

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Aula 2

Professor Regina Meyer Branski

Probabilidade

1. **Conceitos básicos de probabilidade**
2. Probabilidade condicional
3. Eventos Dependentes e Independentes
4. Regra da Multiplicação
5. Eventos Mutuamente Exclusivos
6. Regra da Adição

1. Conceitos Básicos de Probabilidade



1.1 Espaço amostral de um experimento

1.2 Eventos simples

1.3 Princípio fundamental da contagem

1.4 Tipos de Probabilidade

1.5 Regra da Amplitude

1.6 Eventos Complementares

1. Conceitos Básicos de Probabilidade

4

- Probabilidade: Frequência relativa que se espera que um evento ocorra.
 - Em um saco com 692 M&Ms você encontrou 151 azuis. Qual a porcentagem de M&M azuis?
 - Se retirar um M&M qual a chance de que ele seja azul?

Probabilidade

5

- Frequência relativa que se espera que um evento ocorra
 - Em um saco com 692 M&Ms você encontrou 151 azuis. Qual a porcentagem de M&M azuis?
 - $151 / 692 = 0,218 = 22\%$
 - Se retirar um M&M qual a chance de que ele seja azul?
 - 22%

1.1 Experimentos de probabilidade

- Ação ou tentativa através da qual resultados específicos (contagens, medidas ou respostas) são obtidos
 - ▣ **Espaço Amostral**
 - Conjunto de todos os possíveis resultados
 - ▣ **Evento**
 - Subgrupo do espaço amostral com um ou mais resultados
 - ▣ **Resultado**
 - Resultado de uma única tentativa em um experimento

1.1 Experimentos de probabilidade

- **Experimento de probabilidade:** Jogar um dado
- **Espaço de amostra:** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Evento:** $\{\text{O resultado é par}\} = \{2, 4, 6\}$
- **Resultado:** $\{3\}$



1.1 Identificando o espaço amostral

Um experimento de probabilidade consiste em jogar uma moeda e depois rolar um dado de seis lados. Descreva o espaço amostral.



1.1 Identificando o espaço amostral

Um experimento de probabilidade consiste em jogar uma moeda e depois rolar um dado de seis lados. Descreva o espaço amostral.

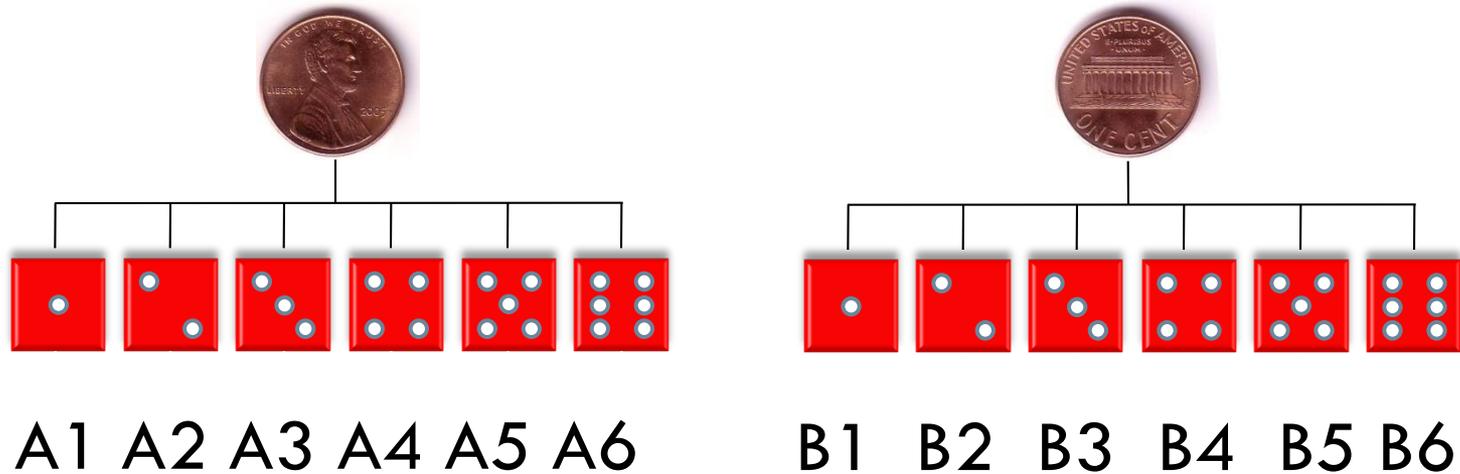


Solução:

Existem dois possíveis resultados quando se joga uma moeda: cara (A) ou coroa (B). Para cada um deles, há mais seis possíveis resultados quando se rola um dado: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Um meio de listar resultados para ações em sequência é usar um **diagrama de árvore**.

1.1 Solução: identificando o espaço amostral

Diagrama de Árvore



O espaço amostral possui 12 resultados:
 $\{A1, A2, A3, A4, A5, A6, B1, B2, B3, B4, B5, B6\}$

1.2 Evento simples

Evento simples

- Um evento que consiste de um único resultado
 - ▣ Ex.: “Tirar cara na moeda e rolar um 3” {A3}

- Um evento que consiste de mais de um resultado não é um evento simples
 - ▣ Ex.: “Tirar cara na moeda e rolar um número par” {A2, A4, A6}

1.2 Identificando evento simples

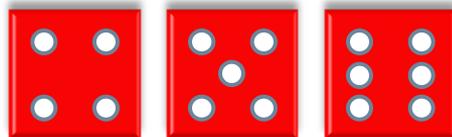
Determine se o evento é simples ou não.

- Seleciona aleatoriamente uma peça de máquina de um lote fabricado em um determinado dia. O evento é selecionar uma peça da máquina com defeito específico.
- Você rola um dado de seis lados. O evento é rolar pelo menos um 4

1.2 Identificando evento simples

Determine se o evento é simples ou não.

- ▣ Só um resultado: escolher peça de máquina com defeito específico. Evento simples
- ▣ Não é simples (o evento B tem três possíveis resultados: 4 ou 5 ou 6).



1.3 Princípio fundamental da contagem

- Válido para eventos em sequência
 - ▣ Se um evento pode ocorrer de m maneiras e um segundo evento pode ocorrer de n maneiras, os dois eventos podem ocorrer é $m*n$ maneiras
 - ▣ Pode ser estendido para qualquer número de eventos em sequência

1.3 Princípio fundamental da contagem

Você está comprando um carro novo.

Montadoras: Ford, GM, Honda

Tamanho: compacto, médio

Cores: branco (B), vermelho (V), preto (P), amarelo (A)

De quantos modos diferentes você pode escolher uma montadora, um tamanho de carro e uma cor? Use um diagrama de árvore para verificar seus resultados.



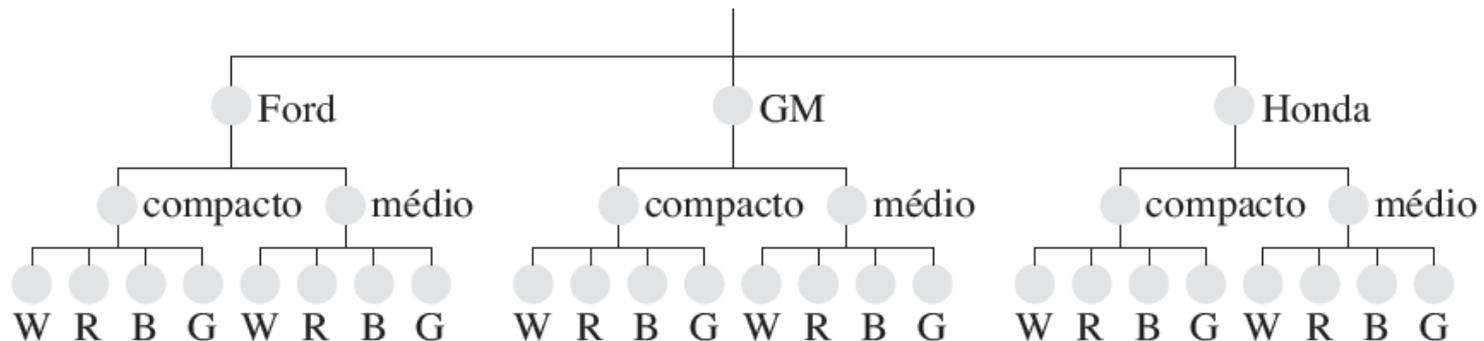
1.3 Princípio fundamental da contagem

Há três escolhas de montadoras, dois tamanhos de carro e quatro cores.

Usando o princípio fundamental da contagem:

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24 \text{ maneiras}$$

Diagrama de árvore para seleção de carros



1.3 Princípio fundamental da contagem

- O código de acesso para um sistema de segurança de um carro é formado por 4 dígitos. Cada dígito pode ser de 0 a 9. Quantos códigos de acesso são possíveis se:
 - ▣ Cada dígito pode ser usado uma única vez
 - ▣ Cada dígito pode ser repetido
 - ▣ Cada dígito pode ser repetido, mas o primeiro dígito não pode ser 0 ou 1

1.3 Princípio fundamental da contagem

- O código de acesso para um sistema de segurança de um carro é formado por 4 dígitos. Cada dígito pode ser de 0 a 9. Quantos códigos de acesso são possíveis se:
 - ▣ Cada dígito pode ser usado uma única vez
 - R. 5040
 - ▣ Cada dígito pode ser repetido
 - R. 10.000
 - ▣ Cada dígito pode ser repetido, mas o primeiro dígito não pode ser 0 ou 1
 - R. 8.000

1.4 Tipos de Probabilidade

- Método para calcular a probabilidade depende do tipo de probabilidade
 - ▣ Probabilidade clássica ou teórica
 - ▣ Probabilidade Experimental ou Estatística
 - ▣ Probabilidade Subjetiva

1.4 Tipos de Probabilidade

20

- Probabilidade Clássica ou Teórica
 - ▣ Usada quando cada resultado em um espaço amostral é igualmente provável de ocorrer

$$P(E) = \frac{\text{Número de resultados no evento } E}{\text{Número total de resultados no espaço amostral}}$$

1.4 Encontrando probabilidades clássicas

Você rola um dado de seis lados. Encontre a probabilidade de cada evento.

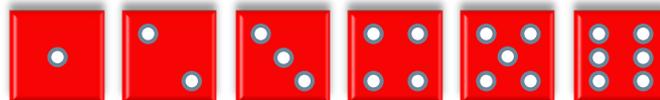
1. Evento A: rolar um 3
2. Evento B: rolar um 7
3. Evento C: rolar um número maior que 5



1.4 Encontrando probabilidades clássicas

Solução:

Espaço amostral: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



1. Há um resultado no evento $A = \{3\}$. Então,

$$P(\text{rolar um } 3) = \frac{1}{6} \approx 0,167.$$

2. Em razão de 7 não estar no espaço amostral, não há resultados no evento .
Então,

$$P(\text{rolar um } 7) = \frac{0}{6} = 0.$$

3. Há quatro resultados no evento $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Então,

$$P(\text{rolar um número menor que } 5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0,667.$$

1.4 Tipos de probabilidade

- Probabilidade Experimental ou Estatística
 - ▣ Baseada nas observações obtidas de experimento de probabilidade

$$P(E) = \frac{\text{Frequência do evento } E}{\text{Frequência total}}$$
$$= \frac{f}{n}$$

1.4 Encontrando probabilidade empírica

Uma empresa está conduzindo uma pesquisa on-line com indivíduos selecionados aleatoriamente para determinar se o congestionamento no trânsito é um problema em sua comunidade. Até agora, 320 pessoas responderam à pesquisa. A distribuição de frequência mostra os resultados. Qual é a probabilidade de que a próxima pessoa que responda a essa pesquisa diga que o congestionamento é um problema sério?

Resposta	Número de vezes (f)
Problema sério	123
Problema moderado	115
Não é problema	82
	$\Sigma f = 320$

1.4 Encontrando probabilidade empírica

	Resposta	Número de vezes (f)	
evento →	Problema sério	123	← frequência
	Problema moderado	115	
	Não é problema	82	
		$\Sigma f = 320$	

$$\begin{aligned} P(\text{problema sério}) &= \frac{123}{320} \\ &= 0,384. \end{aligned}$$

1.4 Tipos de Probabilidade

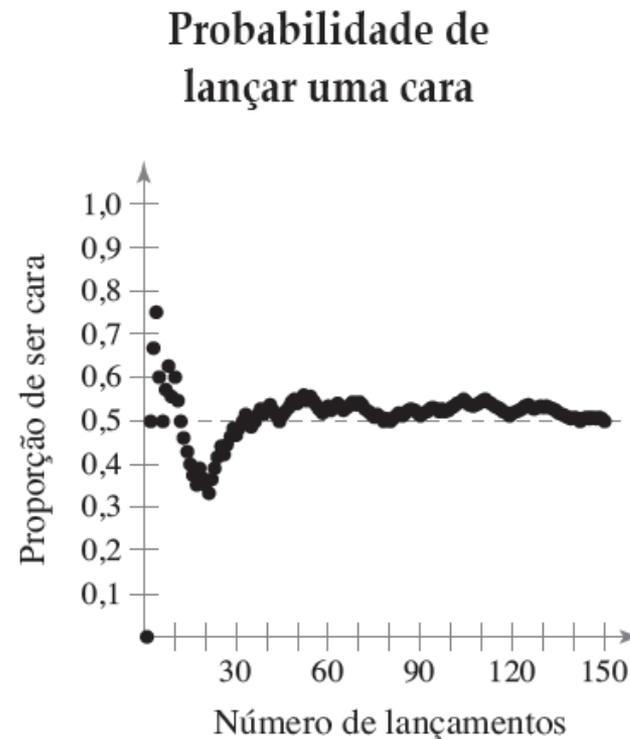
□ Probabilidade Subjetiva

- Resultam da intuição, de suposições fundamentadas e estimativas.
 - Dada a saúde do paciente e a extensão dos ferimentos, um médico pode sentir que o paciente tem 90% de chance de recuperação
 - Diante da conjuntura, analista de negócios pode prever que a chance das ações da Petrobrás cair são de 95%



1.4 Tipos de Probabilidade

- Lei dos grandes números
 - ▣ Conforme um experimento é repetido, a probabilidade empírica de um evento se aproxima da probabilidade teórica (real)



1.4 Tipos de probabilidade

Classifique a probabilidade como clássica, empírica ou subjetiva.

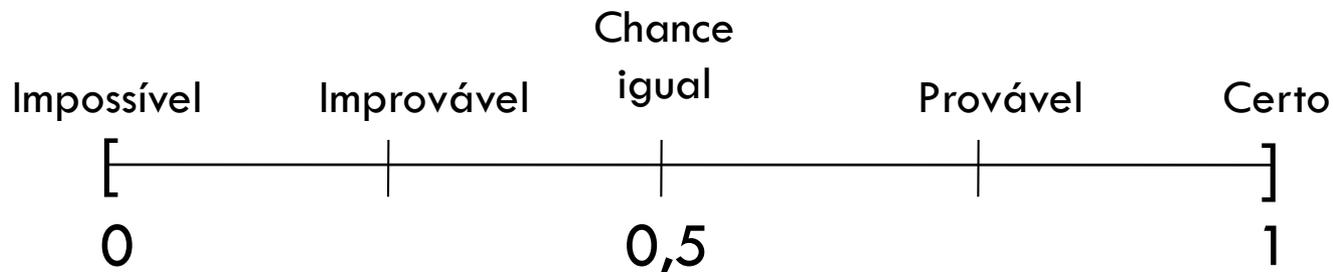
1. A probabilidade que você estar casado aos 30 anos é 0,5
2. A probabilidade de um votante aleatório escolher certo candidato é 0,45.
3. A probabilidade de ganhar uma rifa com 1.000 bilhetes comprando um bilhete é $\frac{1}{1000}$

1.4 Tipos de probabilidade

- 1. Probabilidade subjetiva (palpite)
- 2. Probabilidade empírica (baseado em uma pesquisa)
- 3. Probabilidade clássica (resultados igualmente prováveis)

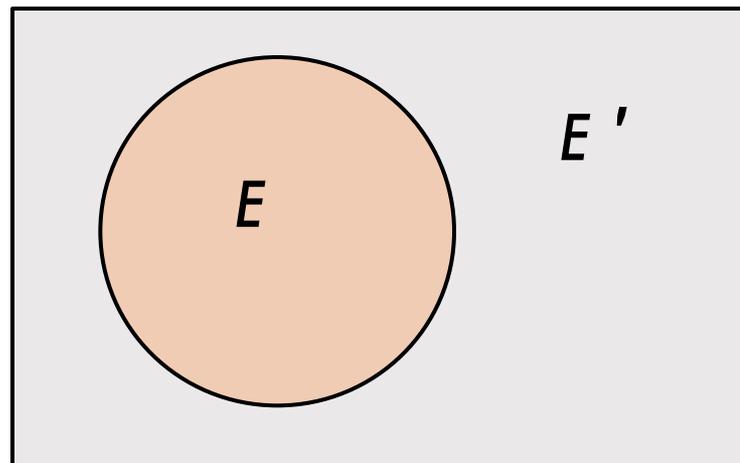
1.5 Regra da amplitude das probabilidades

- Probabilidade não pode ser negativa ou maior que 1. Portanto, a probabilidade de um evento E é sempre um valor entre 0 e 1.
- $0 \leq P(E) \leq 1$



1.6 Eventos complementares

- O conjunto de todos os resultados em um espaço de amostra que não estão incluídos no evento E
- Denotado E'
- $P(E') + P(E) = 1$
- $P(E) = 1 - P(E')$
- $P(E') = 1 - P(E)$



1.6 Eventos Complementares

Você pesquisa uma amostra de 1.000 funcionários em uma empresa e registra a idade de cada um. Encontre a probabilidade de escolher aleatoriamente um funcionário que não esteja entre 25 e 34 anos.

Idades	Frequência, f
de 15 a 24	54
de 25 a 34	366
de 35 a 44	233
de 45 a 54	180
de 55 a 64	125
65 ou mais	42
	$\Sigma f = 1.000$

1.6 Eventos Complementares

Você pesquisa uma amostra de 1.000 funcionários em uma empresa e registra a idade de cada um. Encontre a probabilidade de escolher aleatoriamente um funcionário que não esteja entre 25 e 34 anos.

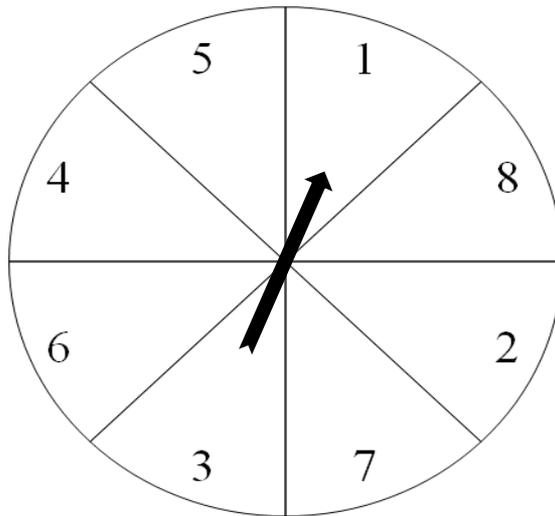
Idades	Frequência, f
de 15 a 24	54
de 25 a 34	366
de 35 a 44	233
de 45 a 54	180
de 55 a 64	125
65 ou mais	42
	$\Sigma f = 1.000$

$$P(\text{idades de 25 até 34 anos}) = \frac{366}{1.000} = 0,366$$

$$\begin{aligned} P(\text{idade que não tenha entre 25 e 34 anos}) &= 1 - \frac{366}{1.000} \\ &= \frac{634}{1.000} \\ &= 0,634. \end{aligned}$$

Exercício 1

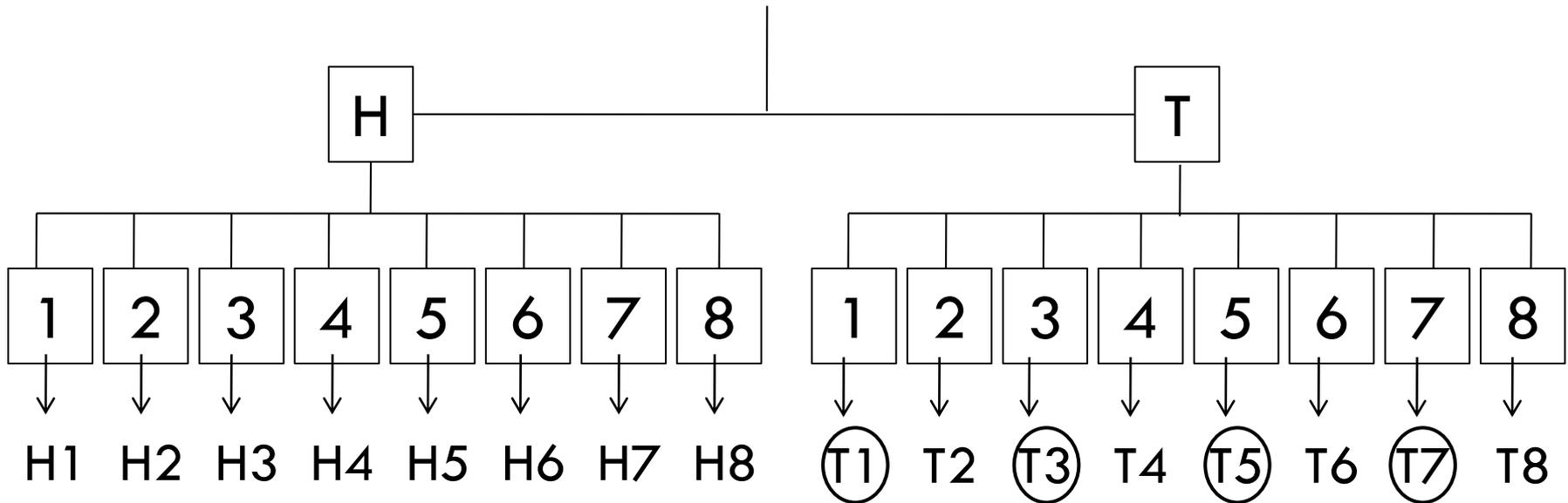
Um experimento de probabilidade consiste em jogar uma moeda e girar a roleta abaixo. A roleta tem probabilidade igual de parar em qualquer número. Use um diagrama de árvore para encontrar a probabilidade de um resultado coroa e da roleta parar em um número ímpar.



Resolução

Probabilidade usando um diagrama de árvore

Diagrama de árvore:



$$P(\text{tirar coroa e um número ímpar}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Exercício 2

As identificações da sua faculdade consistem de 8 dígitos. Cada dígito pode ser de 0 a 9 e cada dígito pode ser repetido. Qual é a probabilidade de obter o seu número de identificação gerando aleatoriamente os oito dígitos?

Resolução

Probabilidade usando o princípio fundamental a contagem

- Cada dígito pode ser repetido
- Existem 10 escolhas para cada um dos 8 dígitos
- Usando o princípio fundamental da contagem, temos que
$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$
$$= 10^8 = 100.000.000$$
possíveis números de identificação
- Somente um desses números corresponde ao seu número

$$P(\text{sua identificação}) = 1/100.000.000$$

1. Conceitos Básicos de Probabilidade



1.1 Espaço amostral de um experimento

1.2 Eventos simples

1.3 Princípio fundamental da contagem

1.4 Tipos de Probabilidade

1.5 Regra da Amplitude

1.6 Eventos Complementares