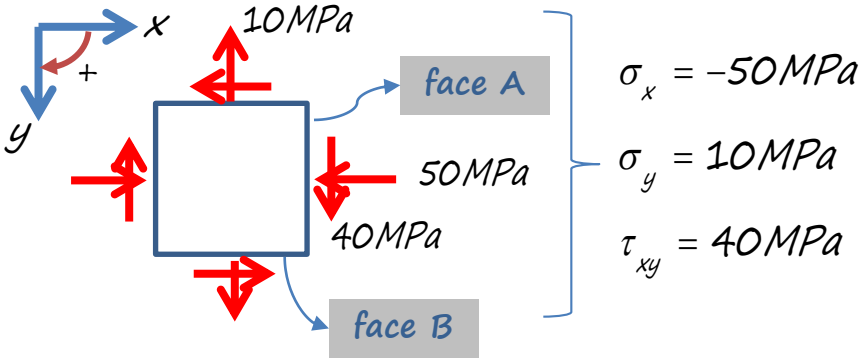
Exercício 02 (GABARITO)

Para um ponto na superfície de um sólido ilustrado abaixo sob estado duplo de tensões, calcule as quantidades a seguir com base no círculo de Mohr:

a) Tensões agindo em um plano inclinado a um ângulo de 45°
b) As tensões principais
c) Tensões de cisalhamento máximas

Obs: desenhar os resultados obtidos nos elementos infinitesimais



$\sigma_x = -50MPa$

$\sigma_y = 10MPa$

$\tau_{xy} = 40MPa$

Construção do Círculo de Morh:

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-50 + 10}{2} = -20MPa$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-50 - 10}{2}\right)^2 + 40^2} = 50MPa$$

Ponto A (face A): $\theta = 0°$

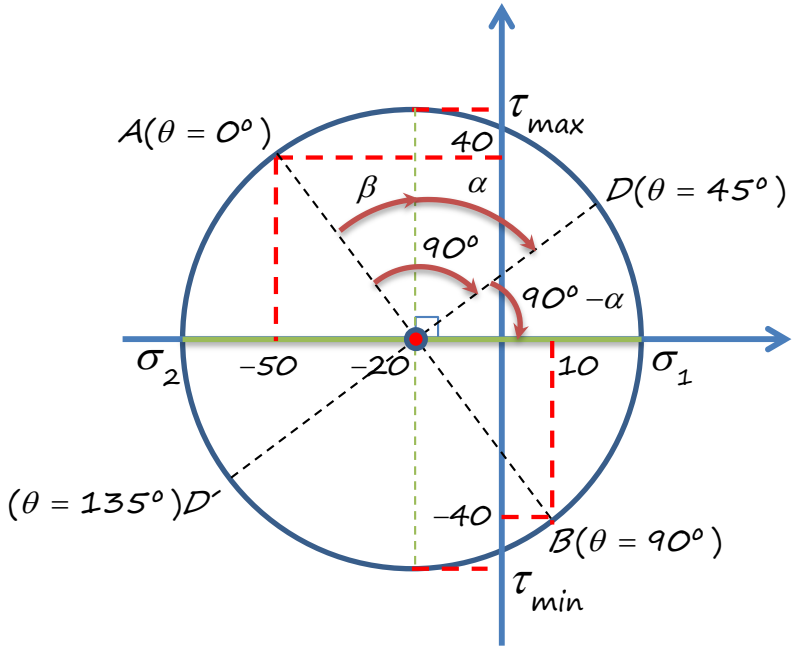
$\sigma_x = -50MPa$

$\tau_{xy} = 40MPa$

Ponto B (face B): $\theta = 90°$

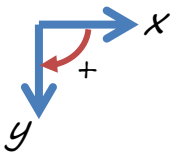
$\sigma_y = 10MPa$

$\tau_{xy} = -40MPa$



Exercício 02 (GABARITO)

a) Tensões agindo em um plano inclinado a um ângulo de 45°



- $\theta = 45° \rightarrow$ Ponto D $\rightarrow 2\theta = 90°$

$$tg\beta = \frac{50-20}{40} = 0{,}75 \Rightarrow \beta = 36{,}87°$$

$$\alpha = 90° - \beta = 90° - 36{,}87° \Rightarrow \alpha = 53{,}13°$$

$$\sigma_{(\theta=45°)} = 50 \cdot sen(\alpha) - 20 = 50 \cdot sen(53{,}13°) - 20 = 20MPa$$

$$\sigma_{(\theta=45°)} = 50 \cdot \cos(\alpha) = 50 \cdot \cos(53{,}13°) = 30MPa$$

- De maneira análoga para D´ $\rightarrow \theta = 45° + 90° = 135°$ (ou $2\theta = 270°$)

$$\sigma_{(\theta=45°)} = -50 \cdot sen(\alpha) - 20 = -50 \cdot sen(53{,}13°) - 20 = -60MPa$$

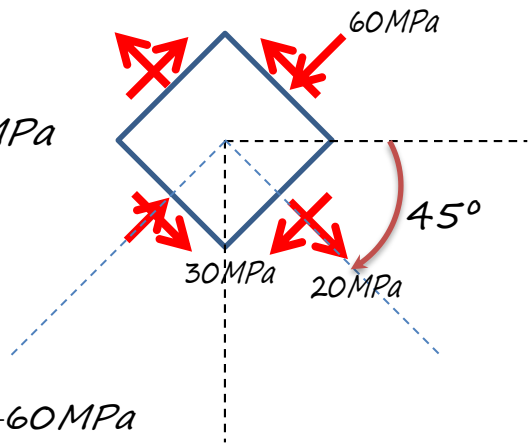
$$\sigma_{(\theta=45°)} = -50 \cdot \cos(\alpha) = -50 \cdot \cos(53{,}13°) = -30MPa$$

Utilizando as equações:

- Ponto D: $\theta = 45°$ (ou $2\theta = 90°$)

$$\sigma_{\theta=15°} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{-20MPa} + \underbrace{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}_{-30MPa} \underbrace{\cos 2\theta}_{0} + \underset{40}{\tau_{xy}} \underbrace{sen2\theta}_{1} = 20MPa$$

$$\tau_{\theta=15°} = -\underbrace{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)}_{-30MPa} \underbrace{sen2\theta}_{1} + \underset{40}{\tau_{xy}} \underbrace{\cos 2\theta}_{0} = 30MPa$$



- Ponto D´: $\theta = 135°$ (ou $2\theta = 270°$)

$$\sigma_{\theta=15°} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{-20MPa} + \underbrace{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}_{-30MPa} \underbrace{\cos 2\theta}_{0} + \underset{40}{\tau_{xy}} \underbrace{sen2\theta}_{-1} = -60MPa$$

$$\tau_{\theta=15°} = -\underbrace{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)}_{-30MPa} \underbrace{sen2\theta}_{-1} + \underset{40}{\tau_{xy}} \underbrace{\cos 2\theta}_{0} = -30MPa$$

Exercício 02 (GABARITO)

b) Tensões principais

$$\sigma_1 = Raio - 20 = 50 - 20 = 30MPa$$

$$\sigma_2 = -Raio - 20 = -50 - 20 = -70MPa$$

$$2\theta_{P1} = 90^o + \beta = 90^o + 36,87^o = 126,87^o \Rightarrow \theta_{P1} = 63,4^o$$

$$2\theta_{P2} = 126,87 + 180^o \Rightarrow \theta_{P2} = 153,4^o$$

Utilizando as equações:

$$tg2\theta_{p1} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 40}{-50 - 10} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 2\theta_{p1} = -53,13^o \text{ ou } 126,87^o$$

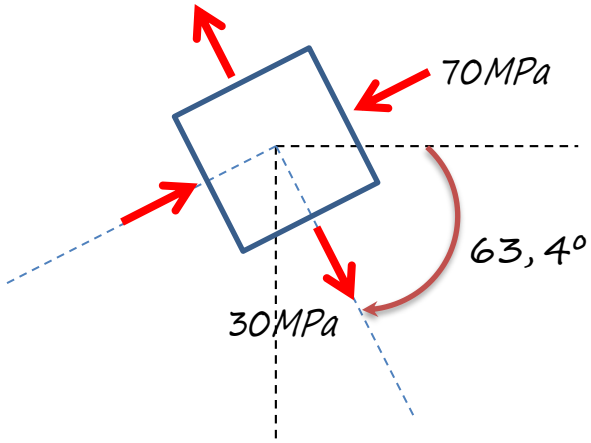
$$2\theta_{p1} = 126,87^o \quad e \quad \theta_{p1} = 63,4^o$$

$$2\theta_{p2} = 306,87^o \quad e \quad \theta_{p2} = 153,4^o$$

Substituindo nas equações de transformação:

$$\sigma_{\theta=63,4^o} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{-20MPa} + \underbrace{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}_{-30MPa} \underbrace{\cos 2\theta}_{-0,6} + \underbrace{\tau_{xy}}_{40MPa} \underbrace{sen2\theta}_{0,8} = 30MPa$$

$$\sigma_{\theta=153,4^o} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{-20MPa} + \underbrace{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}_{-30MPa} \underbrace{\cos 2\theta}_{0,6} + \underbrace{\tau_{xy}}_{40MPa} \underbrace{sen2\theta}_{-0,8} = -70MPa$$



Exercício 02 (GABARITO)

b) Tensões de cisalhamento máximas

$\tau_{máx} = Raio = 50MPa$

$2\theta_{s1} = 90^{o} - 53,13^{o} = 36,86^{o} \Rightarrow \theta_{s1} = 18,43^{o}$

Utilizando as equações:

$$\tau_{máx} = -\tau_{mín} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}} = 50MPa$$

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -20MPa$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{(-50) - 10}{2 \times 40} = 0,75$$

$$\Rightarrow 2\theta_s = 36,86^{o} \Rightarrow \theta_s = 18,43^{o}$$