

PEF-5737

Dinâmica Não Linear e Estabilidade

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli

Equações de movimento de segunda ordem

Formulação Lagrangeana

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = N_r, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

$$\ddot{q}_r = h_r(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

Exemplo: dinâmica linear para oscilador de 1GL

$$\ddot{u} = \gamma(t) - \omega^2 u - 2\xi\omega\dot{u} \quad \text{com} \quad \gamma(t) = \frac{R(t)}{m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{c}{2m\omega}$$

Exemplo: dinâmica linear para sistema de n GL

$$\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{R}(t) - \mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}]$$

Equações de movimento de primeira ordem

Mudança de variáveis:

$$\ddot{q}_r = h_r(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

$$\begin{array}{l} y_r = q_r \\ y_{r+n} = \dot{q}_r \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{y}_r = y_{r+n} \\ \dot{y}_{r+n} = h_r(y_1, y_2, \dots, y_{2n}, t) \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, t)$$

Exemplo: dinâmica linear para oscilador de 1GL

$$\begin{array}{l} y_1 = q \\ y_2 = \dot{q} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \gamma(t) - \omega^2 y_1 - 2\xi\omega y_2 \end{cases}$$

Equações de perturbação

Solução não perturbada: $y_r = y_r^0(t), \quad r = 1, 2, \dots, 2n$

Solução perturbada: $y_r = y_r^0(t) + \delta y_r(t), \quad r = 1, 2, \dots, 2n$

$$\delta \dot{y}_r = g_r(y_1^0 + \delta y_1, y_2^0 + \delta y_2, \dots, y_{2n}^0 + \delta y_{2n}, t) - \dot{y}_r^0$$

$$\delta \dot{y}_r = f_r(\delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_{2n}, t)$$

$$\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\delta \mathbf{y}, t)$$

Equações de perturbação

Exemplo: dinâmica linear para oscilador de 1GL

$$\begin{cases} \delta \dot{y}_1 = \delta y_2 \\ \delta \dot{y}_2 = -\omega^2 \delta y_1 - 2\xi\omega \delta y_2 \end{cases}$$

$$\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\delta \mathbf{y}, t) \quad \text{ou} \quad \delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{y}$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix}$$

Conceito de estabilidade

Uma solução não perturbada $\mathbf{y}^0(t)$ é estável se a distância $\delta\mathbf{y}(t)$ entre ela e as soluções perturbadas permanecer dentro de limites prescritos para todo o tempo e para perturbações arbitrariamente definidas

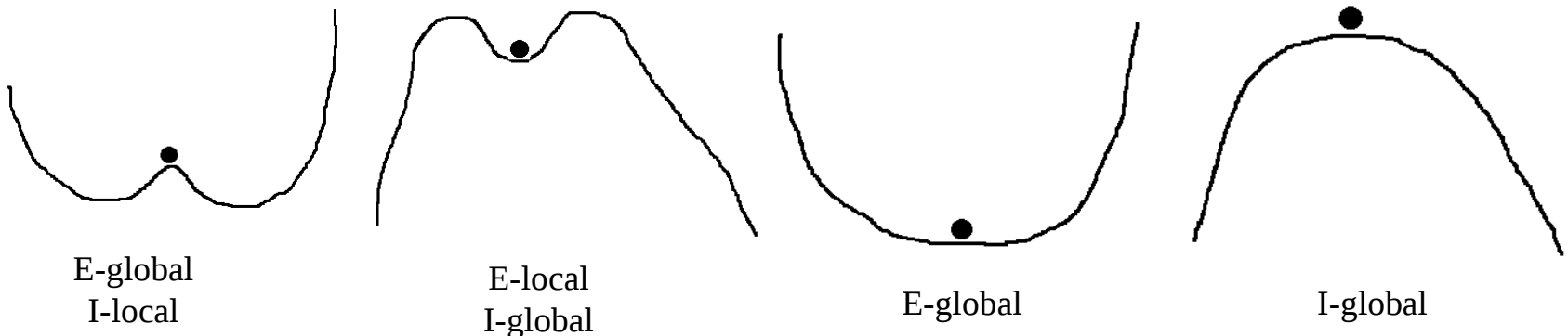
solução não perturbada { equilíbrio: $\mathbf{y}^0 = \text{const.}$
movimento: $\mathbf{y}^0(t)$

tipo de perturbação { cinemática: perturbação das
condições iniciais: $\delta\mathbf{y}(0) \neq 0$
estrutural: perturbação dos parâmetros ou
do modelo matemático

Conceito de estabilidade

Uma solução não perturbada $y^0(t)$ é estável se a distância $\delta y(t)$ entre ela e as soluções perturbadas permanecer dentro de limites prescritos para todo o tempo e para perturbações arbitrariamente definidas

tamanho da perturbação { local: $\|\delta y(0)\| < \delta$
global



Conceito de estabilidade

Uma solução não perturbada $\mathbf{y}^0(t)$ é estável se a distância $\delta\mathbf{y}(t)$ entre ela e as soluções perturbadas permanecer dentro de limites prescritos para todo o tempo e para perturbações arbitrariamente definidas

tipo de análise



determinística
aleatória

Exemplo: definição de estabilidade na média quadrática:

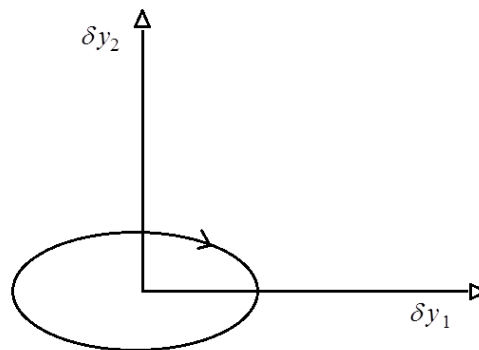
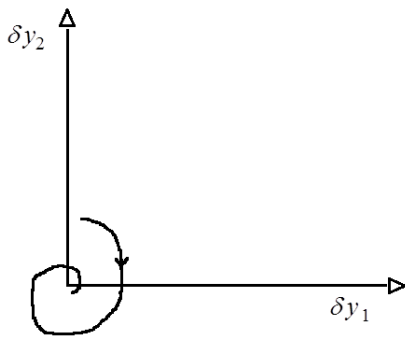
$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} E_{\tau} \|\delta\mathbf{y}(t)\|^2 < \varepsilon \qquad \sigma_{\delta\mathbf{y}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\delta\mathbf{y}}(\omega) d\omega < \varepsilon$$

Estabilidade x Confiabilidade x Integridade

Conceito de estabilidade

Uma solução não perturbada $\mathbf{y}^0(t)$ é estável se a distância $\delta\mathbf{y}(t)$ entre ela e as soluções perturbadas permanecer dentro de limites prescritos para todo o tempo e para perturbações arbitrariamente definidas

tendência da solução perturbada {
assintótica
não assintótica

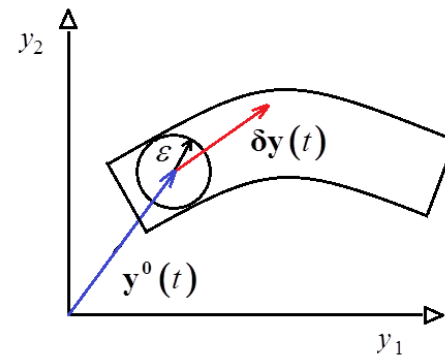
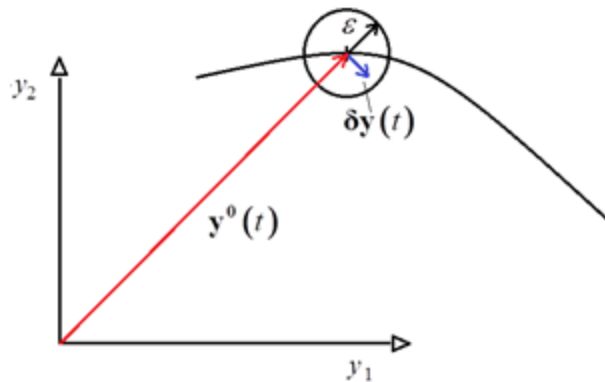


Conceito de estabilidade

Uma solução não perturbada $y^0(t)$ é estável se a distância $\delta y(t)$ entre ela e as soluções perturbadas permanecer dentro de limites prescritos para todo o tempo e para perturbações arbitrariamente definidas

região admissível para solução perturbada

cinética
geométrica



Definições de estabilidade

Liapunov

estabilidade do equilíbrio/movimento de sistemas autônomos, local, determinística, não necessariamente assintótica, cinética, com perturbação das condições iniciais.

Poincaré

estabilidade do movimento, local, determinística, não necessariamente assintótica, geométrica, com perturbação das condições iniciais.

Caso Particular: estabilidade orbital de movimentos periódicos

Estrutural

estabilidade do movimento, local, determinística, assintótica, com perturbação dos parâmetros ou do modelo matemático.

Caso Particular: estabilidade paramétrica; estabilidade de Mathieu

Estabilidade Liapunov

$$\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\delta \mathbf{y})$$

Seja de equilíbrio a solução não perturbada $\delta \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$

$$\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{y} + \mathbf{N}(\delta \mathbf{y})$$

$$\text{com } \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \right|_0 = \text{const.}$$

$$\text{e } \mathbf{N}(\delta \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\delta \mathbf{y}) - \mathbf{A} \delta \mathbf{y}$$

Estabilidade Liapunov

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que,
se $\|\delta \mathbf{y}(0)\| < \delta(\varepsilon)$, então $\|\delta \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$ para $t > 0$

Métodos de Liapunov:

Primeiro Método (método indireto)

Segundo Método (método direto)

Primeiro Método de Liapunov

Equação de perturbação para análise da estabilidade do equilíbrio da solução trivial $\delta \mathbf{y} = \mathbf{0}$

$$\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\delta \mathbf{y}) = \mathbf{A} \delta \mathbf{y} + \mathbf{N}(\delta \mathbf{y})$$

com $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \right|_0$ e $\mathbf{N}(\delta \mathbf{y}, t) = \mathbf{f}(\delta \mathbf{y}, t) - \mathbf{A} \delta \mathbf{y}$

Considere-se o problema linearizado associado

$$\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{y}$$

Solução geral

$$\delta \mathbf{y} = \delta \mathbf{y}_0 e^{\lambda t}$$

Primeiro Método de Liapunov

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \delta \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$$

Para soluções não triviais, deve-se impor:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

Trata-se do problema clássico de autovalores da matriz $\mathbf{A}$

Recai-se na equação característica de grau $2n$,
sendo n o número de graus de liberdade:

$$b_0 \lambda^{2n} + b_1 \lambda^{2n-1} + \dots + b_{2n-1} \lambda + b_{2n} = 0$$

No caso geral, existem $2n$ raízes complexas:

$$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R} \quad \beta_k \in \mathbb{R}$$

Primeiro Método de Liapunov

Teorema 1 (Liapunov): Se $R_k < 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, 2n \Rightarrow \delta \mathbf{y} = \mathbf{0}$ é L-estável

Teorema 2 (Liapunov): Se $\exists R_k > 0 \Rightarrow \delta \mathbf{y} = \mathbf{0}$ é L-instável

Definição: comportamento L-crítico

$$R_k \leq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, 2n \quad \vee \quad \exists R_k = 0$$

Teorema 3 (Leipholtz): No caso crítico, se a multiplicidade p_k dos autovalores com parte real nula ($R_k = 0$) for igual ao decréscimo do posto d_k da matriz $\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}$, então $\delta \mathbf{y} = \mathbf{0}$ é L-estável para o sistema linear. Se $p_k > d_k$ então $\delta \mathbf{y} = \mathbf{0}$ é L-instável para o sistema linear.

Primeiro Método de Liapunov

Teorema 4 (Routh-Hurwitz): Se todos os menores diagonais da matriz $\mathbf{B}$ forem positivos, então $\delta\mathbf{y} = \mathbf{0}$ é L-estável assintoticamente e reciprocamente

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{2n} & b_{2n-1} & b_{2n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{2n} \end{bmatrix} \quad b_{r>2n} = 0 \quad \text{e} \quad b_{r<0} = 0$$

Primeiro Método de Liapunov

Teorema 5 (Liapunov): Se não se tratar de caso L-crítico, então as conclusões sobre a estabilidade (instabilidade) da solução $\delta \mathbf{y} = \mathbf{0}$ do sistema linearizado $\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{y}$ podem ser estendidas ao não linear $\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{y} + \mathbf{N}(\delta \mathbf{y})$

Teoria dos Sistemas Dinâmicos

Teorema 5' (Hartman-Grobman): Se a singularidade for hiperbólica, então o sistema linearizado $\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{y}$ é topologicamente equivalente ao sistema não linear $\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{y} + \mathbf{N}(\delta \mathbf{y})$ nas suas vizinhanças, isto é, entre os fluxos no espaço de fase dos dois sistemas há um difeomorfismo (transformação contínua, com derivada contínua)

Exemplo: oscilador linear de 1GL

Análise da estabilidade do equilíbrio da solução $\delta \mathbf{y} = \mathbf{0}$ de $\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{y}$

$$\begin{cases} \delta \dot{y}_1 = \delta y_2 \\ \delta \dot{y}_2 = -\omega^2 \delta y_1 - 2\xi\omega \delta y_2 \end{cases} \quad \text{com} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix}$$

Generalizando: $2\xi\omega \rightarrow b$ $\omega^2 \rightarrow c$
 $b \in \mathbb{R}$ $c \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}$$

equação característica: $\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$

oscilador com amortecimento subcrítico $0 < \xi < 1$ e $\omega > 0$

$$\lambda = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega \pm i\omega_D$$

Exemplo: oscilador linear de 1GL

Seja $\delta \mathbf{y} = \mathbf{B} \delta \mathbf{x}$ tal que $\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{y} \rightarrow \delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C} \delta \mathbf{x}$
com $\mathbf{C}$ em uma das formas canônicas de Jordan

Nota: $\mathbf{B}$ deve ser tal que $\mathbf{BC} = \mathbf{AB}$ ou $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{AB}$

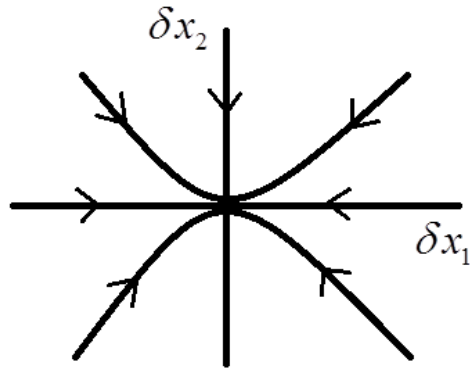
Caso (a): $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$
 $b^2 - 4c > 0$

Caso (b): $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ ou $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$
 $b^2 - 4c = 0$

Caso (c): $\lambda_1 = \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$
 $b^2 - 4c < 0$

Exemplo: oscilador linear de 1GL

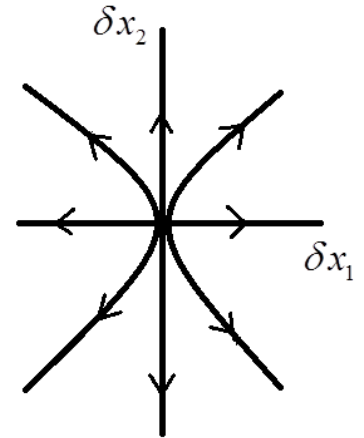
Caso (a)



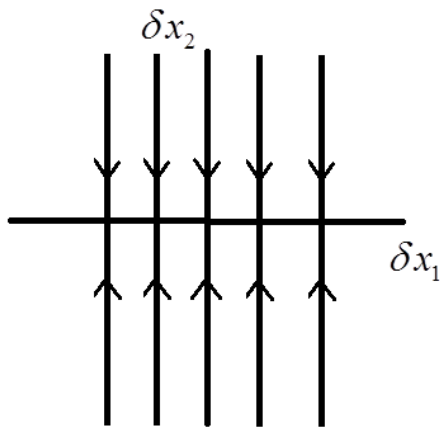
$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$$

$$\delta x_i = \delta x_i^0 e^{\lambda_i t}$$

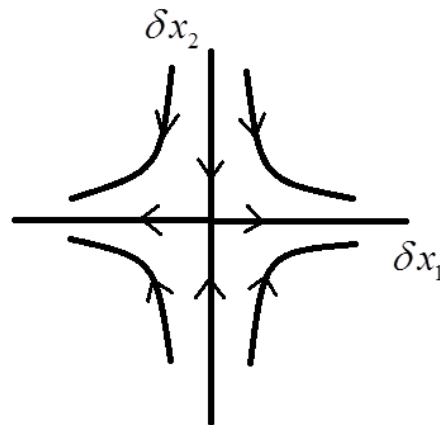
$$\frac{d(\delta x_2)}{d(\delta x_1)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \left(\frac{\delta x_2^0}{\delta x_1^0} \right) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$



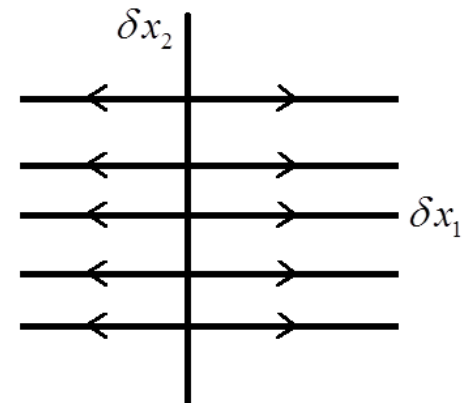
$$0 < \lambda_2 < \lambda_1$$



$$\lambda_2 < \lambda_1 = 0$$



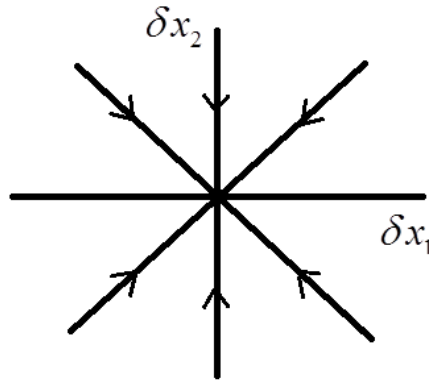
$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$$



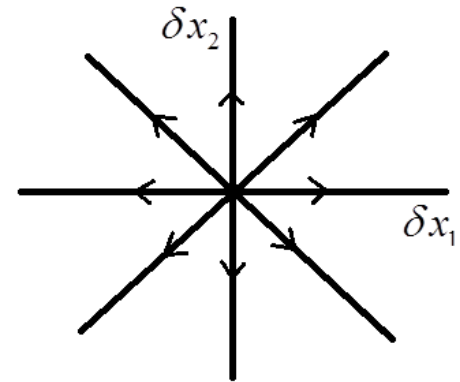
$$0 = \lambda_2 < \lambda_1$$

Exemplo: oscilador linear de 1GL

Caso (b1)

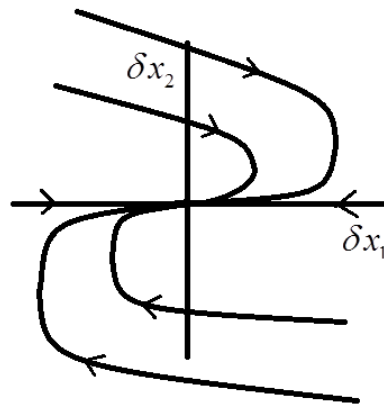


$$\delta x_i = \delta x_i^0 e^{\lambda t} \Rightarrow \frac{d(\delta x_2)}{d(\delta x_1)} = \left(\frac{\delta x_2^0}{\delta x_1^0} \right)$$



$$\lambda_2 = \lambda_1 < 0$$

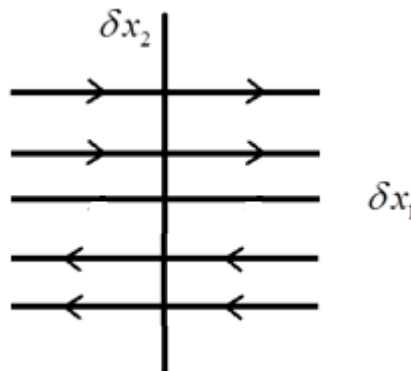
Caso (b2)



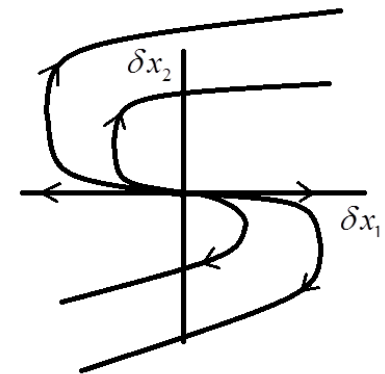
$$\lambda_2 = \lambda_1 < 0$$

$$\delta x_1 = (\delta x_1^0 + t \delta x_2^0) e^{\lambda t} \quad \delta x_2 = \delta x_2^0 e^{\lambda t}$$

$$\frac{d(\delta x_2)}{d(\delta x_1)} = \frac{\delta x_2^0}{\delta x_1^0 + \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) \delta x_2^0} = \frac{1}{\frac{\delta x_1^0}{\delta x_2^0} + \left(t + \frac{1}{\lambda}\right)}$$



$$\lambda_2 = \lambda_1 = 0$$



$$0 < \lambda_2 = \lambda_1$$

Exemplo: oscilador linear de 1GL

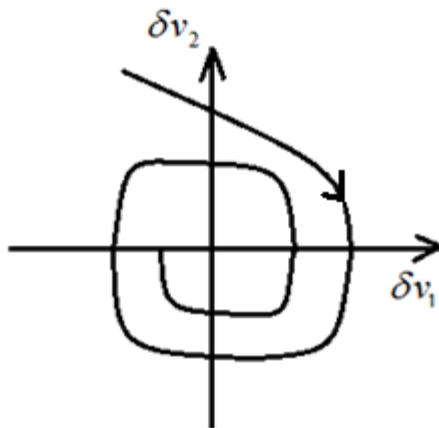
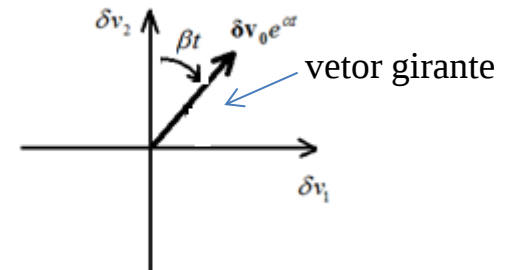
Caso (c)

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix} \delta \mathbf{x} \quad \text{Seja a nova transformação de variáveis } \delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}$$

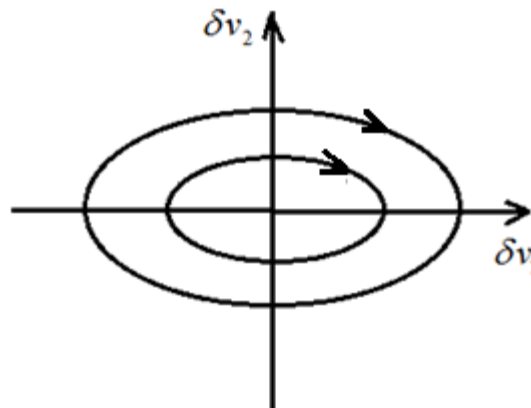
$$\delta \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}^{-1} \delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \delta \mathbf{v}$$

Definição do vetor $\delta \mathbf{v} = \delta v_1 + i\delta v_2$ no plano de Argand

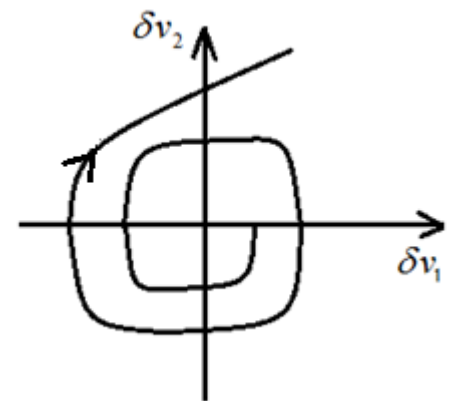
$$\delta \dot{\mathbf{v}} = (\alpha + i\beta) \delta \mathbf{v} \Rightarrow \delta \mathbf{v} = \delta \mathbf{v}_0 e^{\alpha t} e^{i\beta t}$$



$$\alpha < 0$$



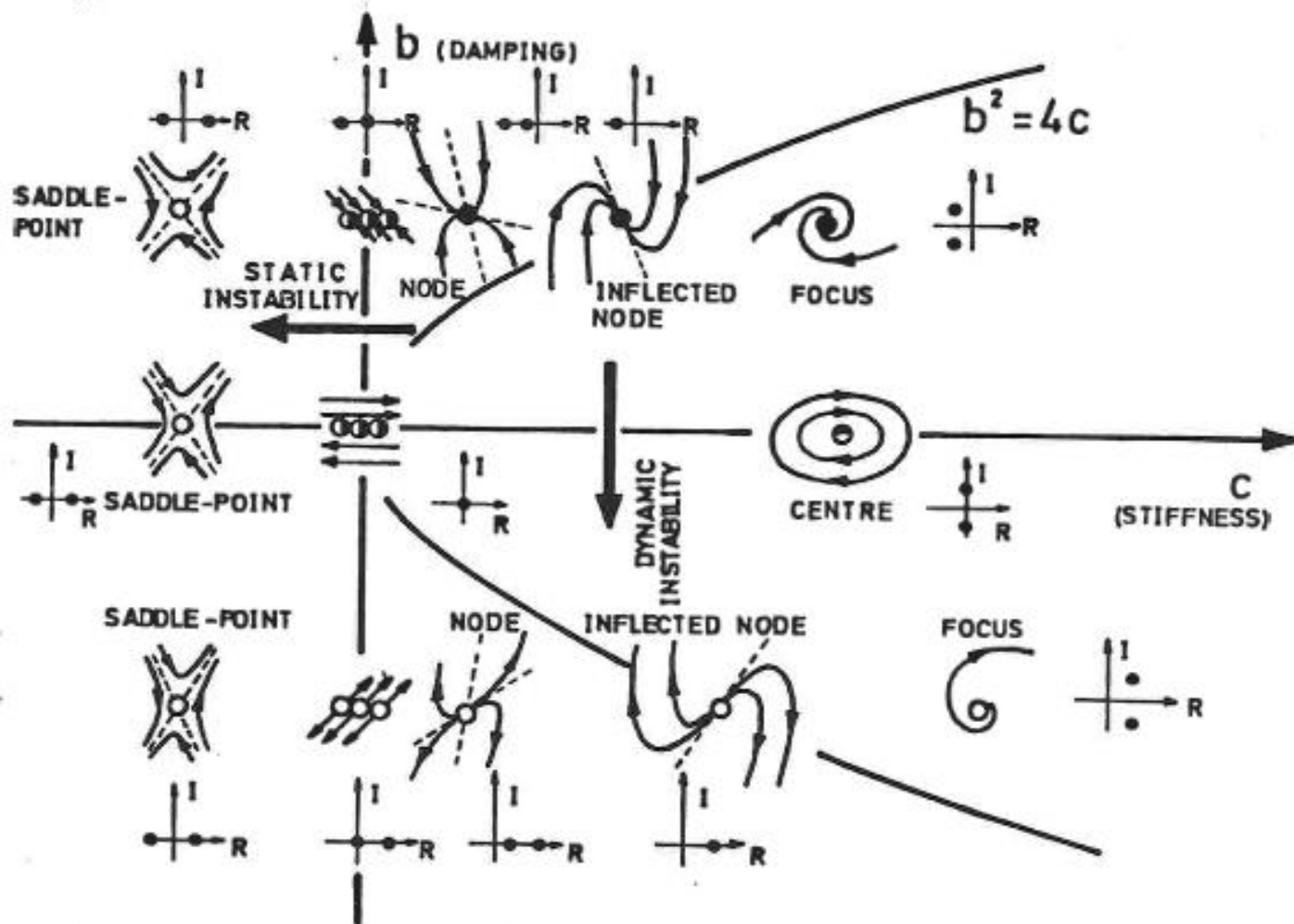
$$\alpha = 0$$



$$\alpha > 0$$

Exemplo: oscilador linear de 1GL

Síntese (Thompson)



Trajetórias de fase de sistemas autônomos de 1GL

- Singularidade (ponto de equilíbrio) $\mathbf{y}^0 = \text{const.}$ ou $\delta \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- Ponto regular é todo aquele que não é uma singularidade
- Teorema de Cauchy-Lipschitz: por um ponto regular passa uma única trajetória de fase
- Equação de perturbação:

$$\delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\delta \mathbf{y}) \Rightarrow \begin{cases} \delta \dot{y}_1 = \delta y_2 \\ \delta \dot{y}_2 = f(\delta y_1, \delta y_2) \end{cases} \Rightarrow \frac{d(\delta y_2)}{d(\delta y_1)} = \frac{f(\delta y_1, \delta y_2)}{\delta y_2}$$

- Em uma singularidade é possível + de 1 trajetória de fase, pois $\frac{d(\delta y_2)}{d(\delta y_1)} = \frac{0}{0}$
- Em um ponto regular com $\delta y_2 = 0$ e $f(\delta y_1, \delta y_2) \neq 0$ a trajetória de fase cruza o eixo $\delta y_2 = 0$ perpendicularmente, pois

$$\frac{d(\delta y_2)}{d(\delta y_1)} = \frac{f(\delta y_1, \delta y_2)}{0} = \pm \infty$$

Sistemas conservativos de 1GL

Equação do movimento (oscilador de 1GL):

$$\ddot{u} + g(u) = 0 \Rightarrow \ddot{u} du + g(u) du = 0 \Rightarrow \ddot{u} \dot{u} dt + g(u) du = 0$$

Integrando: $\frac{\dot{u}^2}{2} + \underbrace{\int_0^u g(\eta) d\eta}_{\text{en. potencial}} = E = \text{const.}$ *en. mecânica*

en. cinética

Seja: $G(u) = \int_0^u g(\eta) d\eta \Rightarrow \dot{u} = \pm \sqrt{2[E - G(u)]} \Rightarrow T = 2 \underbrace{\int_{u(0)}^{u(T/2)} \frac{du}{\sqrt{2[E - G(u)]}}}_{\text{período do movimento}}$

