

PEF-5916

Dinâmica e Estabilidade das Estruturas

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli

Equações de perturbação

Solução não perturbada: $y_r = y_r^0, \quad r = 1, 2, \dots, 2n$

Solução perturbada: $y_r = y_r^0 + \delta y_r(t), \quad r = 1, 2, \dots, 2n$

$$\delta \dot{y}_r = g_r(y_1^0 + \delta y_1, y_2^0 + \delta y_2, \dots, y_{2n}^0 + \delta y_{2n}) - \delta \dot{y}_r^0$$

$$\delta \dot{y}_r = f_r(\delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_{2n})$$

$$\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\delta \mathbf{y})$$

$$\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{y} + \mathbf{N}(\delta \mathbf{y}) \quad \text{com} \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \right|_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{N}(\delta \mathbf{y}, t) = \mathbf{f}(\delta \mathbf{y}) - \mathbf{A} \delta \mathbf{y}$$

Observação: a solução não perturbada é caracterizada por

$$\delta \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Estabilidade Liapunov

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que,
se $\|\delta \mathbf{y}(0)\| < \delta(\varepsilon)$, então $\|\delta \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$ para $t > 0$

Métodos de Liapunov:

Primeiro Método (método indireto)

Segundo Método (método direto)

Segundo Método de Liapunov

Teorema 6 (Liapunov): Se existir uma função real e diferenciável $F(\delta \mathbf{y})$, chamada função de Liapunov, que satisfaça na vizinhança da origem a:

$$F(\delta \mathbf{y}) \geq 0, \quad \forall \delta \mathbf{y}$$

$$F(\delta \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \delta \mathbf{y} = 0$$

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial(\delta \mathbf{y})} \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{y})}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial(\delta \mathbf{y})} \cdot \mathbf{f}(\delta \mathbf{y}) \leq 0$$

então a solução não perturbada $\mathbf{y}^0(t)$ é estável.

Segundo Método de Liapunov

Teorema 7 (Liapunov): Se existir uma função real e diferenciável $F(\delta \mathbf{y})$, chamada função de Liapunov, que satisfaça na vizinhança da origem a:

$$F(\delta \mathbf{y}) \geq 0, \quad \forall \delta \mathbf{y}$$

$$F(\delta \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \delta \mathbf{y} = 0$$

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial(\delta \mathbf{y})} \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{y})}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial(\delta \mathbf{y})} \cdot \mathbf{f}(\delta \mathbf{y}) < 0$$

então a solução não perturbada $\mathbf{y}^0(t)$ é assintoticamente estável.

Segundo Método de Liapunov

Teorema 8 (Chetayev): Se existir uma função real e diferenciável $F(\delta \mathbf{y})$, chamada função de Liapunov, tal que:

$$1) \quad F(\delta \mathbf{y}) \geq 0, \quad \forall \delta \mathbf{y}$$

$$2) \quad F(\delta \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \delta \mathbf{y} = 0$$

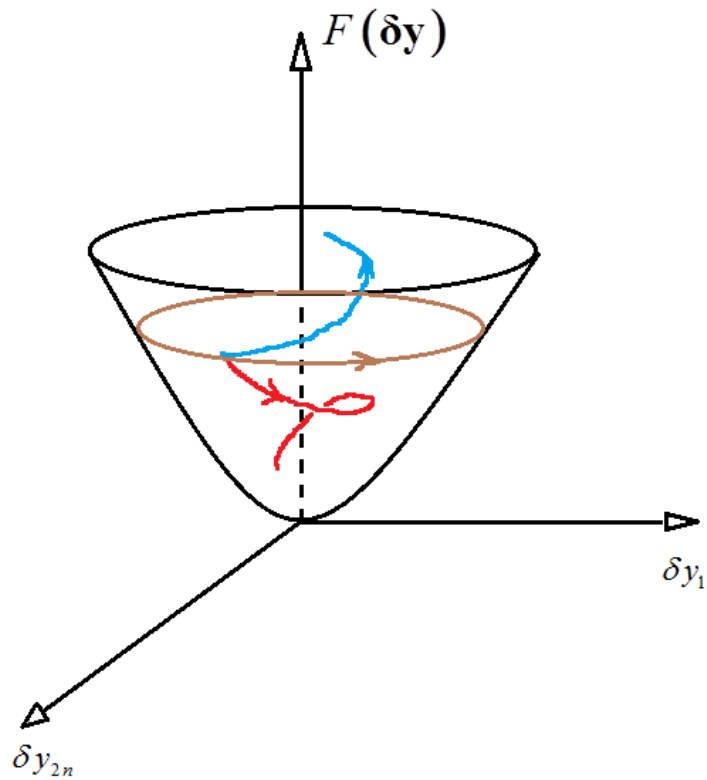
$$3) \quad \exists \text{ vizinhança da origem tal que}$$

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial(\delta \mathbf{y})} \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{y})}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial(\delta \mathbf{y})} \cdot \mathbf{f}(\delta \mathbf{y}) > 0$$

então a solução não perturbada $\mathbf{y}^0(t)$ é instável.

Segundo Método de Liapunov

$F(\delta \mathbf{y})$ é denominada função de Liapunov



Segundo Método de Liapunov

Teorema 9 (Lagrange-Dirichlet): Para sistemas **discretos** conservativos não giroscópicos, se a energia potencial V tiver um mínimo relativo para uma solução de equilíbrio, então essa solução será estável.

(ou seja: $V_{\min}$ é condição suficiente para estabilidade do equilíbrio)

Teorema 10 (Chetayev, Koiter, Meirovitch, Hagedorn?): Para sistemas **discretos** conservativos não giroscópicos, se uma solução de equilíbrio for estável, então a energia potencial V terá um mínimo relativo para essa solução.

(ou seja: $V_{\min}$ é condição necessária para estabilidade do equilíbrio)

Segundo Método de Liapunov

Teorema 9' (extensão Lagrange-Dirichlet): Para sistemas **contínuos** conservativos não giroscópicos, se a energia potencial tiver um mínimo relativo para uma solução de equilíbrio, então essa solução será estável.

(ou seja: $V_{\min}$ é condição suficiente para estabilidade do equilíbrio)

Teorema 10' (extensão Koiter?): Para sistemas **contínuos** conservativos não giroscópicos, se uma solução de equilíbrio for estável, então a energia potencial terá um mínimo relativo para essa solução.

(ou seja: $V_{\min}$ é condição necessária para estabilidade do equilíbrio)

Teoria da Estabilidade Elástica

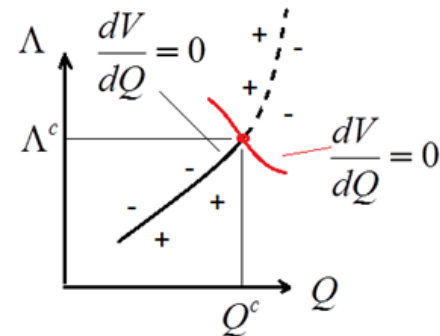
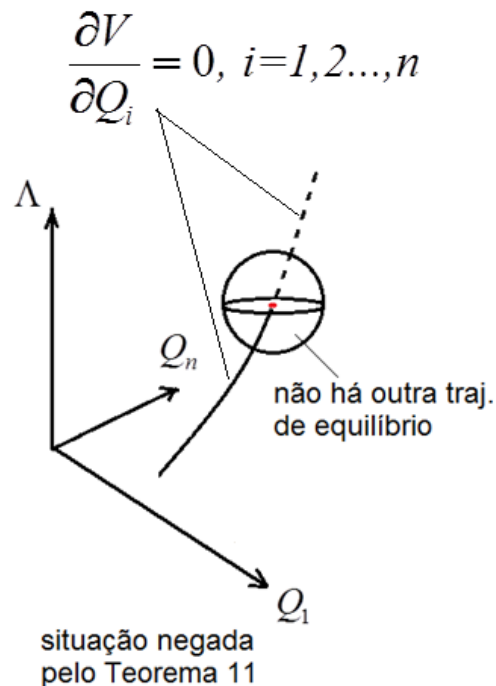
Os Teoremas 9 e 10 (bem como os Teoremas 9' e 10') constituem a base da Teoria da Estabilidade Elástica segundo o Método Energético: $V_{\min} \Leftrightarrow \text{CNS para estabilidade}$

O Método do Equilíbrio da Teoria da Estabilidade Elástica, segundo o qual uma solução equilibrada perde a estabilidade se existir numa sua vizinhança uma outra configuração equilibrada para o mesmo carregamento, pode, em casos simples, ser justificado por intermédio do Método Energético.

Nota: soluções de equilíbrio de sistemas discretos conservativos não giroscópicos são caracterizadas por $\frac{\partial V}{\partial Q_i} = 0, i=1,2,...,n$

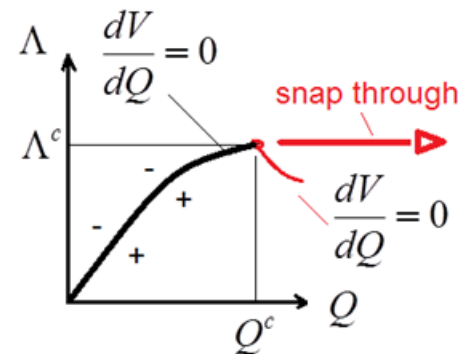
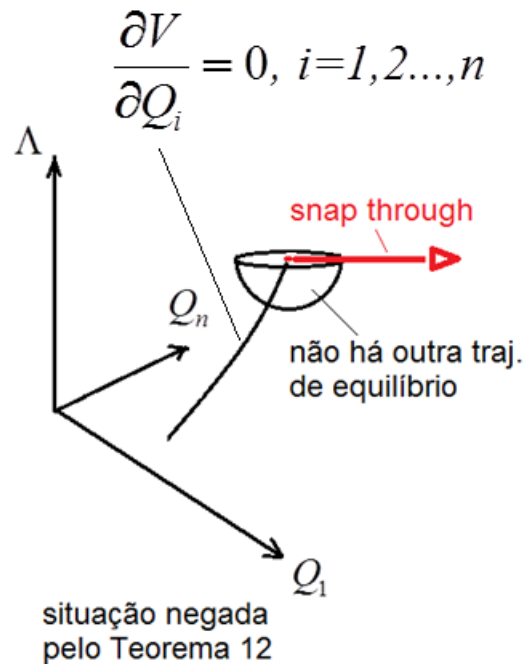
Teoria da Estabilidade Elástica

Teorema 11 (Thompson): uma trajetória (primária) de equilíbrio inicialmente estável “subindo” monotonicamente com o parâmetro de carregamento não pode tornar-se instável, sem que intercepte outra distinta trajetória (secundária) de equilíbrio.

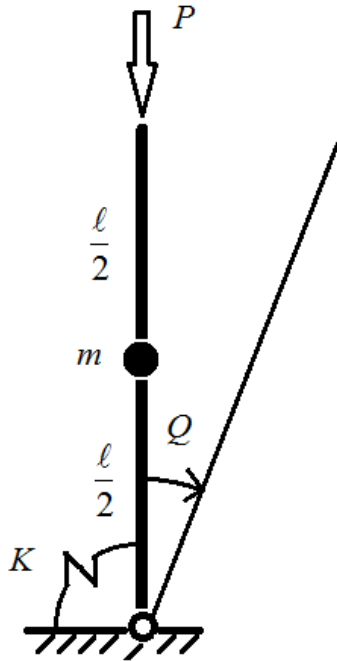


Teoria da Estabilidade Elástica

Teorema 12 (Thompson): uma trajetória de equilíbrio inicialmente estável “subindo” com o parâmetro de carregamento não pode aproximar-se de um estado de equilíbrio instável, a partir do qual ocorra um salto dinâmico (*snap through*), sem que exista na vizinhança desse estado uma trajetória de equilíbrio (que pode ou não ser uma extensão da trajetória original) para valores do parâmetro de carregamento menores que os desse estado.



Exemplo simples



Equação do movimento

$$\frac{m\ell^2}{4}\ddot{Q} + KQ = \left(P + \frac{mg}{2}\right)\ell \sin Q$$

$$\begin{aligned} y_1 &= Q \\ y_2 &= \dot{Q} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{4}{m\ell^2} \left[\left(P + \frac{mg}{2}\right)\ell \sin y_1 - Ky_1 \right] \end{cases}$$

Linearizando: $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ com $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{m\ell^2} \left[\left(P + \frac{mg}{2}\right)\ell - K \right] & 0 \end{bmatrix}$

Exemplo simples

Primeiro Método de Liapunov

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{4}{m\ell^2} \left[\left(P + \frac{mg}{2} \right) \ell - K \right] & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{4}{m\ell^2}} \sqrt{\left(P + \frac{mg}{2} \right) \ell - K}$$

Discussão:

$$P < \frac{K}{\ell} - \frac{mg}{2} \Rightarrow \lambda = \pm i\sigma \Rightarrow Q = 0 \text{ é estável para sistema linearizado;}$$

nada se pode dizer do não linear!

$$P > \frac{K}{\ell} - \frac{mg}{2} \Rightarrow \lambda_+ > 0 \Rightarrow Q = 0 \text{ é instável}$$

$$P = \frac{K}{\ell} - \frac{mg}{2} \Rightarrow \lambda = 0 \text{ (com } p = 2 > d = 1) \Rightarrow Q = 0 \text{ é instável para sistema linear; nada se pode dizer do não linear!}$$

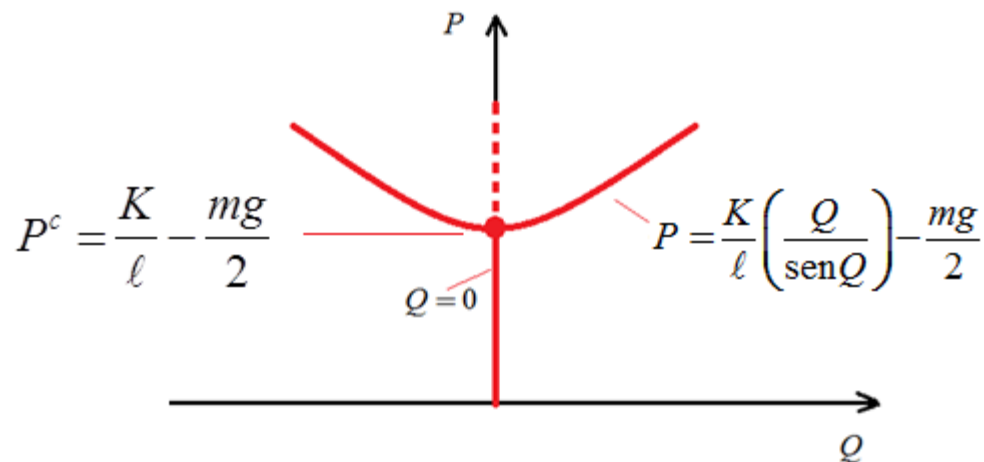
Exemplo simples

Método Energético/Método do Equilíbrio

$$V = \frac{1}{2}KQ^2 - \ell \left(P + \frac{mg}{2} \right) (1 - \cos Q)$$

Equilíbrio

$$V_{,Q} = \frac{dV}{dQ} = KQ - \ell \left(P + \frac{mg}{2} \right) \sin Q \Rightarrow Q = 0 \text{ ou } Q \neq 0 \text{ e } P = \frac{K}{\ell} \left(\frac{Q}{\sin Q} \right) - \frac{mg}{2}$$



Exemplo simples

Estabilidade da trajetória primária (0)

$$\delta V = \frac{1}{2!} V_{,QQ}^0 \delta Q^2 + \frac{1}{3!} V_{,QQQ}^0 \delta Q^3 + \frac{1}{4!} V_{,QQQQ}^0 \delta Q^4 + \dots$$

$$V_{,QQ}^0 = K - \left(P + \frac{mg}{2} \right) \ell; \quad V_{,QQQ}^0 = 0; \quad V_{,QQQQ}^0 = \left(P + \frac{mg}{2} \right) \ell$$

Discussão:

$$P < \frac{K}{\ell} - \frac{mg}{2} \Rightarrow V_{,QQ}^0 > 0 \Rightarrow Q = 0 \text{ é estável!}$$

$$P > \frac{K}{\ell} - \frac{mg}{2} \Rightarrow V_{,QQ}^0 < 0 \Rightarrow Q = 0 \text{ é instável!}$$

$$P = \frac{K}{\ell} - \frac{mg}{2} \Rightarrow V_{,QQ}^0 = 0; V_{,QQQ}^0 = 0; V_{,QQQQ}^0 > 0; \Rightarrow Q = 0 \text{ é estável!}$$

Exemplo simples

Estabilidade da trajetória secundária (*)

$$\delta V = \frac{1}{2!} V_{,QQ}^* \delta Q^2 + \frac{1}{3!} V_{,QQQ}^* \delta Q^3 + \frac{1}{4!} V_{,QQQQ}^* \delta Q^4 + \dots$$

$$V_{,QQ}^* = K - \ell \left(P + \frac{mg}{2} \right) \cos Q = K \left[1 - \frac{Q}{\tan Q} \right], \quad Q \neq 0$$

Discussão:

$$P > \frac{K}{\ell} - \frac{mg}{2} \Rightarrow V_{,QQ}^* > 0 \Rightarrow \text{trajetória } P = \frac{K}{\ell} \left(\frac{Q}{\sin Q} \right) - \frac{mg}{2} \text{ é estável!}$$