

Análise Cinética (Dinâmica) de Mecanismos

1 Introdução

A *Análise Cinética* consiste na determinação das forças e torques que são importantes na geração dos movimentos do mecanismo em análise. Em geral, as forças e torques são transmitidos de um elo a outro da cadeia através das juntas. Além dessas interações entre os elos da cadeia, podem haver interações de campos externos (peso, forças de natureza eletrostática, magnética, etc.). Em muitos casos em que o mecanismo não seja de grandes dimensões a força peso pode ser desprezada por ser muito menor que as outras forças envolvidas.

Nesta parte do curso serão considerados apenas mecanismos planos. Portanto, as forças envolvidas são paralelas ao plano de movimento do mecanismo, enquanto que os torques são normais ao plano de movimento do mecanismo. Desta forma, é possível definir um sistema de coordenadas cartesiano em que os eixos X e Y sejam paralelos ao movimento do mecanismo, e o eixo Z seja normal ao movimento do mecanismo. Assim, todas as forças podem ser decompostas em X e Y e os torques estarão na direção Z.

2 Estática

Considerações de estática são interessantes no estudo de mecanismo em situações em que o movimento está sendo iniciado. Ou seja, quando o mecanismo está parado mas na iminência de iniciar algum movimento. Essa situação ocorre por um intervalo de tempo curto.

Conforme aprendido em cursos anteriores (“Mecânica Geral”), as condições para que um corpo esteja em equilíbrio são:

- A soma vetorial de todas as forças agindo no corpo deve ser nula ($\sum \vec{F} = \vec{0}$).
- A soma vetorial de todos os torques agindo no corpo deve ser nula ($\sum \vec{T} = \vec{0}$).

Com ambas condições garantidas, o corpo deverá estar completamente parado em relação a um referencial inercial (*equilíbrio estático*) ou deverá estar em movimento retilíneo uniforme (*equilíbrio dinâmico*).

Além disso, se o corpo é rígido, as forças internas entre partículas não precisam entrar em consideração pois para cada força interna deve haver uma reação contrária de mesmo módulo e direção mas sentido contrário que anula o efeito total.

Considere um corpo rígido atuado por apenas duas forças externas. Para que a resultante seja nula, as duas forças devem ser de mesmo módulo e direção, mas de sentidos opostos. Além disso, para satisfazer a condição de que a resultante de torques seja nula, as duas forças devem ser colineares. Veja a [figura 1](#).

Ainda, considere um corpo atuado por três forças externas. Para que as condições de equilíbrio sejam satisfeitas, a soma vetorial das três forças deve ser nula; e as linhas de aplicação das forças devem cruzar num único ponto para satisfazer a condição de torque resultante nulo. Veja a [figura 2](#).

Essas condições valem, inclusive, para mecanismos espaciais.

Para o caso de quatro ou mais forças externas atuantes num corpo, a situação é mais complicada pois existem várias configurações que podem satisfazer as condições das resultantes de forças e de torques serem nulas.

Exercício Resolvido: Considere o mecanismo manivela-biela-deslizador representado na [figura 3](#). Os dados são: $R_{AO} = 0.25m$, $R_{BA} = 0.50m$, $\theta_2 = 60^\circ$, $P = 1000N$ na direção de x positivo. Determine o

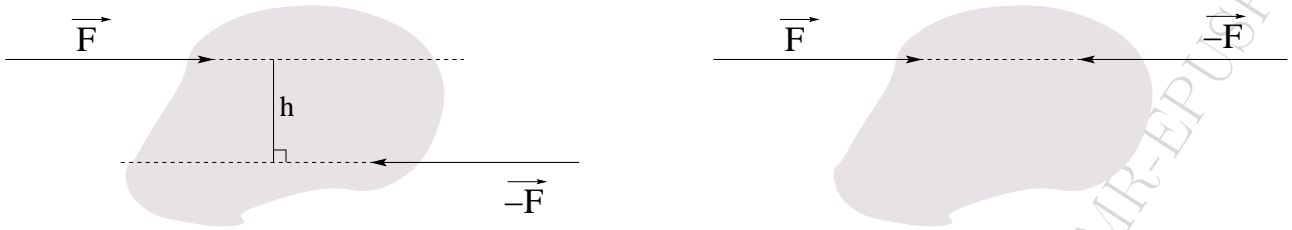


Figura 1: A configuração da esquerda não resulta em equilíbrio pois o torque não é nulo. A configuração da direita resulta em equilíbrio.

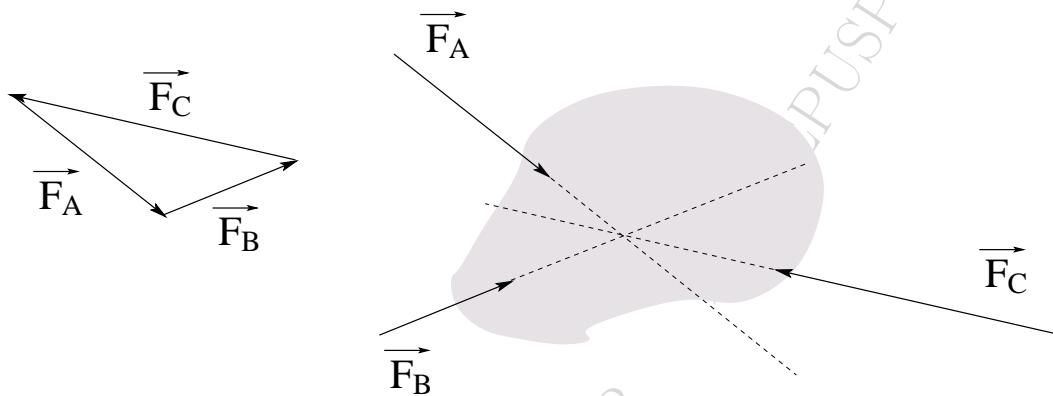


Figura 2: Três forças em equilíbrio, com as linhas de ação cruzando num único ponto.

torque T_{12} que deve ser aplicado no elo 2 para que o mecanismo fique em equilíbrio. Despreze o peso das barras e os atritos nas articulações.

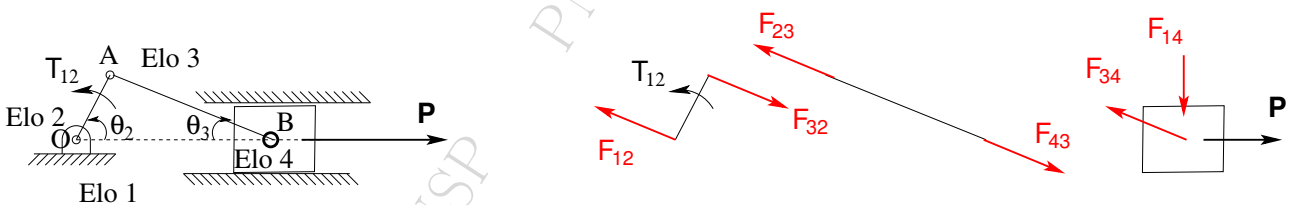


Figura 3: Problema resolvido de estática.

Resolução: Note que só é aplicado torque externo no elo 2. Assim, as forças F_{23} e F_{43} que atuam no elo 3 são colineares, além de terem mesma intensidade e sentidos opostos. F_{14} é a força que a parede da guia exerce no deslizador para que ele mantenha movimento retilíneo horizontal. O código para resolução no Matlab é dado em seguida.

```
%Exercicio resolvido de Estatica - Apostila
%Versao para o Matlab
clear all
T2=60*pi/180; %T2 e' o angulo teta2
r2=0.25; %comprimento da barra 2
r3=0.5;
P=1000; %Forca P=1000N
```

```

% r2*sin(T2) = r3*sin(T3) considerando T3 no primeiro quadrante
T3=asin((r2*sin(T2))/r3)
disp('Angulo T3 em graus:')
T3graus = T3*180/pi

% F34*cos(T3) = -P
F34=-P/cos(T3)
F14=F34*sin(T3)

% F32=-F34 par acao-reacao
F32=-F34

% F12 + F32 = 0 Condicao de equilibrio de forcas
F12=-F32

%braco do torque da forza F32 em relacao ao ponto O2:
% h=r2*sin(pi-T2-T3)
%Equilibrio: T12 - h*F32 = 0
T12=(r2*sin(pi-T2-T3))*F32

```

Exercício Proposto: A [figura 4](#) representa um mecanismo plano de 4 barras. As dimensões das barras e os ângulos estão representados na própria figura. Note que o ângulo na junta **A** entre as barras 2 e 3, bem como o ângulo na junta **O₄** entre as barras 1 e 4, são de 90° . A força **F** aplicada no ponto **M** da barra 3 tem intensidade $60\sqrt{3}$ N, na direção horizontal, com sentido da direita para esquerda. Despreze os pesos das barras na resolução. a) Faça o diagrama de corpo livre, apresentando as forças e torques em cada barra. b) Encontre o valor numérico das forças nas juntas e do torque T_{12} que deve ser aplicado em O_2 para manter o mecanismo em equilíbrio estático.

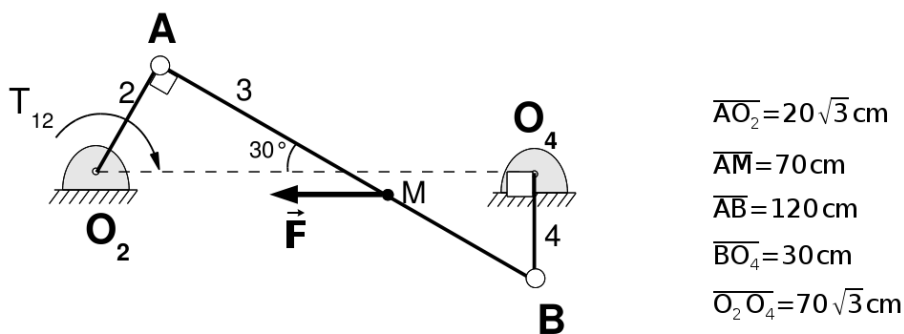


Figura 4: Problema proposto de estática.

3 Dinâmica - Forças em Mecanismos

Será visto, a partir desta seção, um método para encontrar as forças e torques atuantes em mecanismos planos que não estejam em equilíbrio.

As Leis de Newton, em particular a 2ª Lei de Newton, relaciona conceitos de Dinâmica e Cinemática. Entretanto, as Leis de Newton foram propostas para partículas (“pontos materiais”). Para corpos rígidos,

que constituem os elos de uma cadeia cinemática, é necessário integrar o efeito em cada partícula baseando-se na Mecânica de Meios Contínuos.

Antes de prosseguir com as deduções das equações para análise dinâmica serão revistos alguns conceitos básicos.

Centro de Massa

O centro de massa de um corpo rígido pode ser calculado em relação à origem de um sistema de coordenadas ou em relação a um ponto B de interesse e contido no próprio corpo rígido, [figura 5](#). Esse ponto B pode ser, por exemplo, a localização de uma articulação. Considere uma partícula genérica P de massa dm_p desse corpo rígido, com localização \vec{R}_{PO} em relação à origem O ou \vec{R}_{PB} em relação ao ponto B .

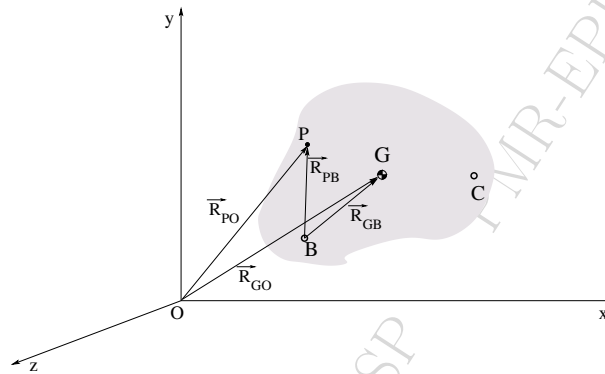


Figura 5: Determinação do centro de massa G de um corpo rígido.

Então, a localização do centro de massa G desse corpo de massa total m é dada por:

$$\begin{aligned}\vec{R}_{GO} &= \frac{1}{m} \int \vec{R}_{PO} dm_P \\ \vec{R}_{GB} &= \frac{1}{m} \int \vec{R}_{PB} dm_P\end{aligned}\tag{3.1}$$

Momento de Inércia de Massa (Segundo Momento de Inércia)

Outro conceito importante em dinâmica é o de momento de inércia de massa (cuidado para não confundir com momento de inércia de área, muito usado em resistência de materiais). O momento de inércia pode ser calculado em relação à origem de um sistema de coordenadas ou em relação ao centro de massa do corpo rígido (mais útil no estudo de mecanismos), [figura 6](#).

Em relação ao centro de massa do corpo rígido, por definição:

$$I_G^x = \int [(R_{PG}^y)^2 + (R_{PG}^z)^2] dm\tag{3.2a}$$

$$I_G^y = \int [(R_{PG}^x)^2 + (R_{PG}^z)^2] dm\tag{3.2b}$$

$$I_G^z = \int [(R_{PG}^x)^2 + (R_{PG}^y)^2] dm\tag{3.2c}$$

Produtos de Inércia:

$$I_G^{xy} = I_G^{yx} = \int [R_{PG}^x R_{PG}^y] dm\tag{3.3a}$$

$$I_G^{yz} = I_G^{zy} = \int [R_{PG}^y R_{PG}^z] dm\tag{3.3b}$$

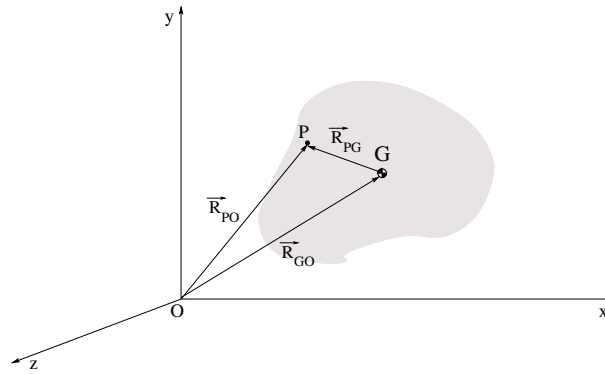


Figura 6: Determinação do momento de inércia de massa de um corpo rígido.

$$I_G^{xz} = I_G^{zx} = \int [R_{PG}^x R_{PG}^z] dm \tag{3.3c}$$

Feita a revisão desses dois conceitos básicos é possível dar prosseguimento às deduções das equações para a análise dinâmica de mecanismos.

Considere o elo k intermediário de um mecanismo, figura 7. Na figura estão representados o elo k e dois vizinhos conectados por juntas, elo $(k - 1)$ e elo $(k + 1)$. O diagrama de corpo livre representa cada elo separadamente. As juntas estão representadas pelos pontos A, B, C, D . Os centros de massa estão representados por G . Os vetores de posição de cada junta ao centro de massa do elo correspondente também estão representados na figura.

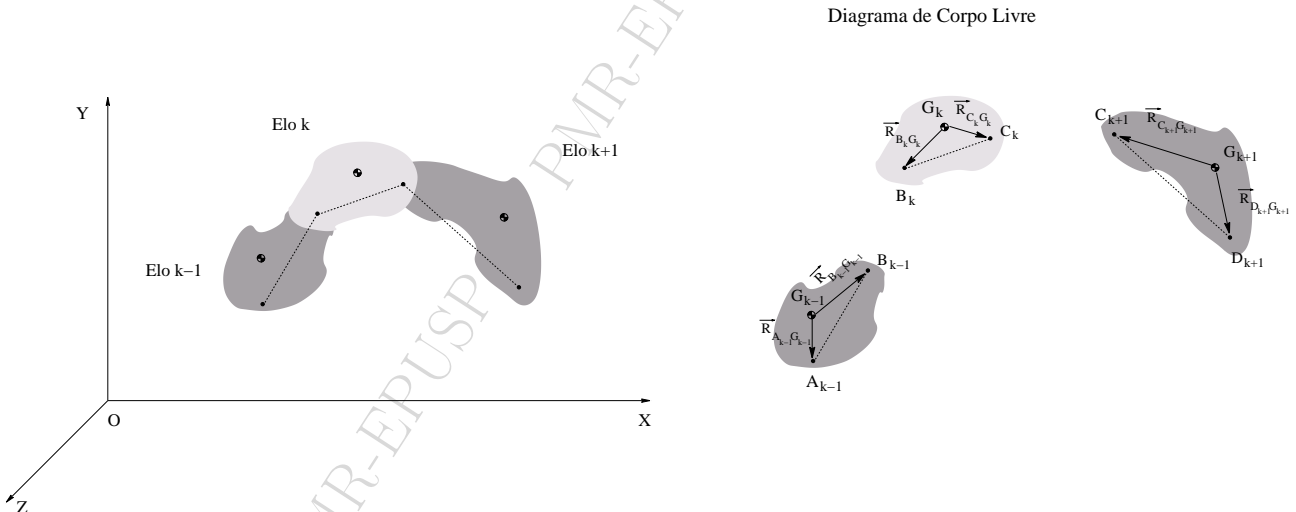


Figura 7: Elos intermediários de um mecanismo. Diagrama de corpo livre.

Detalhes do elo k , com massa total m_k , podem ser vistos na figura 8. Esse elo pode ser subdividido em partículas ou pontos materiais. Cada um desses pontos materiais possui uma fração da massa total m_k . Dois desses pontos materiais, P com massa dm_P e Q com massa dm_Q , estão representados na figura. A interação entre os pontos materiais P e Q do mesmo corpo rígido k resulta num par de forças internas \vec{F}_{PQ} (força de P em Q) e \vec{F}_{QP} (força de Q em P). Pela 3ª Lei de Newton, essas forças correspondem a um par ação-reação e, portanto, $\vec{F}_{PQ} = -\vec{F}_{QP}$. O mesmo ocorre para quaisquer pares de pontos internos do elo k . Portanto, as forças internas sempre ocorrem em pares ação-reação e a resultante de todas as forças internas é nula.

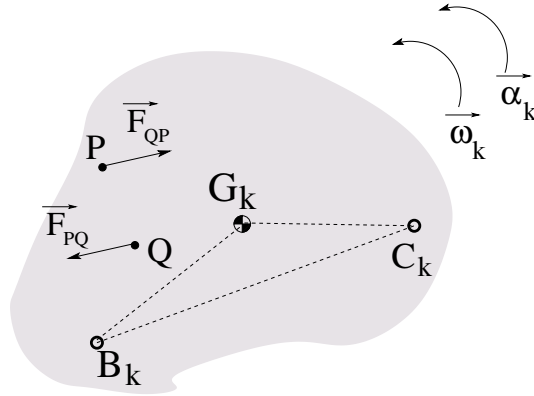


Figura 8: Detalhe do elo k e duas de suas partículas, P e Q.

Por outro lado, as forças de interação com outros corpos ou campos externos possuem reação fora do corpo em questão. Sejam as seguintes forças externas aplicadas no elo k : a força peso \vec{P}_k aplicada no centro de massa G_k , uma força \vec{F}_N aplicada num ponto N do elo k , a força $\vec{F}_{(k-1)(k)}$ que o elo $(k - 1)$ aplica no elo k através da junta B , a força $\vec{F}_{(k+1)(k)}$ que o elo $(k + 1)$ aplica no elo k através da junta C . Também, há um torque externo $\vec{T}_{(k-1)(k)}$ aplicado vindo de um motor com carcaça presa no elo $(k - 1)$ e eixo chavetado no elo k . Isso é mostrado na figura 9.

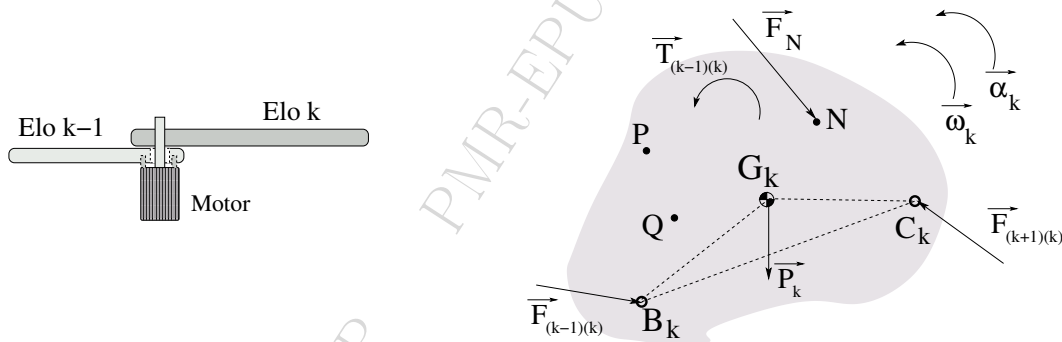


Figura 9: Detalhe do elo k com forças e torques externos.

A resultante das forças externas e a resultante dos torques externos poderão ser não nulos. Mas, se as resultantes foram nulas, recai no caso de equilíbrio visto anteriormente (estática).

Para o caso em que as resultantes de forças e de torques não se anulam, considere, inicialmente, um ponto material P com uma massa infinitesimal dm_P no elo k . A partícula P sofrerá a ação de uma fração da força resultante aplicada no elo k . Aplicando a 2ª Lei de Newton:

$$d\vec{F}_P = \vec{A}_P dm_P \tag{3.4}$$

onde \vec{A}_P é a aceleração no ponto P (que pode ser facilmente obtida da análise cinemática). Então, a força total resultante no elo k como um todo pode ser obtida por integração por todos os pontos materiais. Assim:

$$\sum \vec{F}_{ik} = \int \vec{A}_P dm_P \tag{3.5}$$

Repare que nesta equação (3.5) a somatória que aparece à esquerda da igualdade representa apenas forças cujas reações são externas ao corpo (elo k); enquanto que a integral à direita da igualdade envolve todos os pontos materiais do elo k .

Se for conhecida a aceleração \vec{A}_Q do ponto B (ou de qualquer outro ponto Q no mesmo corpo rígido), a velocidade angular $\vec{\omega}_k$ e a aceleração angular $\vec{\alpha}_k$ do elo k , então é possível encontrar a aceleração em qualquer ponto P genérico distante \vec{R}_{PB} :

$$\vec{A}_P = \vec{A}_B + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{PB}) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{PB} \quad (3.6)$$

Substituindo a equação (3.6) em (3.5), e lembrando que qualquer ponto do corpo rígido k tem mesma velocidade angular $\vec{\omega}_k$ e aceleração angular $\vec{\alpha}_k$:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ik} &= \int \left[\vec{A}_B + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{PB}) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{PB} \right] dm_P \\ &= \int \vec{A}_B dm_P + \int [\vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{PB})] dm_P + \int [\vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{PB}] dm_P \\ &= \vec{A}_B \int dm_P + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \int \vec{R}_{PB} dm_P) + \vec{\alpha}_k \wedge \int \vec{R}_{PB} dm_P \end{aligned} \quad (3.7)$$

Lembrando que:

$$\int dm_P = m_k \quad (3.8)$$

A definição de centro de massa (ponto G_k na figura) é dada por:

$$\vec{R}_{GB} = \frac{1}{m_k} \int \vec{R}_{PB} dm_P \implies \int \vec{R}_{PB} dm_P = \vec{R}_{GB} m_k \quad (3.9)$$

Então:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ik} &= \vec{A}_B m_k + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{GB} m_k) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{GB} m_k \\ &= m_k \left[\vec{A}_B + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{GB}) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{GB} \right] \\ &= m_k \vec{A}_G \end{aligned} \quad (3.10)$$

Portanto, a equação 3.10 mostra que basta aplicar a resultante das forças com reações externas no centro de massa do corpo para ter o efeito equivalente a todas as forças individuais.

Esse resultado é válido para qualquer tipo de mecanismo, plano ou espacial. No caso de mecanismos planos, com todos os elos no plano XY, as forças possuem apenas componentes X e Y.

Os casos mais comuns de forças com reações externas a considerar em mecanismos são: peso, cargas aplicadas, forças em juntas, forças de atrito de partes em contato, força proveniente do processo de combustão de um combustível e atuante no pistão, forças magnéticas, forças eletrostáticas.

Como exemplo, considere o elo k do mecanismo da figura 7. Suponha que já tenha sido feita a análise cinemática completa e que, portanto, já se conheça a aceleração no ponto B de articulação entre os elos $k-1$ e k . Suponha também que sejam aplicadas as forças externas \vec{F}_{P_1} e \vec{F}_{P_2} e o peso do elo k seja P_k . Por

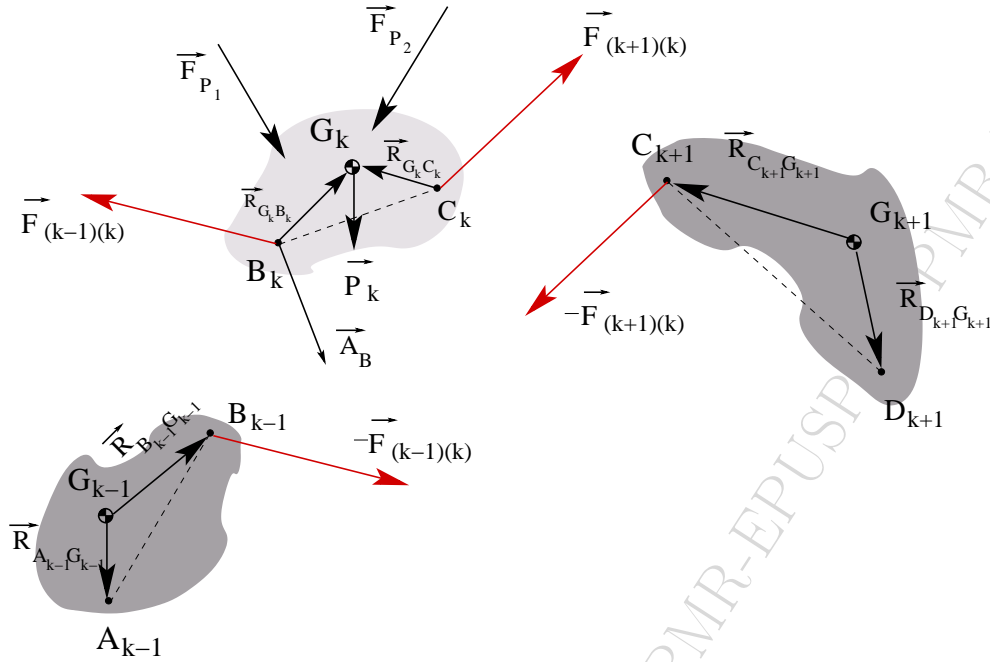


Figura 10: Diagrama de corpo livre detalhado para o Elo k.

fim, as forças externas transmitidas pelas juntas B (a força $\vec{F}_{(k-1)(k)}$ do elo $(k-1)$ no elo (k)) e C (a força $\vec{F}_{(k+1)(k)}$ do elo $(k+1)$ no elo (k)). Veja a [figura 10](#).

A equação vetorial de forças para o elo k é:

$$\vec{F}_{(k-1)(k)} + \vec{F}_{(k+1)(k)} + \vec{F}_{P_1} + \vec{F}_{P_2} + \vec{P}_k = m_k \vec{A}_{G_k} \quad (3.11)$$

Mas, se for conhecida a aceleração A_B do ponto B :

$$\vec{A}_{G_k} = \vec{A}_B + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{G_k B}) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{G_k B} \quad (3.12)$$

A decomposição da equação vetorial de força nas direções X e Y resulta em duas equações escalares:

$$F_{(k-1)(k)}^x + F_{(k+1)(k)}^x + F_{P_1}^x + F_{P_2}^x = m_k A_{G_k}^x \quad (3.13a)$$

$$F_{(k-1)(k)}^y + F_{(k+1)(k)}^y + F_{P_1}^y + F_{P_2}^y + P_k = m_k A_{G_k}^y \quad (3.13b)$$

4 Torques em Mecanismos. Método de Euler

Considere um mecanismo composto de vários elos, como na [figura 11](#). O torque resultante em cada elo será devido aos torques das forças com reações externas ao elo (como na seção anterior) e também devido a torques externos aplicados. O torque resultante devido às forças internas é nulo pois o corpo deve permanecer rígido.

Os torques externos (normalmente provenientes de algum tipo de motor) são dados simplesmente pelos seus valores. Por exemplo, $\vec{T}_{(k-1)(k)}$ é o torque proveniente de um motor com carcaça fixa ao elo $(k-1)$ e eixo chavetado ao elo k .

A cada força com reação externa aplicada num ponto material genérico P corresponde um torque (ou momento) em relação ao centro de massa G dado por $\vec{R}_{PG} \wedge \vec{F}_P$.

$$\begin{aligned} \vec{R}_{PG} \wedge \vec{F}_P &= \vec{R}_{PG} \wedge \vec{A}_P dm_P \\ &= \vec{R}_{PG} \wedge \left[\vec{A}_G + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{PG}) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{PG} \right] dm_P \end{aligned} \quad (4.1)$$

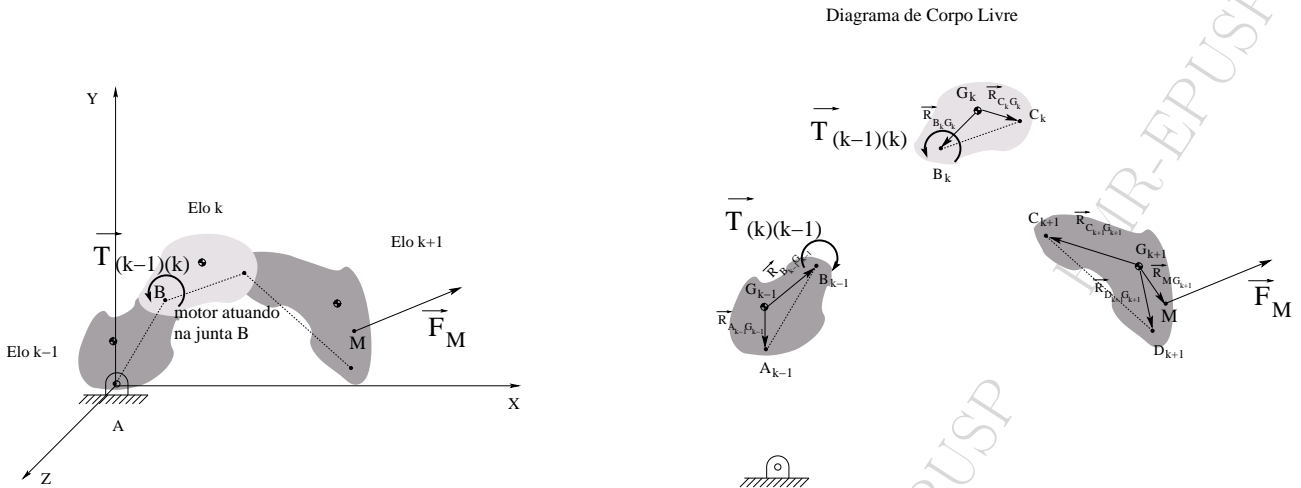


Figura 11: Aplicação de torque e força externa no mecanismo.

Então, de maneira análoga ao que foi feito para o equacionamento das forças, deve-se integrar o efeito do torque de todos os pontos materiais que constituem o elo k. O torque resultante $\sum \vec{T}_{iP}$ das forças externas e dos torques externos relativo ao centro de massa G_k do elo k será:

$$\begin{aligned} \sum \vec{T}_{iP} &= \int \vec{R}_{PG} \wedge \vec{F}_P \\ &= \int \left[\vec{R}_{PG} \wedge \left(\vec{A}_G + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{PG}) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{PG} \right) \right] dm_P \end{aligned} \tag{4.2}$$

O desenvolvimento dessa expressão para o problema tridimensional é relativamente trabalhoso e não será feito aqui. Quem estiver interessado pode consultar, por exemplo, o livro *Theory of Machines and Mechanisms*, Shigley & Uicker, McGraw-Hill, 1995, capítulo 16. O desenvolvimento da expressão para o caso de mecanismos planos resulta simplesmente em:

$$\sum \vec{T}_{iP} = I_{G_k}^{zz} \vec{\alpha}_k \tag{4.3}$$

Essa equação só vale para mecanismos planos!!

O exemplo seguinte, figura 12, considera dois elos consecutivos (k) e (k+1) de um mecanismo. Supondo que há um motor elétrico fixo no elo (k) e conectado por um eixo ao elo (k+1), esse motor aplicará um torque $\vec{T}_{(k)(k+1)} = \vec{T}_M$ ao elo (k+1). Ou seja, o elo (k+1) girará impulsionado pelo eixo do motor. Por outro lado, haverá uma reação $\vec{T}_{(k+1)(k)} = -\vec{T}_M$ no elo k.



Figura 12: Aplicação de torque por um motor fixo ao elo k e conectado por eixo ao elo k+1.

As forças e torques atuando nos elos k e k+1 estão representados em detalhe na figura 13. Note que para o elo k que contém o motor, o centro de massa a ser considerado é G'_{k+M} do corpo k e do motor em conjunto.

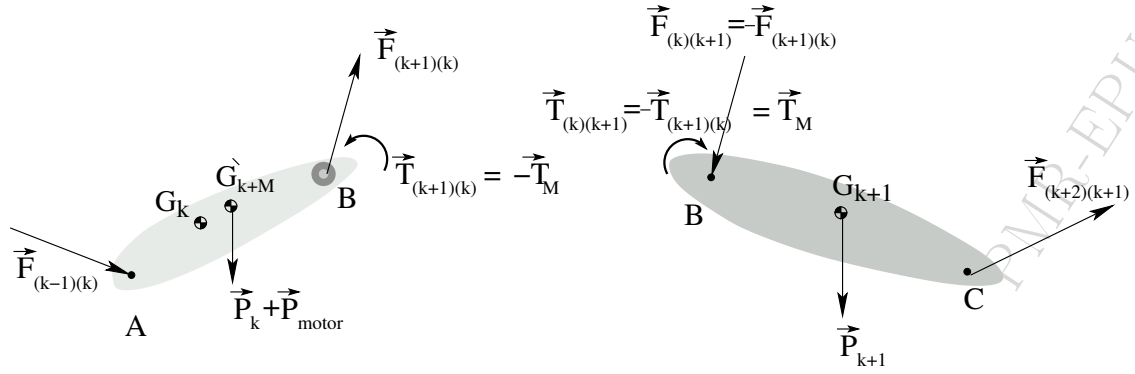


Figura 13: Detalhes das forças externas e torques externos atuando nos elos k e k+1.

Elo k:

Forças:

$$\vec{F}_{(k-1)(k)} + \vec{F}_{(k+1)(k)} + \vec{P}_k + \vec{P}_M = (m_k + m_M) \vec{A}_{G'_{k+M}} \quad (4.4)$$

$$F_{(k-1)(k)}^x + F_{(k+1)(k)}^x = (m_k + m_M) A_{G'_{k+M}}^x \quad (4.5a)$$

$$F_{(k-1)(k)}^y + F_{(k+1)(k)}^y + P_k + P_M = (m_k + m_M) A_{G'_{k+M}}^y \quad (4.5b)$$

Torques

$$-\vec{T}_M + \vec{R}_{AG'_{k+M}} \wedge \vec{F}_{(k-1)(k)} + \vec{R}_{BG'_{k+M}} \wedge \vec{F}_{(k+1)(k)} = I_{G'_{k+M}}^{zz} \vec{\alpha}_k \quad (4.6)$$

$$-T_M \hat{k} + \left[R_{AG'_{k+M}}^x F_{(k-1)(k)}^y - R_{AG'_{k+M}}^y F_{(k-1)(k)}^x \right] \hat{k} + \left[R_{BG'_{k+M}}^x F_{(k+1)(k)}^y - R_{BG'_{k+M}}^y F_{(k+1)(k)}^x \right] \hat{k} = I_{G'_{k+M}}^{zz} \alpha_k \hat{k} \quad (4.7)$$

Elo k+1:

Forças:

$$\vec{F}_{(k)(k+1)} + \vec{F}_{(k+2)(k+1)} + \vec{P}_{k+1} = m_{k+1} \vec{A}_{G_{k+1}} \quad (4.8)$$

$$F_{(k)(k+1)}^x + F_{(k+2)(k+1)}^x = m_{k+1} A_{G_{k+1}}^x \quad (4.9a)$$

$$F_{(k)(k+1)}^y + F_{(k+2)(k+1)}^y + P_{k+1} = m_{k+1} A_{G_{k+1}}^y \quad (4.9b)$$

Torques

$$\vec{T}_M + \vec{R}_{BG_{k+1}} \wedge \vec{F}_{(k)(k+1)} + \vec{R}_{CG_{k+1}} \wedge \vec{F}_{(k+2)(k+1)} = I_{G_{k+1}}^{zz} \vec{\alpha}_{k+1} \quad (4.10)$$

$$T_M \hat{k} + \left[R_{BG_{k+1}}^x F_{(k)(k+1)}^y - R_{BG_{k+1}}^y F_{(k)(k+1)}^x \right] \hat{k} + \left[R_{CG_{k+1}}^x F_{(k+2)(k+1)}^y - R_{CG_{k+1}}^y F_{(k+2)(k+1)}^x \right] \hat{k} = I_{G_{k+1}}^{zz} \alpha_{k+1} \hat{k} \quad (4.11)$$

Exercício Resolvido: Esse é o exercício 11-11 do livro do Norton (Design of Machinery, second edition) com pequenas adaptações de notação. Considere o mecanismo tipo RRRR da figura 14, com uma força externa \mathbf{F} aplicada no ponto P do elo 3. Encontre todas as forças nas articulações e o torque aplicado ao elo 2 (manivela) para satisfazer as condições instantâneas nesta configuração. São dados: todas as barras do mecanismo possuem secção uniforme, retangular, com 50mm de largura e 25mm de espessura (altura); as barras são de aço com densidade $\rho_{aco} = 7600\text{kg/m}^3$; $R_{AO} = L_2 = 0.785\text{m}$, $R_{BA} = L_3 = 0.356\text{m}$, $R_{PA} = 1.09\text{m}$, $R_{CB} = L_4 = 0.950\text{m}$, $R_{OC} = L_1 = 0.544\text{m}$; $q_2 = 96^\circ$; $\omega_2 = 15\text{rad/s}$; $\alpha_2 = -10\text{rad/s}^2$; $F = -500\text{N}$ na vertical para baixo.

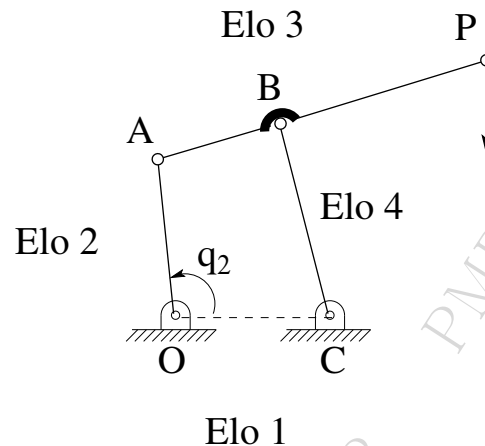


Figura 14: Mecanismo do exercício resolvido de dinâmica.

Resolução:

Note que o mecanismo (quadrilátero $OABC$) é do tipo Grashof. Porém, o elo mais curto é AB e não a manivela AO . Assim, a manivela não pode dar uma volta completa; tanto a manivela como o elo 4 são oscilantes. Observe, também, que o elo 3 (acoplador) vai do ponto A até P . O ponto B representa uma junta de revolução conectando o elo 4 ao elo 3. Lembre que o momento de inércia de massa utilizado é relativo ao centro de massa e na direção Z .

Em seguida, é mostrada a listagem de um arquivo roteiro para Matlab da resolução deste exercício. Para converter para Scilab basta substituir o sinal de comentário $\%$ por $//$; substituir π por $\%pi$; substituir i por $\%i$.

Essa resolução é feita apenas para a configuração instantânea pedida no exercício. Entretanto, é relativamente simples acrescentar um comando *for* para um *loop* de incrementos do ângulo de entrada q_2 . Mas, lembrar que o mecanismo não consegue dar uma volta completa. É necessário encontrar as posições extremas e executar o *loop* dentro desse intervalo.

```
%%Resolucao do problema 11.11 do livro do Norton
```

```
clear all
L1=0.544;
L2=0.785;
L3=0.356;
L4=0.950;
AP=1.09;
BP=AP - L3;
W2=15; %velocidade angular 2 em rad/s
ALFA2=-10; %aceleracao angular 2 em rad/s2
F=-i*500; %Forca aplicada no ponto P (negativo para baixo)
FX=real(F);
FY=imag(F);
```

```

g=-10*i; %aceleracao da gravidade
%Calculo da massa das barras
RHO=7600; %densidade do aco =7600kg/m3
W=50e-3; %lado da barra
T=25e-3; %espessura da barra
AT= W*T; %area da seccao transversal das barras
V2=L2*AT;
V3=AP*AT;
V4=L4*AT;
M2=RHO*V2;
P2=M2*g;
M3=RHO*V3;
P3=M3*g;
M4=RHO*V4;
P4=M4*g;
%Calculo dos momentos de inercia de massa
%Formula: Iz=M*(W*W+L*L)/12
IZG2=M2*(W*W+L2*L2)/12;
IZG3=M3*(W*W+AP*AP)/12;
IZG4=M4*(W*W+L4*L4)/12;
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Problema de Posicao
Q2=96*pi/180; %angulo Q2=96graus
E=sqrt(L2*L2 + L1*L1 - 2*L2*L1*cos(Q2));
BETA=acos((E*E + L1*L1 - L2*L2)/(2*E*L1));
PSI=acos((E*E + L3*L3 - L4*L4)/(2*E*L3));
LAMBDA=acos((E*E + L4*L4 - L3*L3)/(2*E*L4));
TETA4=pi-LAMBDA-BETA;
TETA3=PSI-BETA;
GAMA=pi-PSI-LAMBDA;
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Problema de velocidade
%Equacao vetorial: VA + VBA = VB
% L2*i*W2*exp(i*Q2) + L3*i*W3*exp(i*TETA3) = L4*i*W4*exp(i*TETA4)
% REAL: -L3*sin(TETA3)*W3 + L4*sin(TETA4)*W4 = L2*W2*sin(Q2)
% IMAG: L3*cos(TETA3)*W3 - L4*cos(TETA4)*W4 = -L2*W2*cos(Q2)
A=[-L3*sin(TETA3) , L4*sin(TETA4) ; L3*cos(TETA3) , -L4*cos(TETA4)];
C=[L2*W2*sin(Q2) ; -L2*W2*cos(Q2)];
B=A\C;
W3=B(1); %ou B(1,1)
W4=B(2); %ou B(2,1)
VA=L2*i*W2*exp(i*Q2);
VAX=real(VA);
VAY=imag(VA);
VB=L4*i*W4*exp(i*TETA4);
VBX=real(VB);
VBY=imag(VB);
VP=VA + AP*i*W3*exp(i*TETA3);
VPX=real(VP);
VPY=imag(VP);
VG2=VA/2;
VG4=VB/2;
VG3=VA + (AP/2)*i*W3*exp(i*TETA3);
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Problema Aceleracao
%Equacao vetorial: AAT + AAN + ABAT + ABAN = ABT + ABN

```

```

%L2*i*ALFA2*exp(i*Q2) - L2*(W2^2)*exp(i*Q2) + L3*i*ALFA3*exp(i*TETA3) - L3*(W3^2)*exp(i*TETA3)=
% = L4*i*ALFA4*exp(i*TETA4) - L4*(W4^2)*exp(i*TETA4)
%
%Real: -L3*sin(TETA3)*ALFA3 + L4*sin(TETA4)*ALFA4 =
% = -L4*(W4^2)*cos(TETA4) + L2*ALFA2*sin(Q2) + L2*(W2^2)*cos(Q2) + L3*(W3^2)*cos(TETA3)
%
%Imag: L3*cos(TETA3)*ALFA3 - L4*cos(TETA4)*ALFA4 =
% = -L4*(W4^2)*sin(TETA4) - L2*ALFA2*cos(Q2) + L2*(W2^2)*sin(Q2) + L3*(W3^2)*sin(TETA3)
R=[-L3*sin(TETA3) , L4*sin(TETA4) ; L3*cos(TETA3) , -L4*cos(TETA4)];
T=[-L4*(W4^2)*cos(TETA4) + L2*ALFA2*sin(Q2) + L2*(W2^2)*cos(Q2) + L3*(W3^2)*cos(TETA3)];
T=[T; -L4*(W4^2)*sin(TETA4) - L2*ALFA2*cos(Q2) + L2*(W2^2)*sin(Q2) + L3*(W3^2)*sin(TETA3)];
S=R\T;
ALFA3=S(1);
ALFA4=S(2);
AA=L2*i*ALFA2*exp(i*Q2) - L2*(W2^2)*exp(i*Q2); %aceleracao ponto A
AB=L4*i*ALFA4*exp(i*TETA4) - L4*(W4^2)*exp(i*TETA4); %aceleracao ponto B
AG2=AA/2; %aceleracao CG2
AG2X=real(AG2);
AG2Y=imag(AG2);
AG4=AB/2; %aceleracao CG4
AG4X=real(AG4);
AG4Y=imag(AG4);
AG3A= (AP/2)*i*ALFA3*exp(i*TETA3) - (AP/2)*(W3^2)*exp(i*TETA3); %diferenca aceleracao G3A
AG3= AA + AG3A; %aceleracao CG3
AG3X=real(AG3);
AG3Y=imag(AG3);
%
%%%%%%%%%%%%%%
%Analise dinamica
%Elo 2:
%vetorial: F32 + F12 + P2 = M2*AG2
%F32X + F12X = M2*AG2X;
%F32Y + F12Y = M2*AG2Y - P2;
%vetorial: T12 + RAG2xF32 + R02G2xF12 = IZG2*ALFA2
%T12 + RAG2X*F32Y - RAG2Y*F32X + R02G2X*F12Y - R02G2Y*F12X = IZG2*ALFA2
RAG2=(L2/2)*exp(i*Q2);
RAG2X=real(RAG2);
RAG2Y=imag(RAG2);
R02G2=(L2/2)*exp(i*(Q2+pi));
R02G2X=real(R02G2);
R02G2Y=imag(R02G2);
%
%Elo 3:
%vetorial: -F32 + F43 + P3 + F = M3*AG3
% -F32X + F43X = M3*AG3X - FX;
% -F32Y + F43Y = M3*AG3Y - P3 - FY;
%vetorial: -RAG3xF32 + RBG3xF43 + RPG3xF = IZG3*ALFA3
% -RAG3X*F32Y + RAG3Y*F32X + RBG3X*F43Y - RBG3Y*F43X = IZG3*ALFA3 - RPG3X*FY + RPG3Y*FX;
RAG3=(AP/2)*exp(i*(TETA3+pi));
RAG3X=real(RAG3);
RAG3Y=imag(RAG3);
RBG3=(AP/2 - L3)*exp(i*(TETA3+pi));
RBG3X=real(RBG3);
RBG3Y=imag(RBG3);
RPG3=(AP/2)*exp(i*TETA3);
RPG3X=real(RPG3);
RPG3Y=imag(RPG3);
%
%Elo 4:

```

```

%vetorial: -F43 + F14 + P4 = M4*AG4
% -F43X + F14X = M4*AG4X;
% -F43Y + F14Y = M4*AG4Y - P4;
%vetorial: -RBG4xF43 + R04G4xF14 = IZG4*ALFA4;
% -RBG4X*F43Y + RBG4Y*F43X + R04G4X*F14Y - R04G4Y*F14X = IZG4*ALFA4;
RBG4=(L4/2)*exp(i*TETA4);
RBG4X=real(RBG4);
RBG4Y=imag(RBG4);
R04G4=(L4/2)*exp(i*(TETA4+pi));
R04G4X=real(R04G4);
R04G4Y=imag(R04G4);
%
%L=[F32X F32Y F12X F12Y T12 F43X F43Y F14X F14Y]'
K(1,:)= [1,0,1,0,0,0,0,0,0];
M(1,1)= [M2*AG2X];
K(2,:)= [0,1,0,1,0,0,0,0,0];
M(2,1)= [M2*AG2Y - imag(P2)];
K(3,:)= [-RAG2Y,RAG2X,-R02G2Y,R02G2X,1,0,0,0,0];
M(3,1)= [IZG2*ALFA2];
K(4,:)= [-1,0,0,0,0,1,0,0,0];
M(4,1)= [M3*AG3X - FX];
K(5,:)= [0,-1,0,0,0,0,1,0,0];
M(5,1)= [M3*AG3Y - imag(P3) - FY];
K(6,:)= [RAG3Y,-RAG3X,0,0,0,-RBG3Y,RBG3X,0,0];
M(6,1)= [IZG3*ALFA3 - RPG3X*FY + RPG3Y*FX];
K(7,:)= [0,0,0,0,0,-1,0,1,0];
M(7,1)= [M4*AG4X];
K(8,:)= [0,0,0,0,0,0,-1,0,1];
M(8,1)= [M4*AG4Y - imag(P4)];
K(9,:)= [0,0,0,0,0,RBG4Y,-RBG4X,-R04G4Y,R04G4X];
M(9,1)= [IZG4*ALFA4];
%
L=K\M;
L

```