frac{\omega_5}{\cancel{\omega_4}} = \left(-\frac{d_2}{d_3} \right) \left(-\frac{\cancel{d_3}}{\cancel{d_4}} \right) \left(-\frac{\cancel{d_4}}{d_5} \right)$$

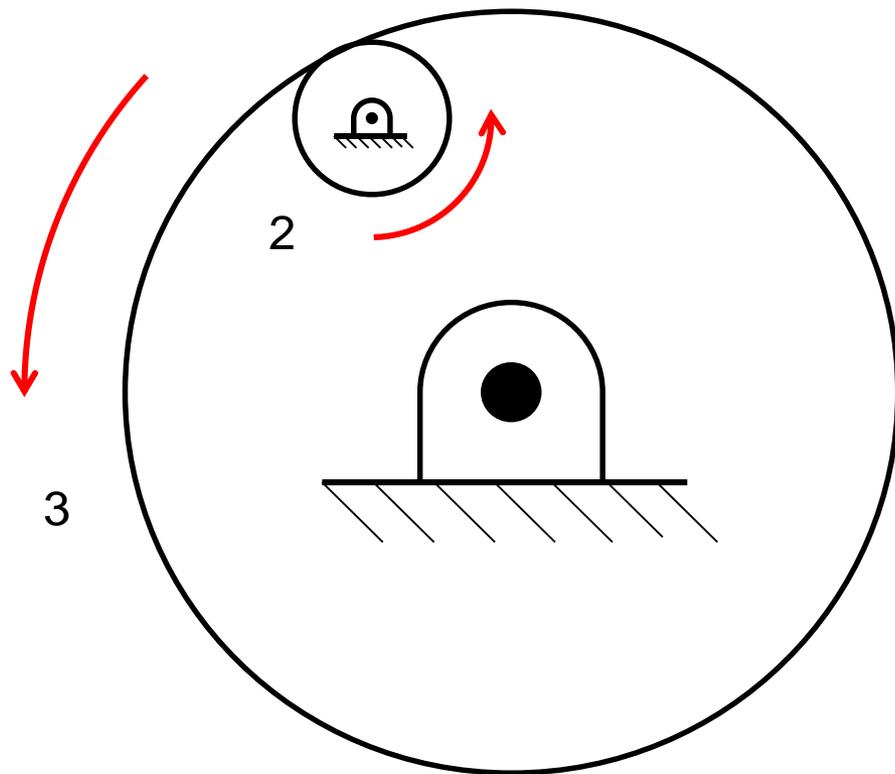
$$\frac{\omega_5}{\omega_2} = -\frac{d_2}{d_5} = -\frac{N_2}{N_5}$$



Trem simples

Usar razão máxima de até 10:1

- Cuidado com sinal quando a engrenagem tem dentes internos

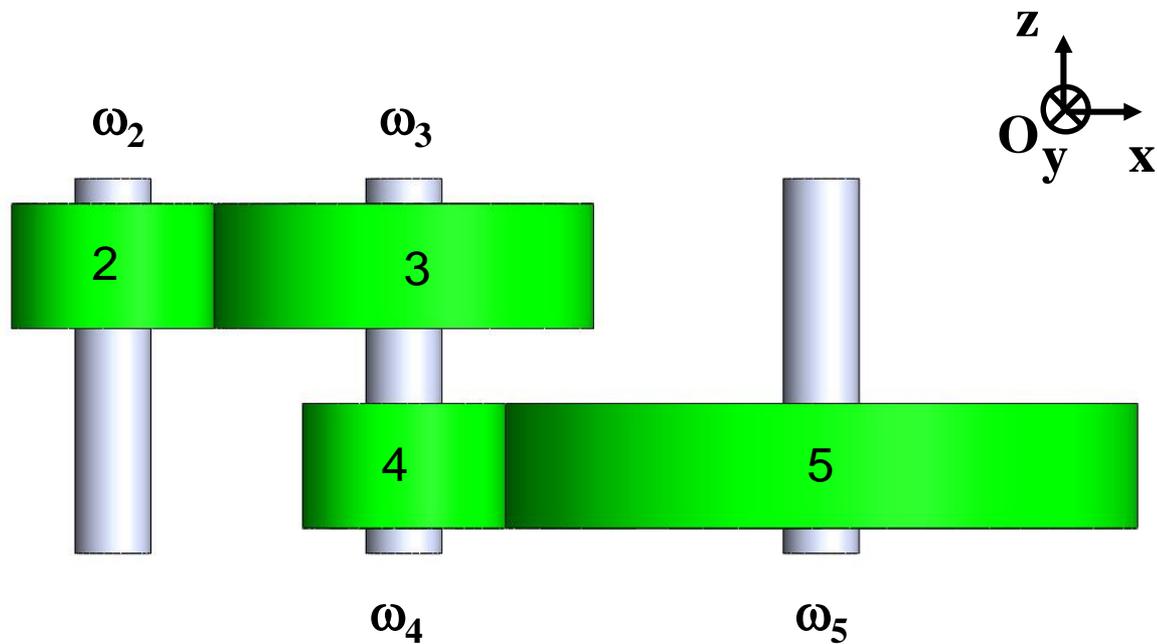
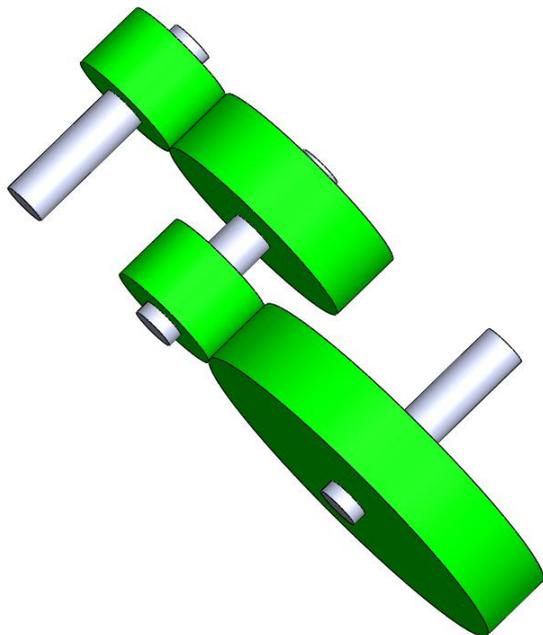


$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_3} = \frac{N_2}{N_3}$$



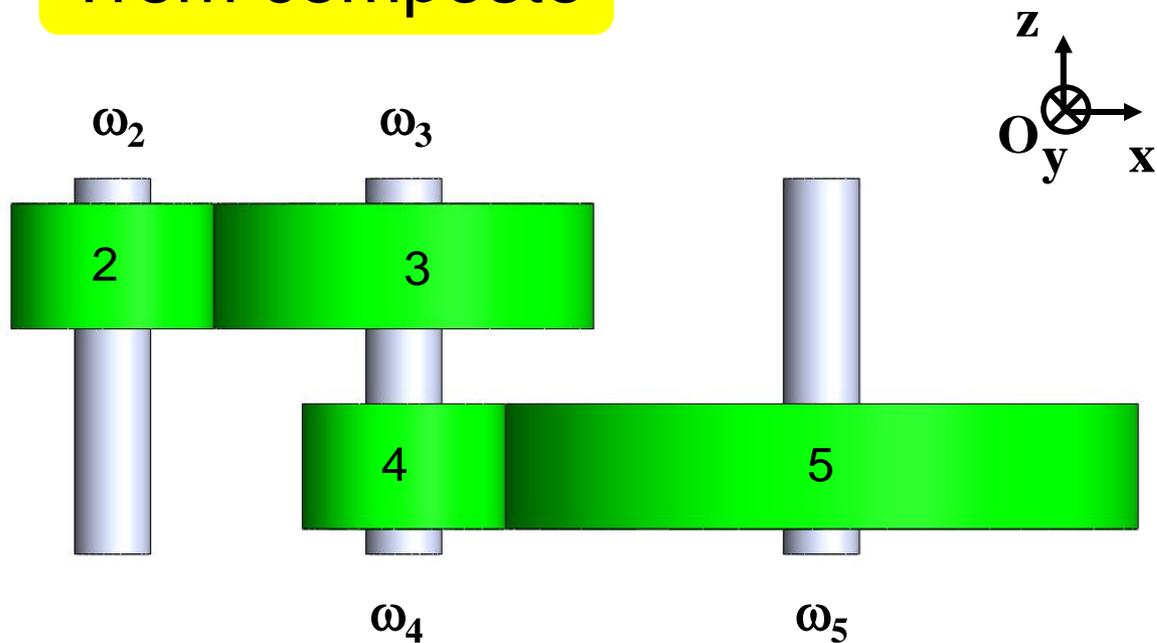
Trem composto

- Eixos são fixos
- Um dos eixos tem mais de uma engrenagem
- Razão máxima de 10:1 **para cada par**
- Razão máxima total pode ser maior que 10:1





Trem composto



$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = -\frac{d_2}{d_3} = -\frac{N_2}{N_3}$$

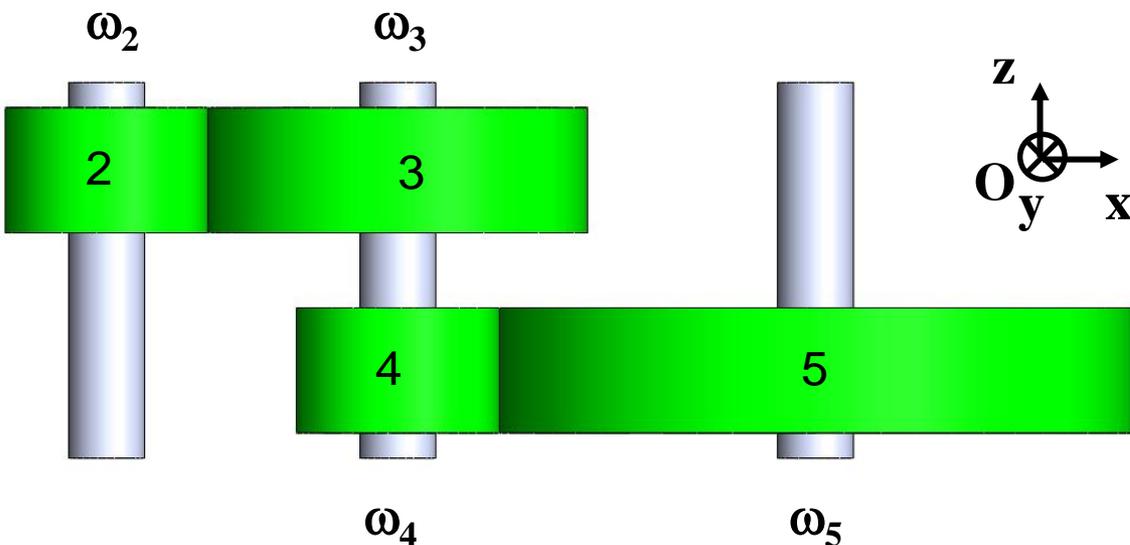
$$\omega_4 = \omega_3$$

$$\frac{\omega_5}{\omega_4} = -\frac{d_4}{d_5} = -\frac{N_4}{N_5}$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} \frac{\omega_5}{\omega_4} = \left(-\frac{d_2}{d_3}\right) \left(-\frac{d_4}{d_5}\right)$$



Trem composto Mesmo módulo: (2 e 3) e (4 e 5)



$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = -\frac{d_2}{d_3} = -\frac{N_2}{N_3}$$

$$\omega_4 = \omega_3$$

$$\frac{\omega_5}{\omega_4} = -\frac{d_4}{d_5} = -\frac{N_4}{N_5}$$

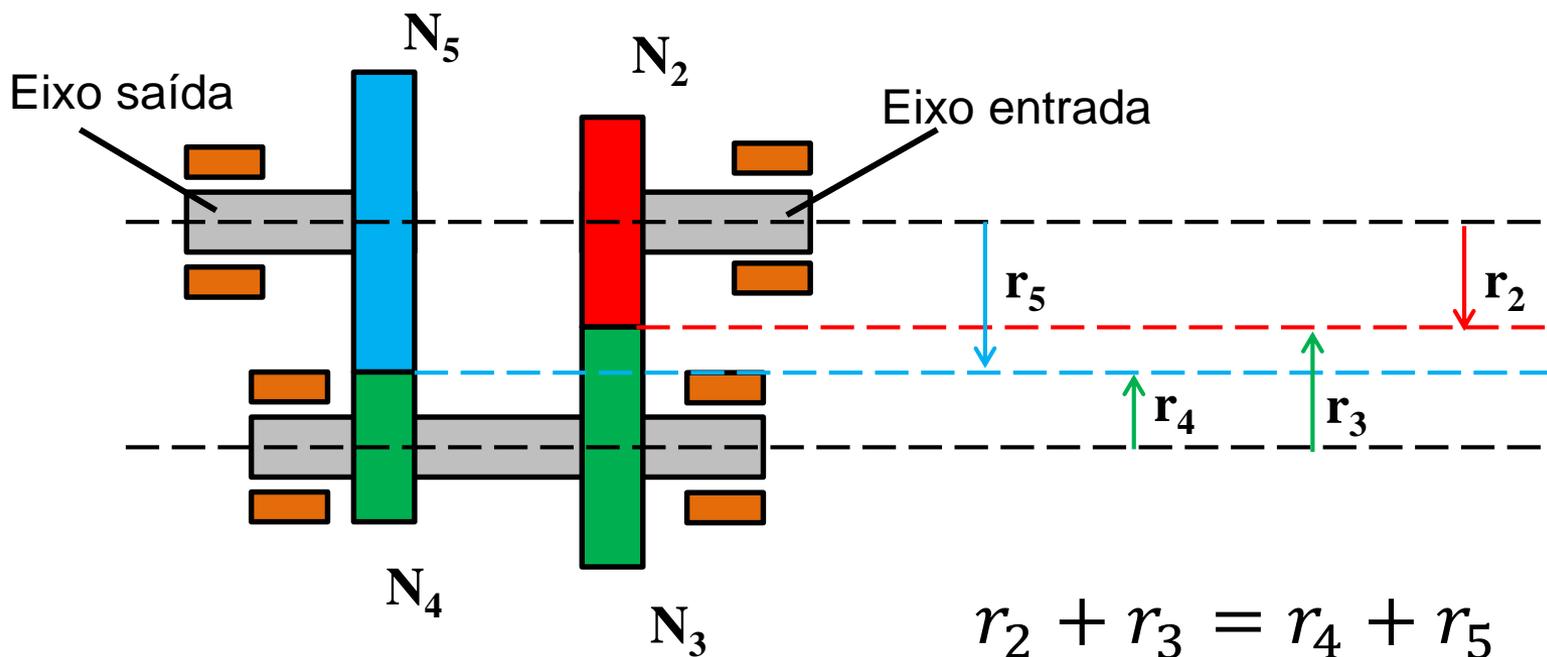
$$\frac{\cancel{\omega_3}}{\omega_2} \frac{\omega_5}{\cancel{\omega_4}} = \left(-\frac{d_2}{d_3}\right) \left(-\frac{d_4}{d_5}\right)$$

$$\frac{\omega_5}{\omega_2} = \frac{d_2 d_4}{d_3 d_5} = \frac{N_2 N_4}{N_3 N_5}$$



Trem composto reverso (concêntrico)

- Eixo de saída concêntrico ao eixo de entrada
- Ocupa menos espaço
- Muito utilizado em automóveis

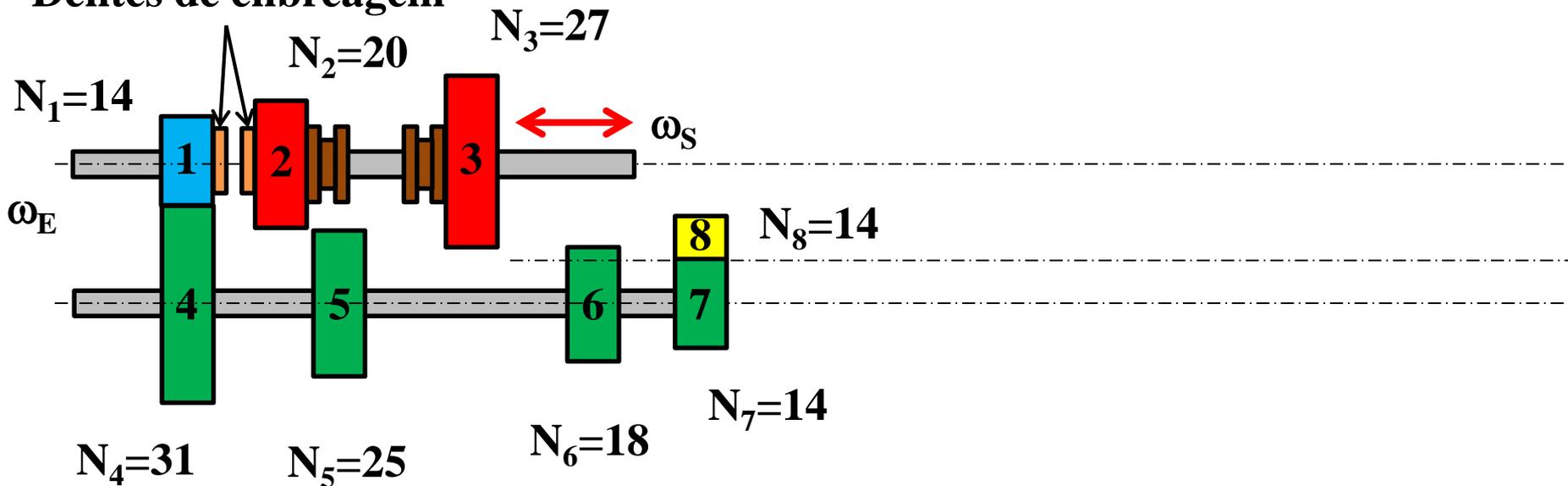




Exercício

Sistema de transmissão de um carro

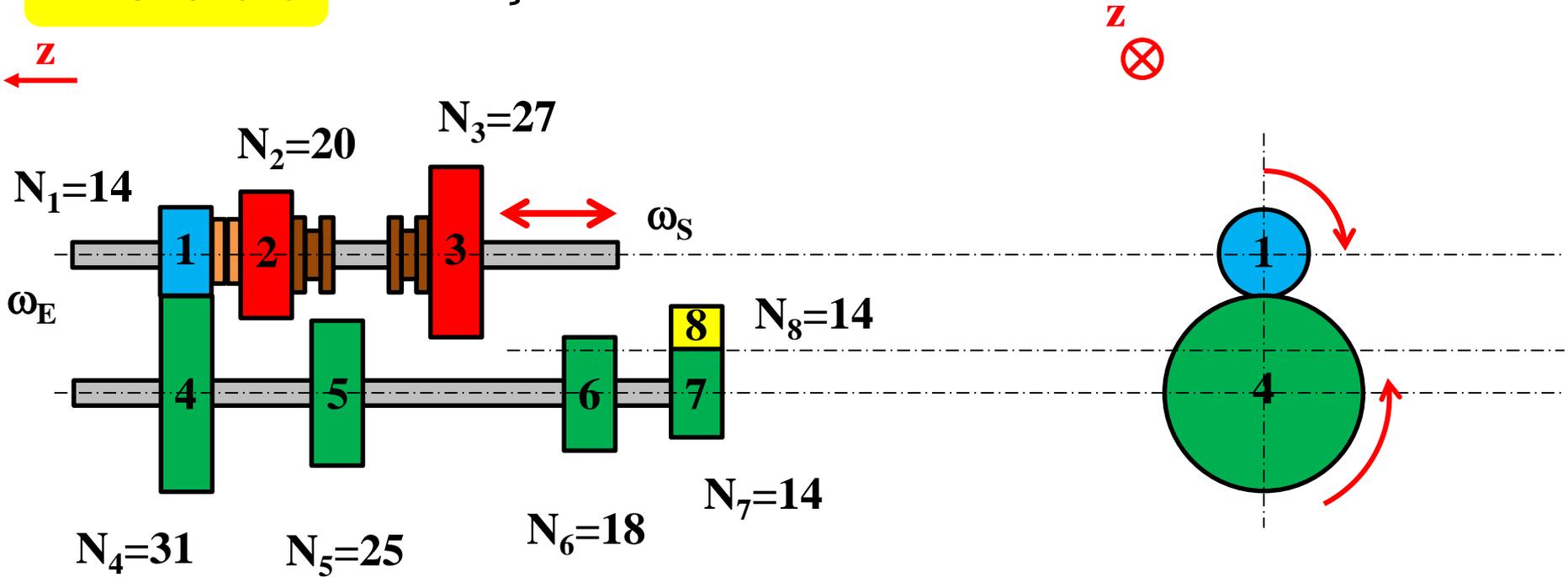
Dentes de enbreagem





Exercício

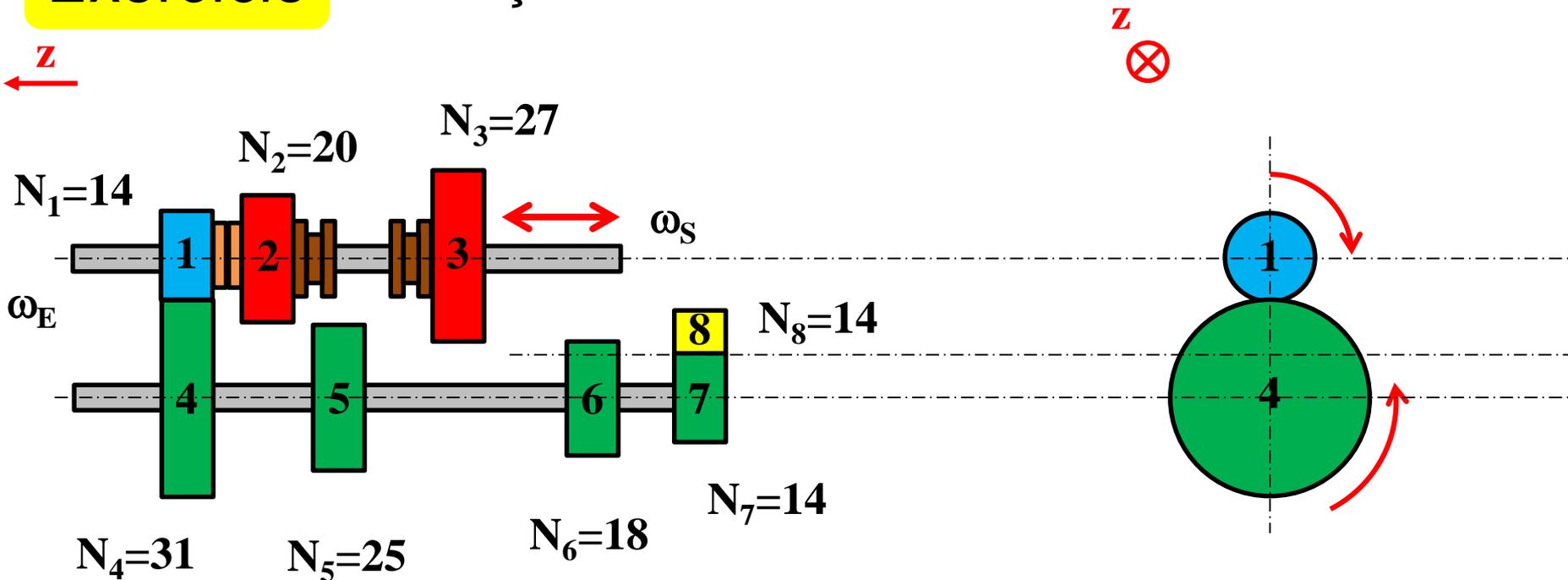
Situação A: 1 com 2





Exercício

Situação A: 1 com 2



$$\omega_1 = \omega_3$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\omega_S}{\omega_E} = 1$$

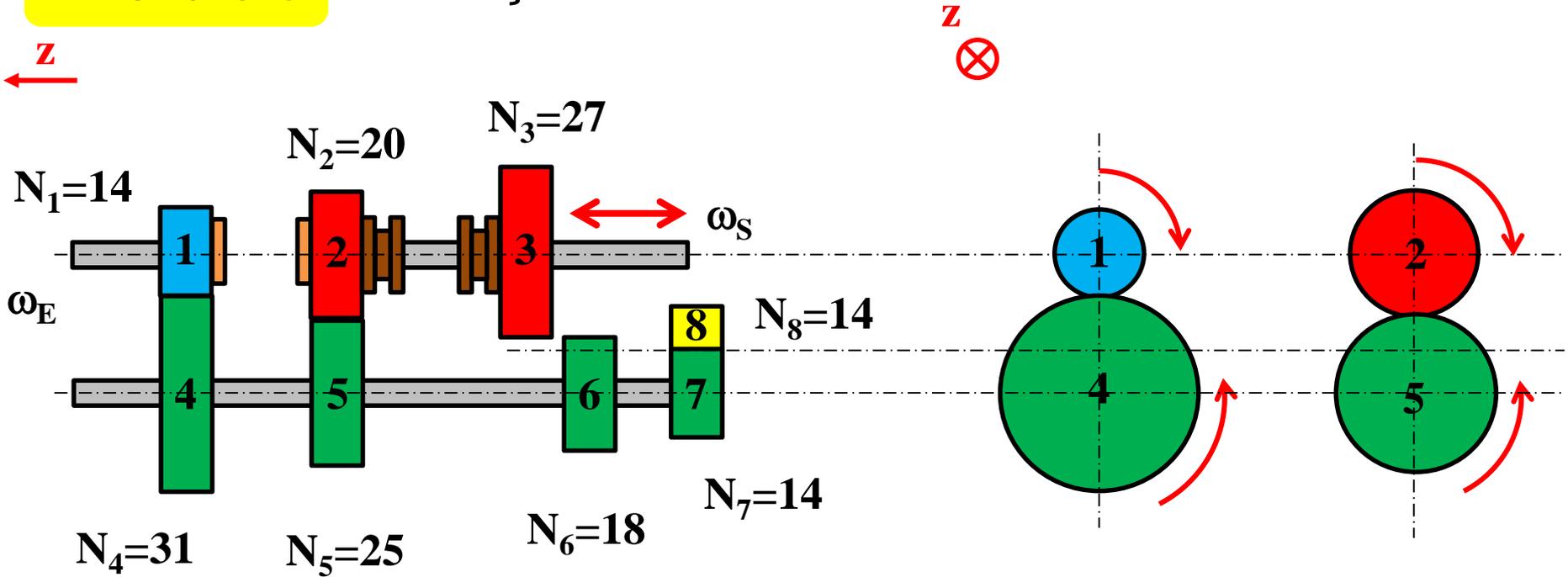


Trens de engrenagem



Exercício

Situação B: 2 com 5



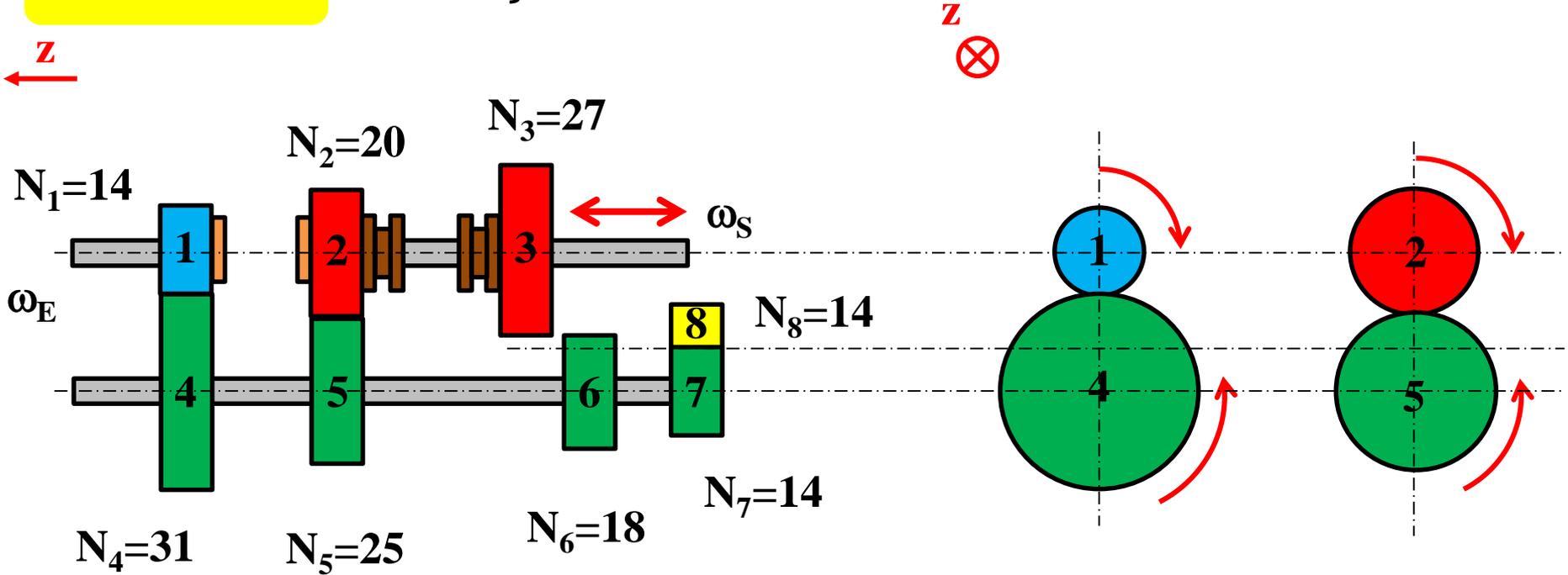


Trens de engrenagem



Exercício

Situação B: 2 com 5

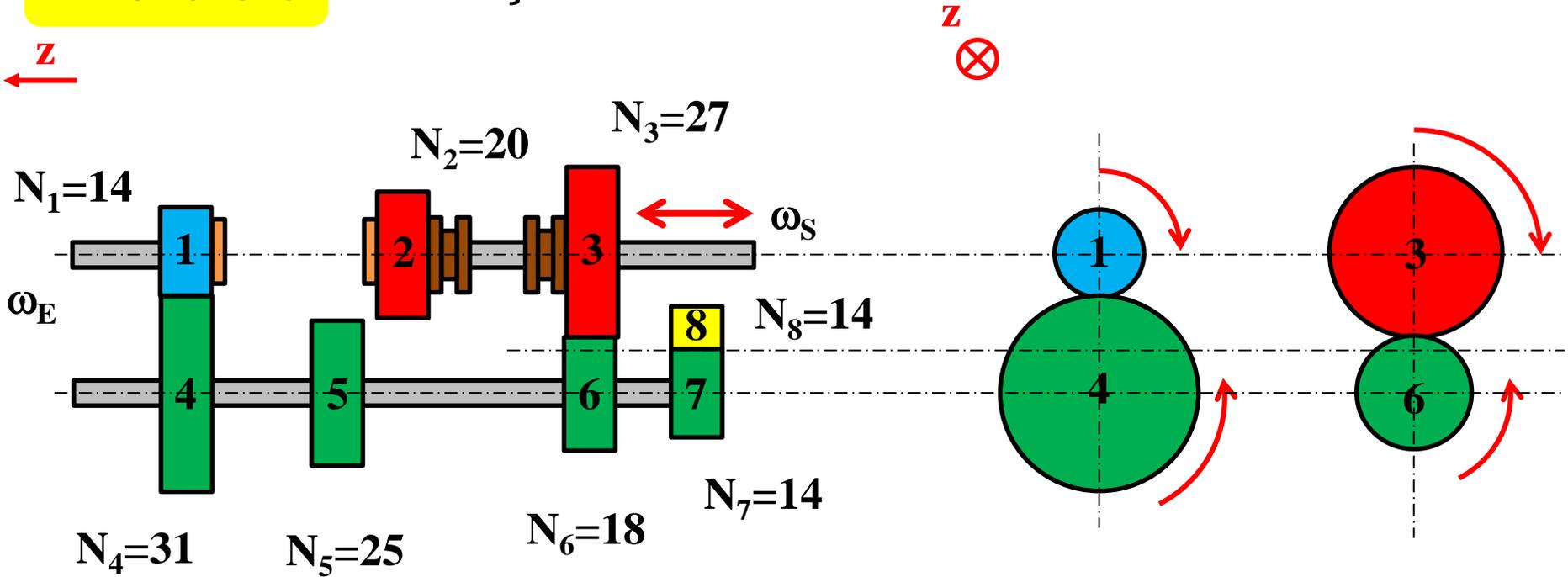


$$\left. \begin{aligned} \frac{-\omega_4}{\omega_1} &= \frac{N_1}{N_4} \\ \frac{\omega_2}{-\omega_5} &= \frac{N_5}{N_2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -\omega_4 &= -\omega_5 \\ \left(\frac{-\omega_4}{\omega_1} \right) \left(\frac{\omega_2}{-\omega_5} \right) &= \frac{N_1 N_5}{N_4 N_2} \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} &= \frac{N_1 N_5}{N_4 N_2} \rightarrow \frac{\omega_S}{\omega_E} = 0,56 \end{aligned}$$



Exercício

Situação C: 3 com 6



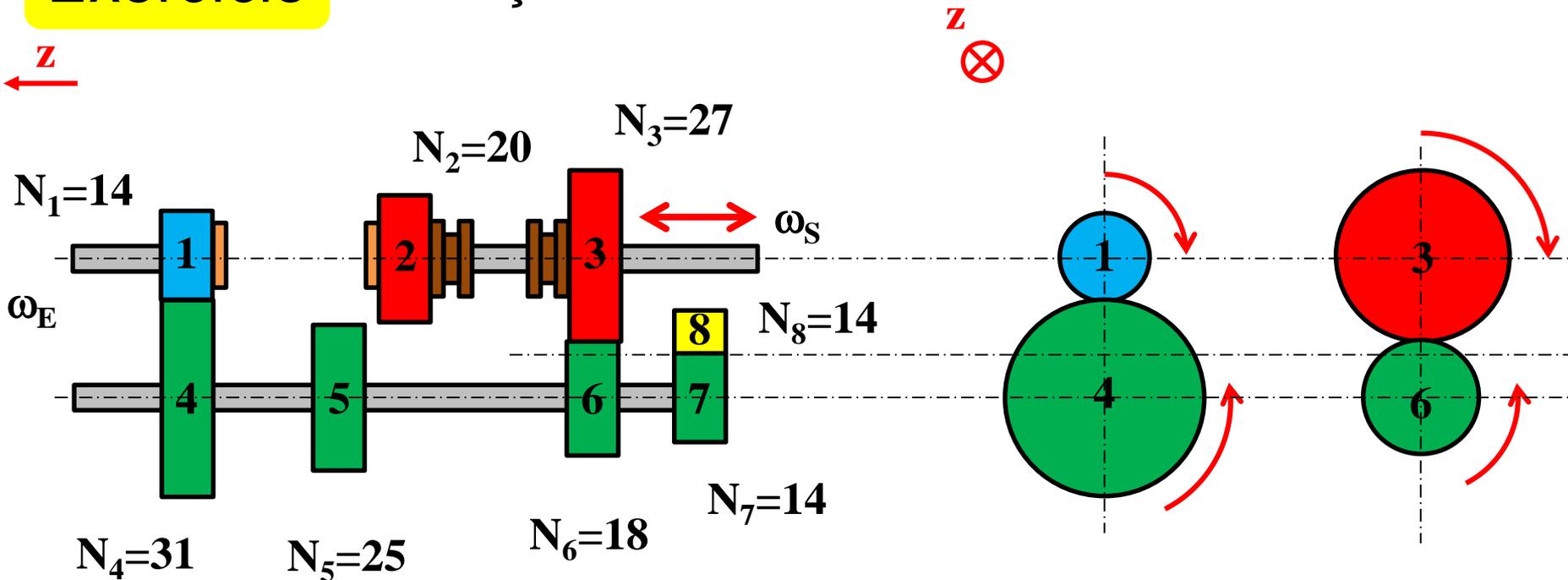


Trens de engrenagem



Exercício

Situação C: 3 com 6



$$\left. \begin{aligned} \frac{-\omega_4}{\omega_1} &= \frac{N_1}{N_4} \\ \omega_3 &= -\omega_6 \\ \frac{\omega_3}{-\omega_6} &= \frac{N_6}{N_3} \end{aligned} \right\} \left(\frac{-\omega_4}{\omega_1} \right) \left(\frac{\omega_3}{-\omega_6} \right) = \frac{N_1 N_6}{N_4 N_3}$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{N_1 N_6}{N_4 N_3} \rightarrow \frac{\omega_S}{\omega_E} = 0,30$$

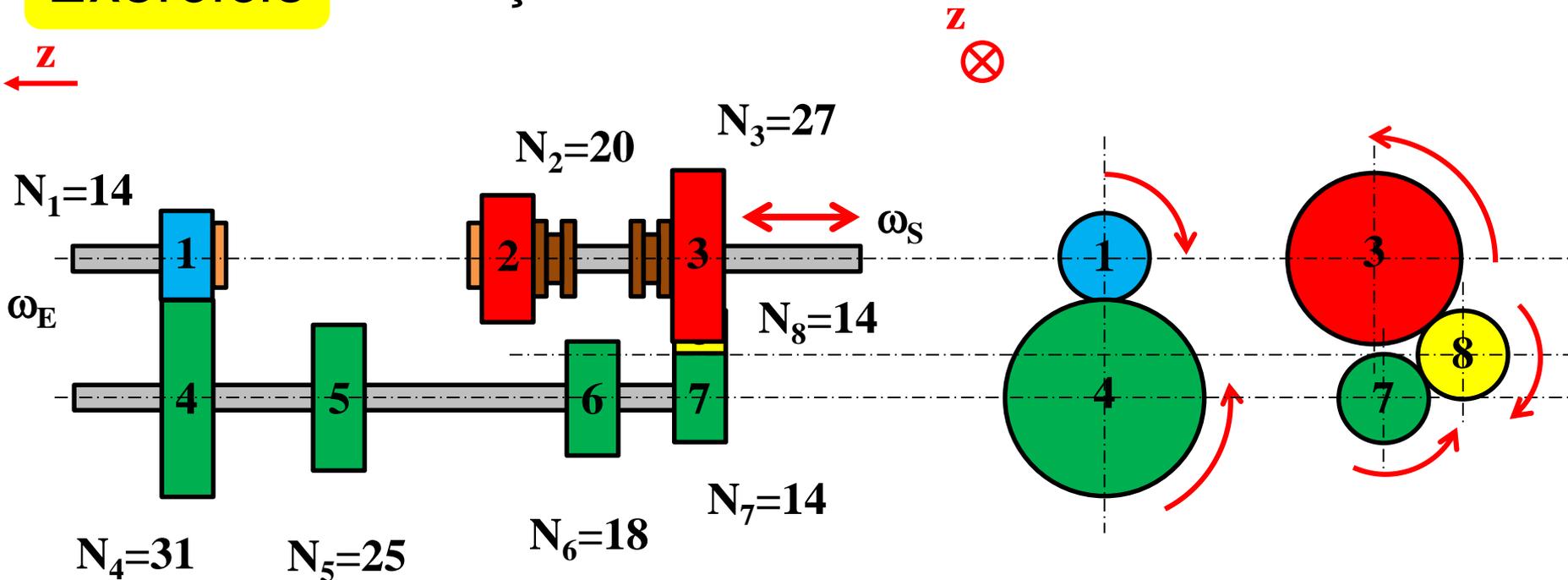


Trens de engrenagem



Exercício

Situação D: 3 com 8



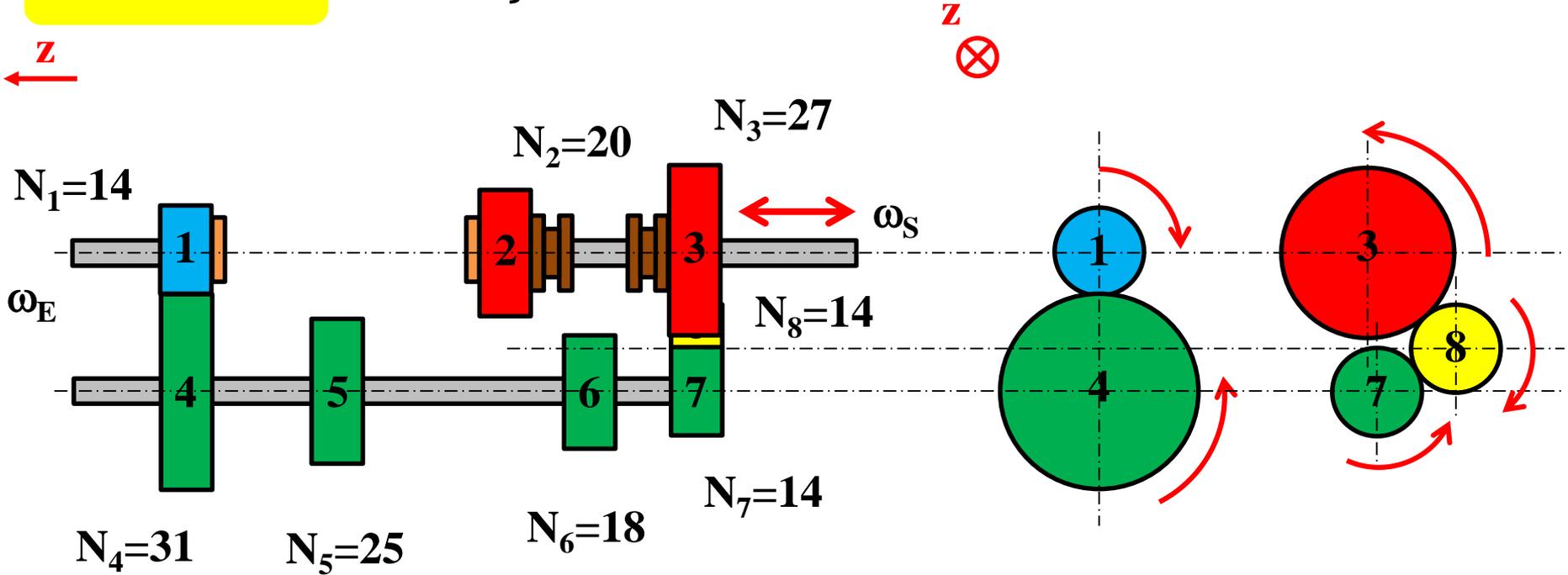


Trens de engrenagem



Exercício

Situação D: 3 com 8



$$\frac{-\omega_4}{\omega_1} = \frac{N_1}{N_4}$$

$$-\omega_4 = -\omega_7$$

$$\frac{\omega_8}{-\omega_7} = \frac{N_7}{N_8}$$

$$\frac{-\omega_3}{\omega_8} = \frac{N_8}{N_3}$$

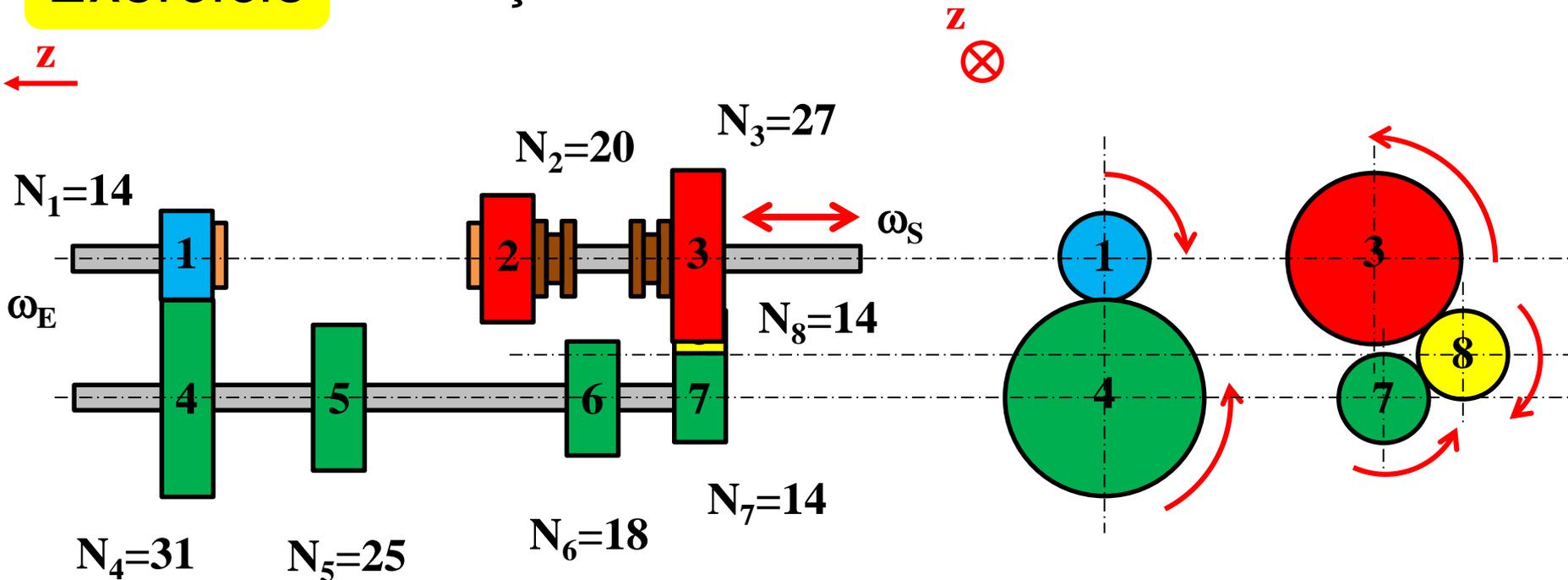


Trens de engrenagem



Exercício

Situação D: 3 com 8



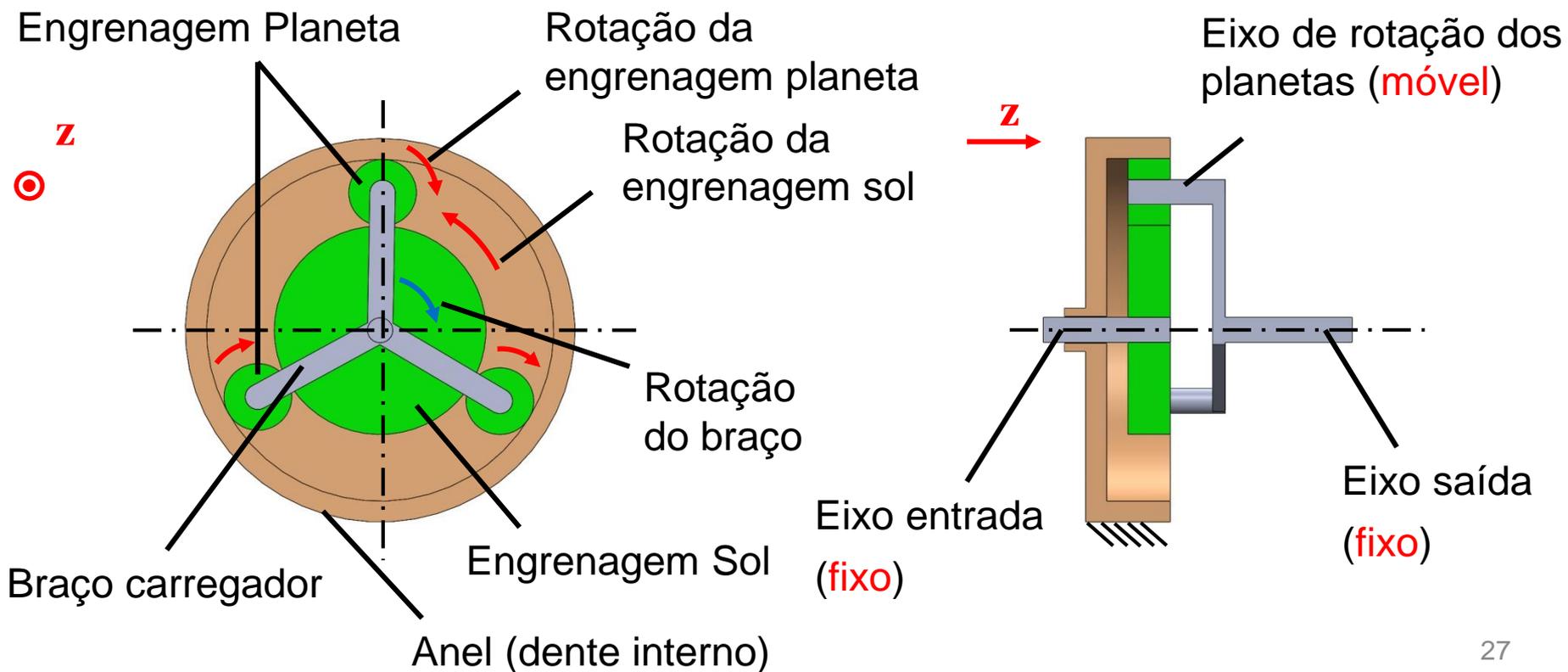
$$\left(\frac{-\omega_4}{\omega_1} \right) \left(\frac{\omega_8}{-\omega_7} \right) \left(\frac{-\omega_3}{\omega_8} \right) = \frac{N_1 N_7 N_8}{N_4 N_8 N_3}$$

$$\frac{-\omega_3}{\omega_1} = \frac{N_1 N_7}{N_4 N_3} \rightarrow \frac{\omega_S}{\omega_E} = -0,23$$



Trem planetário

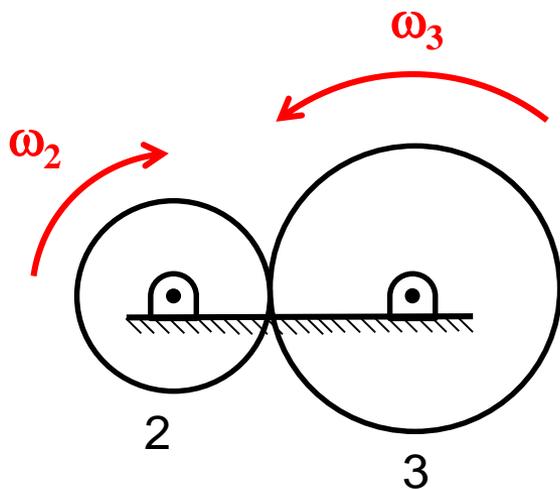
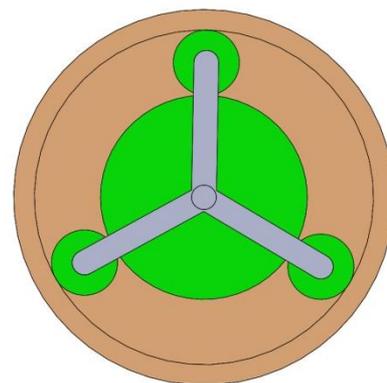
- Eixos são fixos e móveis
- Dois graus de liberdade



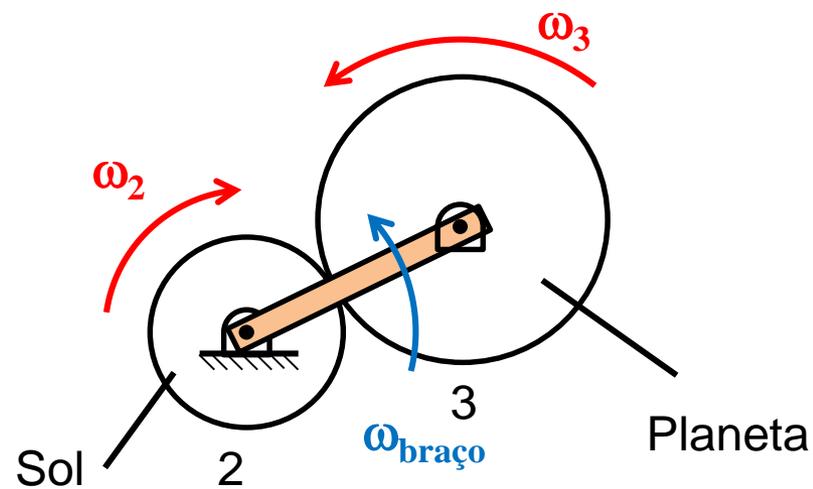


Trem planetário

- Eixos são fixos e móveis
- **Dois graus de liberdade**



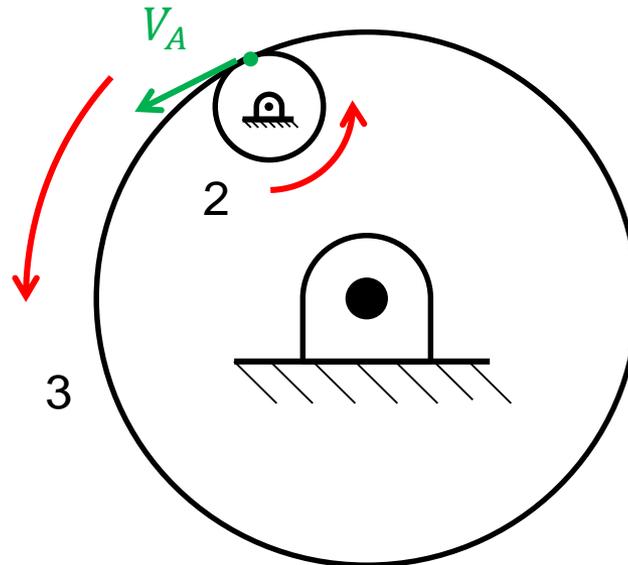
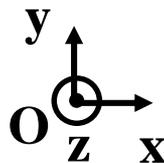
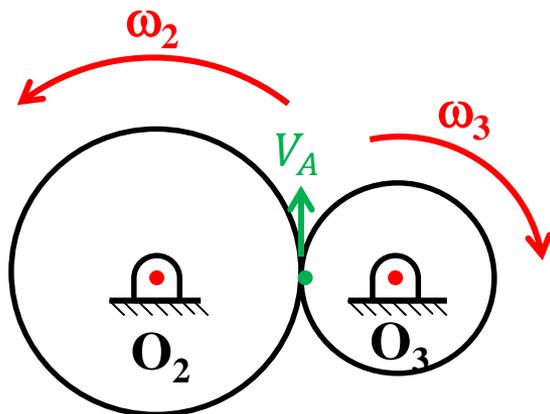
Um grau de liberdade



Dois graus de liberdade



Trem simples



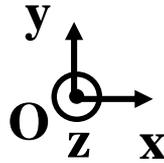
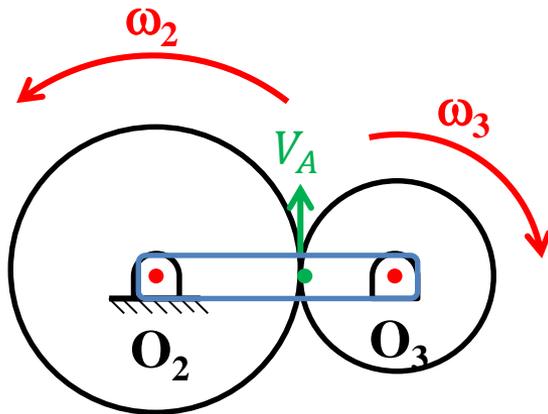
$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = -\frac{d_2}{d_3} = -\frac{N_2}{N_3}$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_3} = \frac{N_2}{N_3}$$

- Dentes externos → rotações opostas
- Dentes externo e interno → rotações iguais

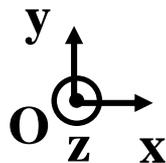
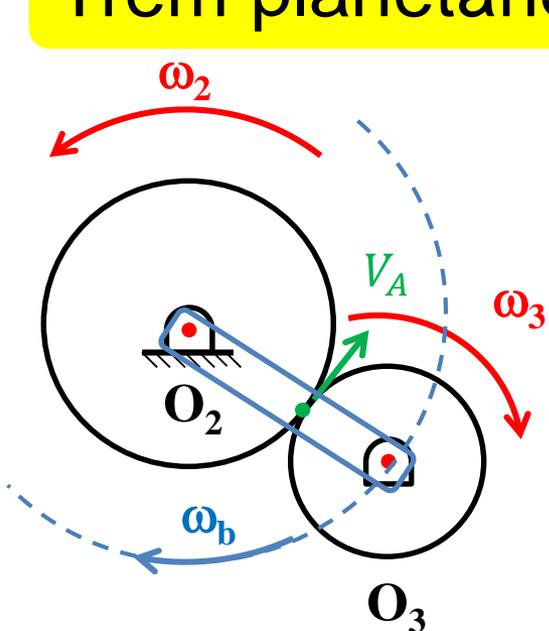


Trem planetário





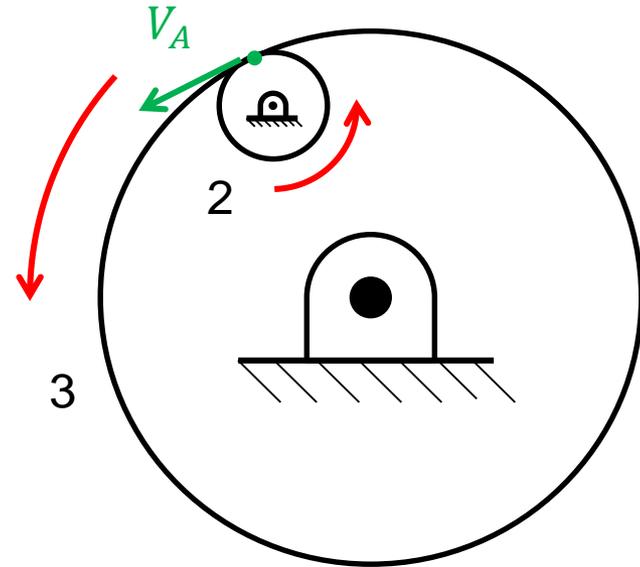
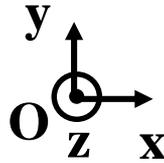
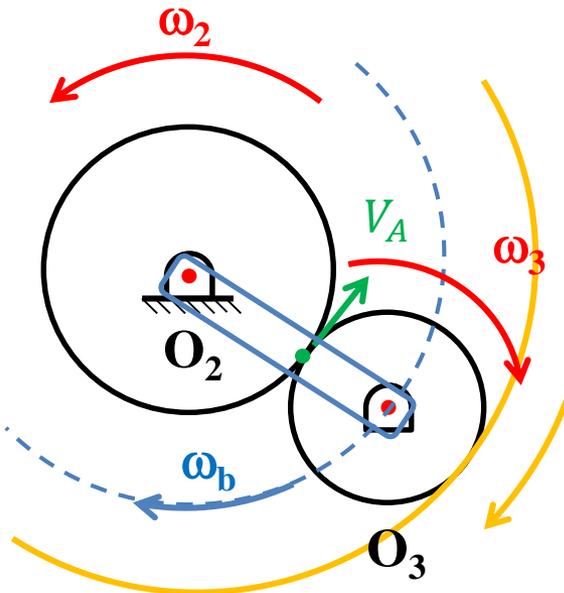
Trem planetário



- V_A é influenciada também pela rotação do braço (ω_b)
- Direção de rotação de ω_{planeta} oposta a de ω_{sol}



Trem planetário



- V_A é influenciada também pela rotação do braço (ω_b)
- Direção de rotação de ω_{planeta} oposta a de ω_{sol}
- Direção de rotação de ω_{planeta} igual a de ω_{anel}



Trem planetário Princípio



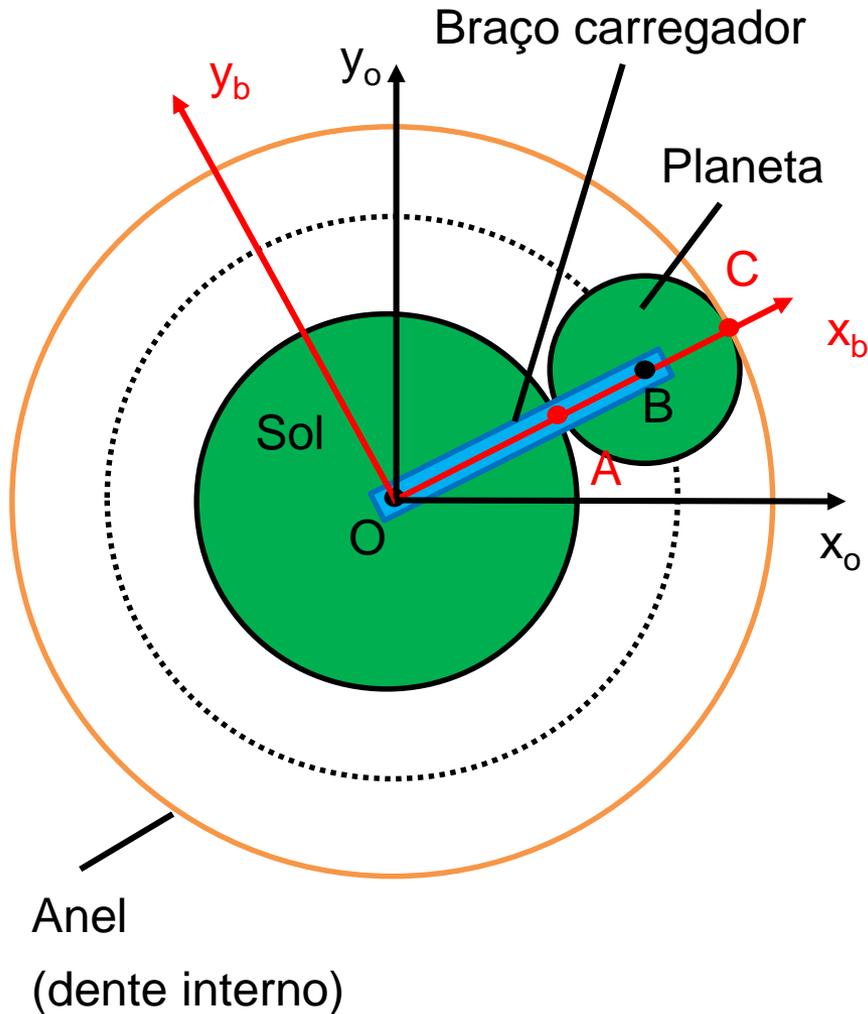
$$v_{P/T} = v_{P/O} + v_{O/T}$$



$$v_{P/T} = -v_{P/O} + v_{O/T}$$

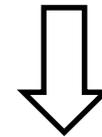


Trem planetário



- Sistema fixo (X_O, Y_O, Z_O)
 - $\omega_{\text{sol}}, \omega_{\text{planeta}}, \omega_{\text{anel}}, \omega_{\text{braço}}$
- Sistema móvel (X_b, Y_b, Z_b)
 - $\omega_{s/b}, \omega_{p/b}, \omega_{a/b}$

$$v_{P/T} = v_{P/O} + v_{O/T}$$



$$\omega_s = \omega_{s/b} + \omega_b$$

$$\omega_p = \omega_{p/b} + \omega_b$$

$$\omega_a = \omega_{a/b} + \omega_b$$

OBS: s/b é sol em relação ao braço



Trem planetário

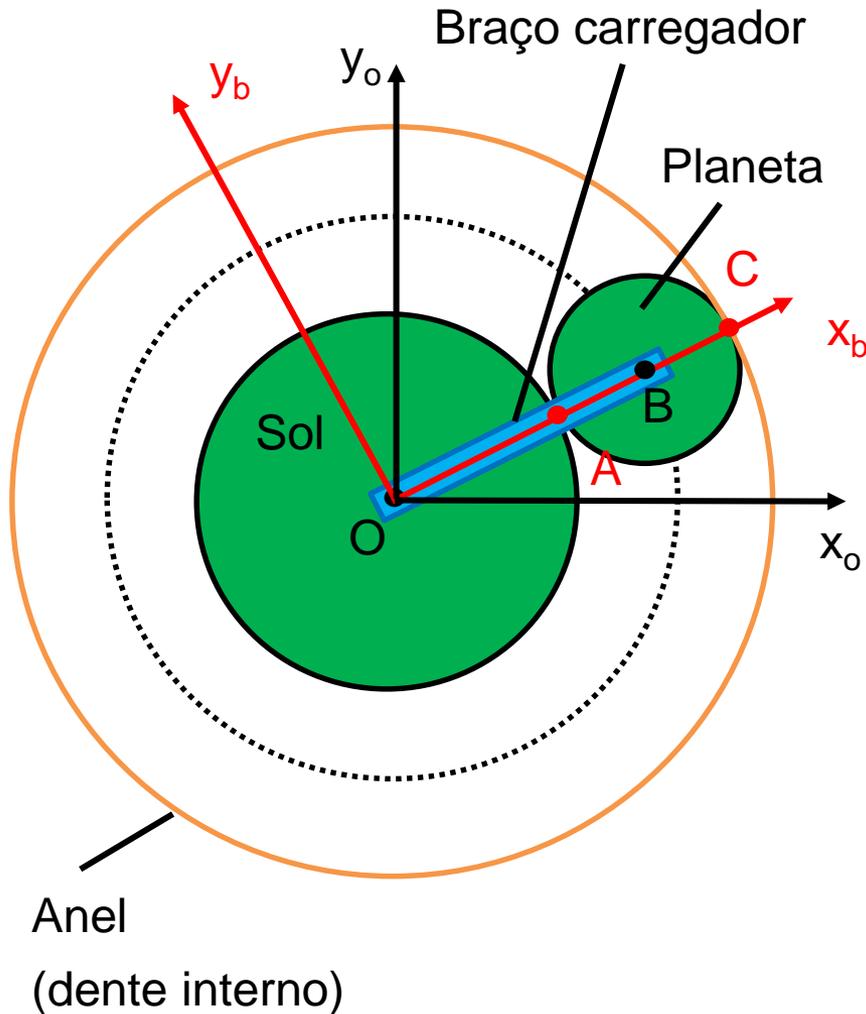
Planeta e sol

Relações nos dois sistemas

$$\omega_s = \omega_{s/b} + \omega_b$$

$$\omega_p = \omega_{p/b} + \omega_b$$

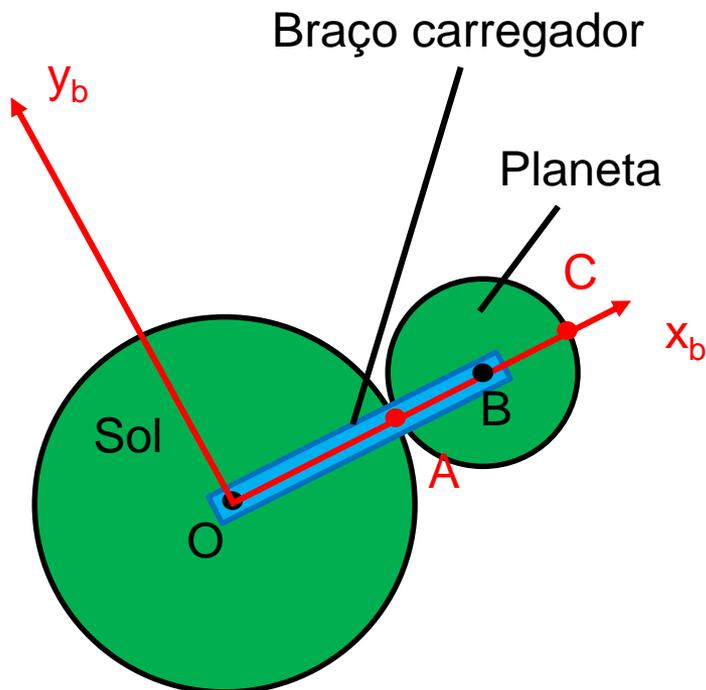
$$\omega_a = \omega_{a/b} + \omega_b$$





Trem planetário

Planeta e sol



Relações nos dois sistemas

$$\omega_s = \omega_{s/b} + \omega_b$$

$$\omega_p = \omega_{p/b} + \omega_b$$

$$\omega_a = \omega_{a/b} + \omega_b$$

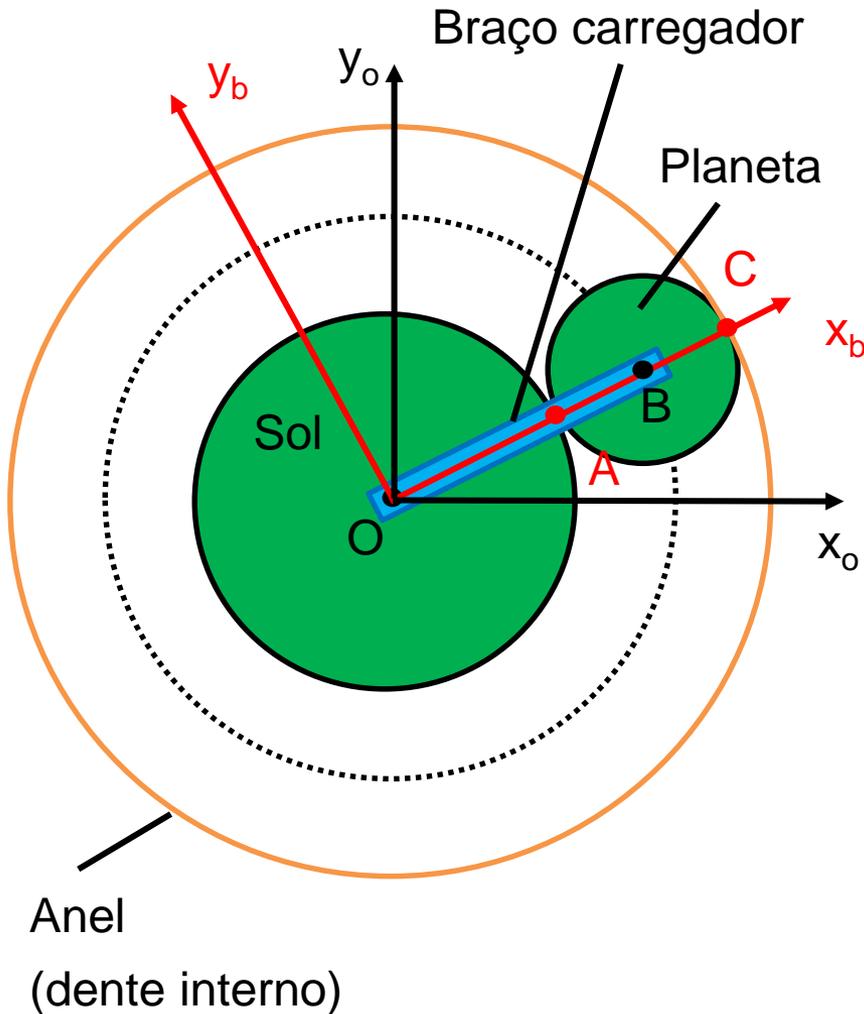
Observador no sistema móvel

$$\frac{\omega_{p/b}}{\omega_{s/b}} = - \frac{d_s}{d_p} = - \frac{N_s}{N_p}$$



Trem planetário

Planeta e sol



Relações nos dois sistemas

$$\omega_s = \omega_{s/b} + \omega_b$$

$$\omega_p = \omega_{p/b} + \omega_b$$

$$\omega_a = \omega_{a/b} + \omega_b$$

Observador no sistema móvel

$$\frac{\omega_{p/b}}{\omega_{s/b}} = -\frac{d_s}{d_p} = -\frac{N_s}{N_p}$$

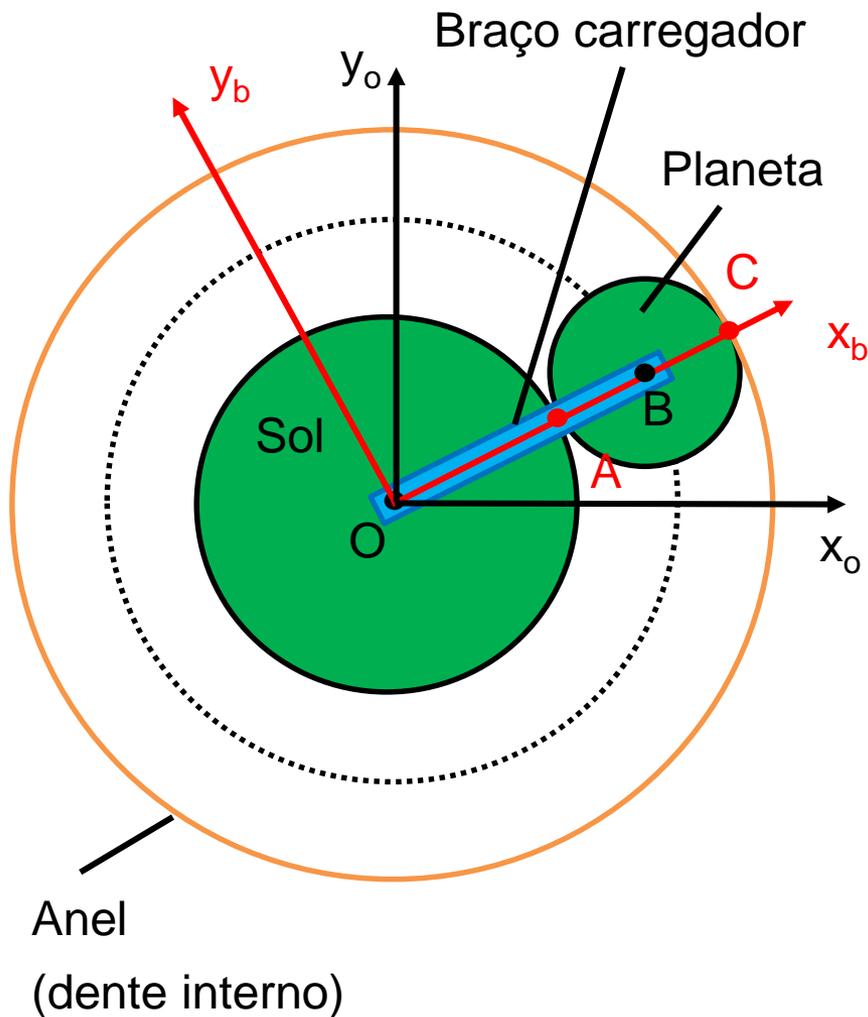
Observador no sistema fixo

$$\frac{\omega_p - \omega_b}{\omega_s - \omega_b} = -\frac{d_s}{d_p} = -\frac{N_s}{N_p}$$



Trem planetário

Anel e planeta



Relações nos dois sistemas

$$\omega_s = \omega_{s/b} + \omega_b$$

$$\omega_p = \omega_{p/b} + \omega_b$$

$$\omega_a = \omega_{a/b} + \omega_b$$

Observador no sistema móvel

$$\frac{\omega_{a/b}}{\omega_{p/b}} = + \frac{d_p}{d_a} = + \frac{N_p}{N_a}$$

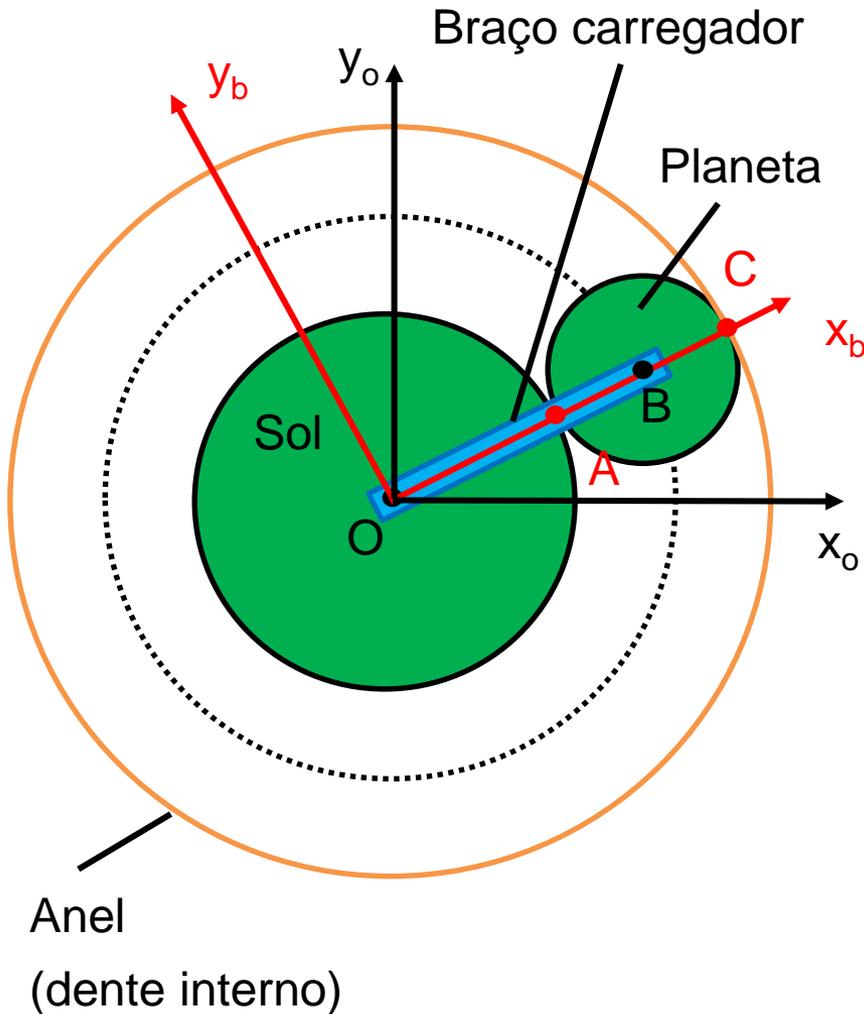
Observador no sistema fixo

$$\frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_p - \omega_b} = + \frac{d_p}{d_a} = + \frac{N_p}{N_a}$$



Trem planetário

Anel e sol



Relações nos dois sistemas

$$\omega_s = \omega_{s/b} + \omega_b$$

$$\omega_p = \omega_{p/b} + \omega_b$$

$$\omega_a = \omega_{a/b} + \omega_b$$

Observador no sistema móvel

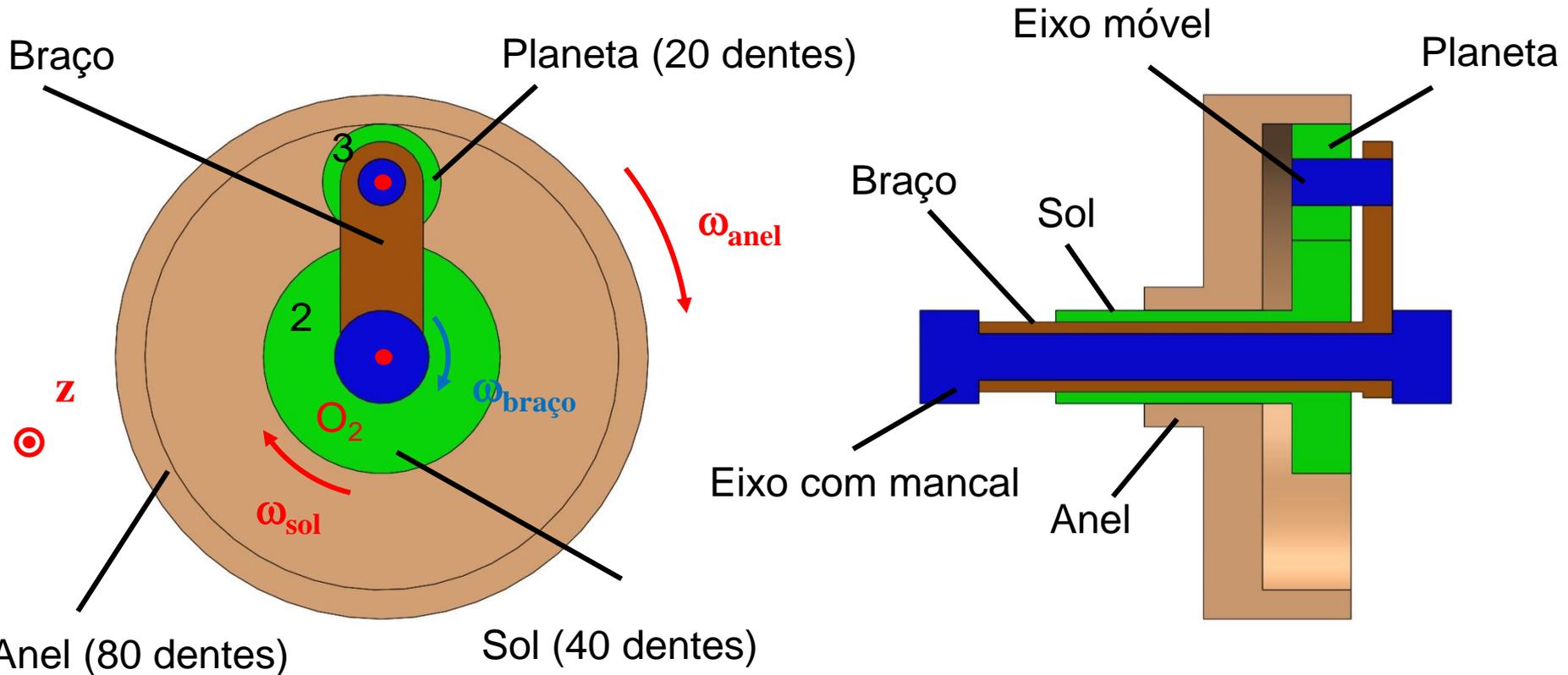
$$\frac{\omega_{a/b}}{\omega_{s/b}} = -\frac{d_s}{d_a} = -\frac{N_s}{N_a}$$

Observador no sistema fixo

$$\frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_s - \omega_b} = -\frac{d_s}{d_a} = -\frac{N_s}{N_a}$$



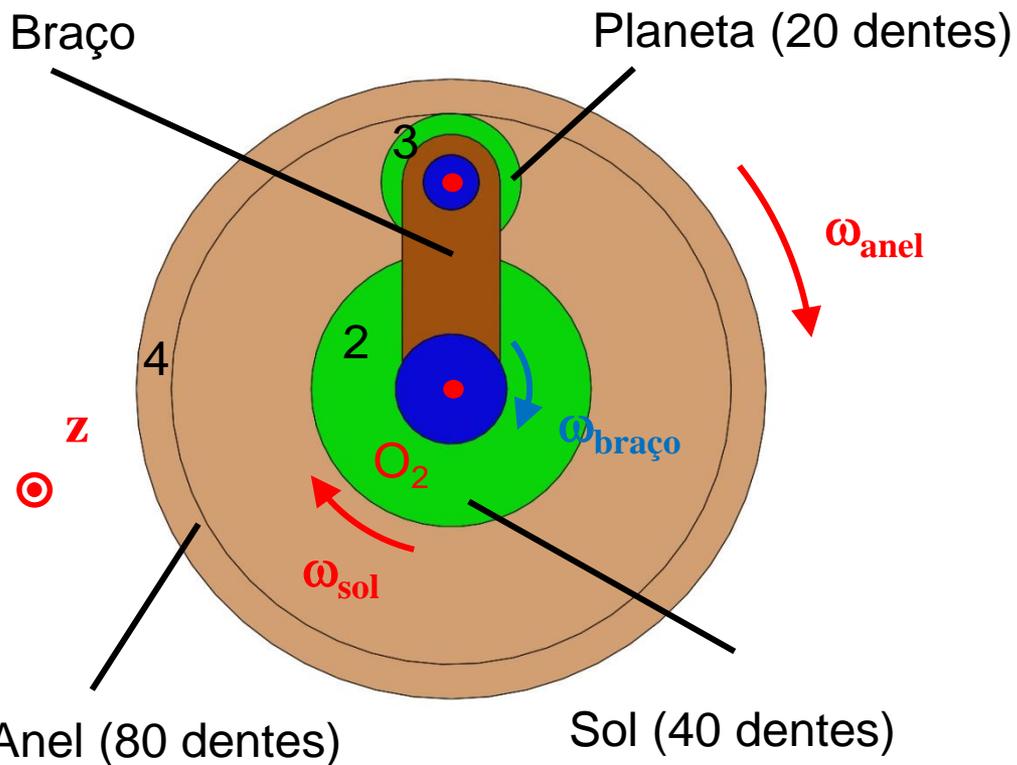
Exercício



- Entradas $\omega_{sol} = 100 \text{ rpm}$ e $\omega_{braço} = 200 \text{ rpm}$
- Saída ω_{anel}
- $\omega_{planeta} = ?$; $\omega_{anel} = ?$



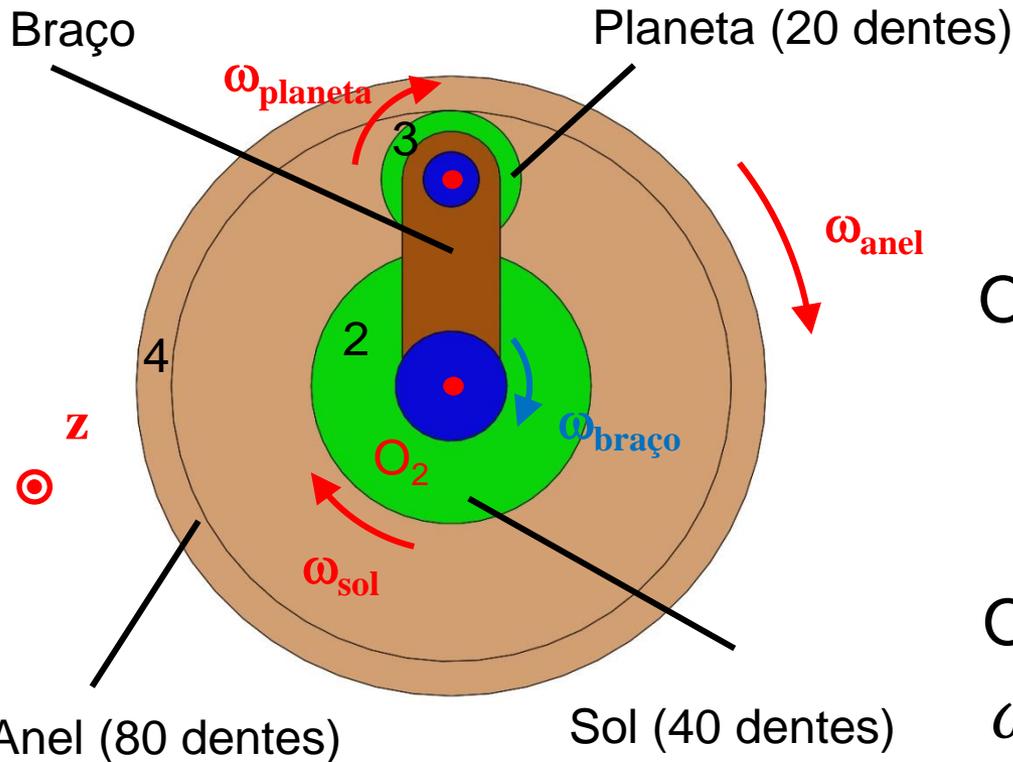
Exercício Entre planeta e sol



- $\omega_{sol} = 100$ rpm
- $\omega_{braço} = 200$ rpm



Exercício Entre planeta e sol



- $\omega_{\text{sol}} = 100 \text{ rpm}$
- $\omega_{\text{braço}} = 200 \text{ rpm}$

$$\omega_p = -400 \text{ rpm}$$

$$\omega_s = \omega_{s/b} + \omega_b$$

$$\omega_p = \omega_{p/b} + \omega_b$$

$$\omega_a = \omega_{a/b} + \omega_b$$

Observador no sistema móvel

$$\frac{\omega_{p/b}}{\omega_{s/b}} = -\frac{N_s}{N_p}$$

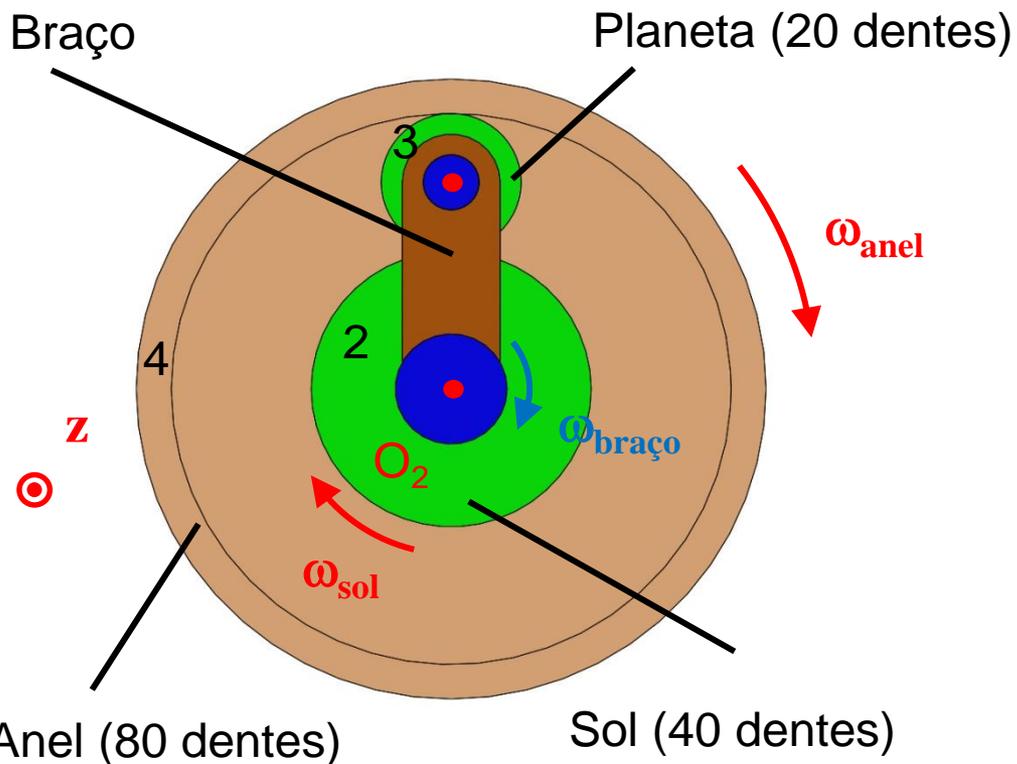
Observador no sistema fixo

$$\frac{\omega_p - \omega_b}{\omega_s - \omega_b} = -\frac{N_s}{N_p}$$

$$\frac{\omega_p - (-200)}{(-100) - (-200)} = -\frac{40}{20}$$



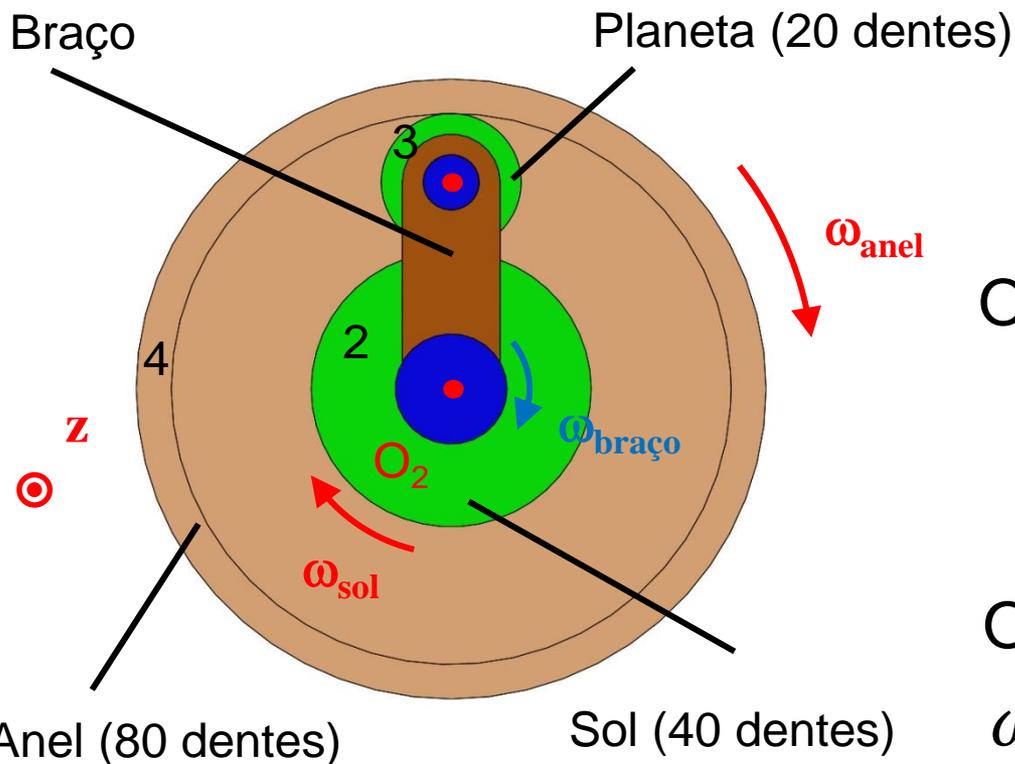
Exercício Entre anel e planeta



- $\omega_{sol} = 100 \text{ rpm}$
- $\omega_{braço} = 200 \text{ rpm}$



Exercício Entre anel e planeta



- $\omega_{sol} = 100 \text{ rpm}$
- $\omega_{braço} = 200 \text{ rpm}$

$$\omega_a = -250 \text{ rpm}$$

$$\omega_s = \omega_{s/b} + \omega_b$$

$$\omega_p = \omega_{p/b} + \omega_b$$

$$\omega_a = \omega_{a/b} + \omega_b$$

Observador no sistema móvel

$$\frac{\omega_{a/b}}{\omega_{p/b}} = \frac{N_p}{N_a}$$

Observador no sistema fixo

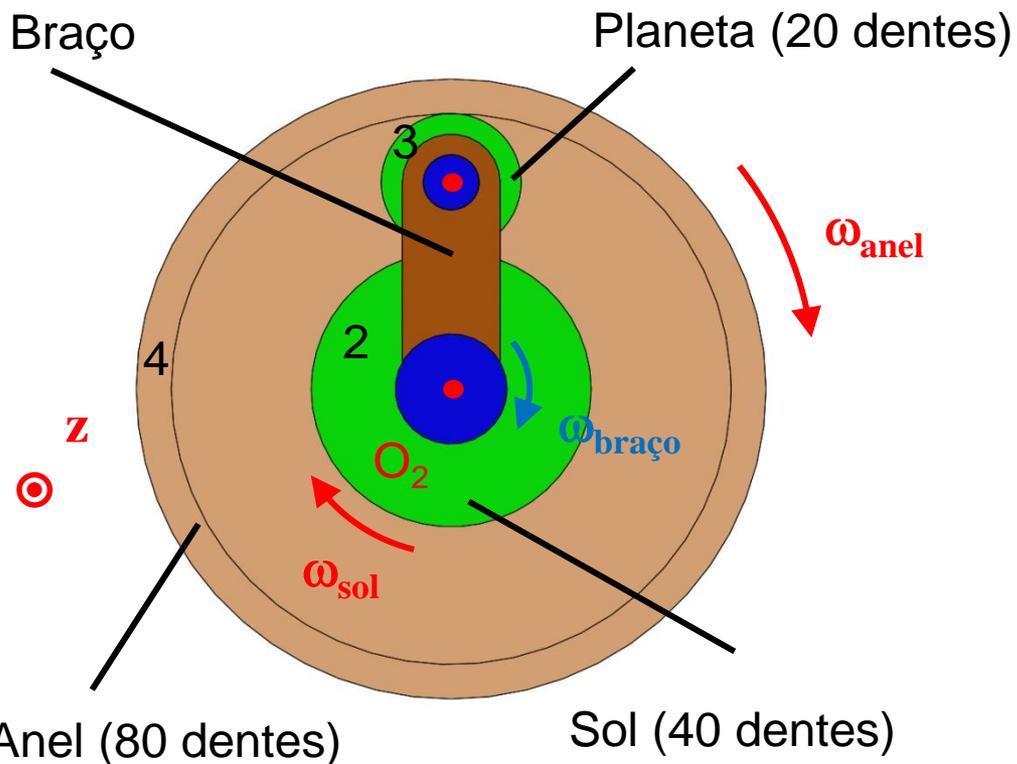
$$\frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_p - \omega_b} = \frac{N_p}{N_a}$$

$$\frac{\omega_a - (-200)}{(-400) - (-200)} = \frac{20}{80}$$



Exercício

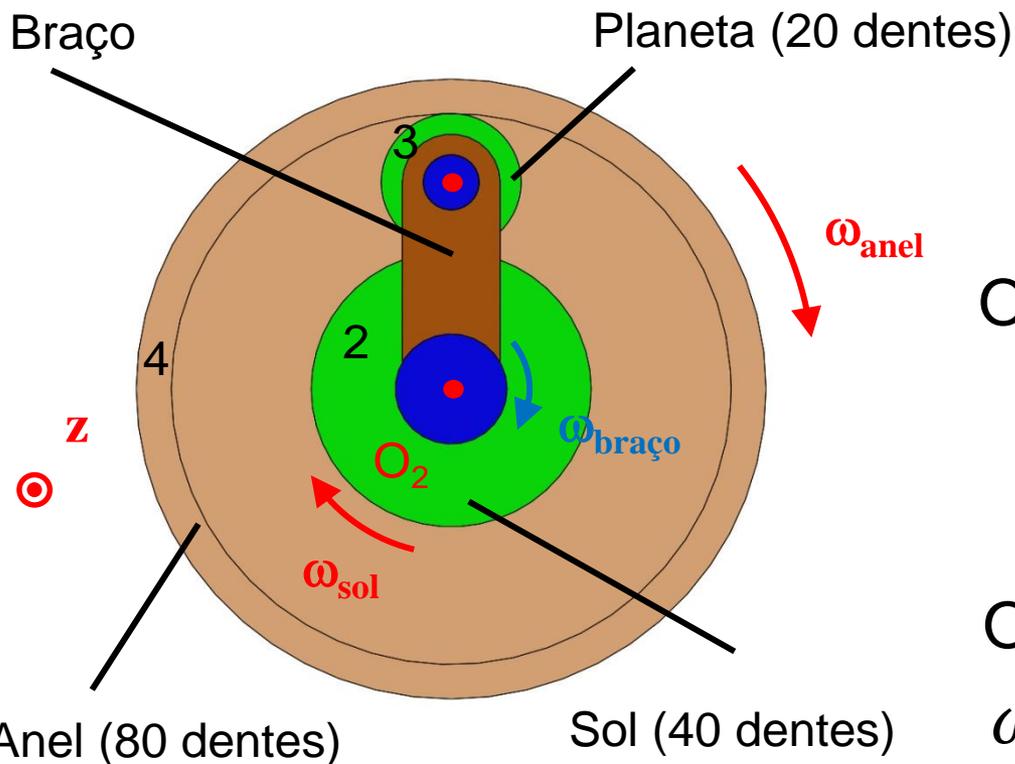
Entre anel e sol



- $\omega_{sol} = 100 \text{ rpm}$
- $\omega_{braço} = 200 \text{ rpm}$



Exercício Entre anel e sol



- $\omega_{sol} = 100 \text{ rpm}$
- $\omega_{braço} = 200 \text{ rpm}$

$$\omega_a = -250 \text{ rpm}$$

$$\omega_s = \omega_{s/b} + \omega_b$$

$$\omega_p = \omega_{p/b} + \omega_b$$

$$\omega_a = \omega_{a/b} + \omega_b$$

Observador no sistema móvel

$$\frac{\omega_{a/b}}{\omega_{s/b}} = -\frac{N_s}{N_a}$$

Observador no sistema fixo

$$\frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_s - \omega_b} = -\frac{N_s}{N_a}$$

$$\frac{\omega_a - (-200)}{(-100) - (-200)} = -\frac{40}{80}$$