PTC-2305: Segunda lista de exercícios

1. Considere um experimento aleatório no qual o espaço amostral é $\mathcal{S} = \{s_i : s_i = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e os eventos são equiprováveis. Se uma variável aleatória for definida como $X(s_i) = s_i^2$, encontre $\mathcal{S}_X$, a imagem de X, e sua função massa de probabilidade.

2. Um dardo é lançado sobre um quadrado cujo lado tem comprimento ℓ. Assuma que a pessoa jogando o dardo está vendada e que a probabilidade do dardo atingir qualquer ponto do quadrado é a mesma. Defina a variável aleatório Z dada pela soma das duas coordenadas do ponto onde dardo atinge o quadrado.

   (a) Descreva $\mathcal{S}$, o espaço amostral do experimento, e $\mathcal{S}_Z$, a imagem da VA Z.

   (b) Encontre a região do quadrado correspondente ao evento $\{Z \leq z\}$, para $-\infty < z < \infty$.

   (c) Determine $P[Z \leq z]$.

3. A variável aleatória N tem função de massa de probabilidade

$$P_N(n) = \begin{cases} c(1/2)^n, & n = 0, 1, 2, \cdots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Qual é o valor da constante c?

   (b) Qual o valor de $P[N \leq 1]$?

4. Você é o administrador de uma agência que vende ingressos para shows por telefone. Você assume que as pessoas ligam 3 vezes na tentativa de comprar os ingressos e, se não conseguem, desistem. Você quer ter certeza de que é capaz de atender 95% dos clientes. Assuma que p é a probabilidade de que um cliente seja atendido em cada tentaiva de ligação. Qual o valor mínimo de p necessário para que você atinja o seu objetivo?

5. Em um pacote de M&Ms, o número de M&Ms amarelos (Y) é uniformemente distribuído entre 5 e 15.

   (a) Qual a função de massa de probabilidade de Y?

   (b) Qual o valor de $P[Y < 10]$?

   (c) Qual o valor de $P[Y > 12]$?

   (d) Qual o valor de $P[8 \leq Y \leq 12]$?

6. Quando um celular transmite um SMS, a probabilidade de que a mensagem seja recebida pelo outro celular é igual p. Para garantir que o SMS seja recebido pelo menos uma vez, o sistema transmite a mensagem n vezes.

   (a) Assumindo que todas as transmissões são independentes, qual é a função de massa de probabilidade de K, o número de vezes que o celular *recebe* o SMS?

   (b) Assuma que $p = 0.8$. Qual é o valor mínimo de n que produz uma probabilidade de 0.95 de receber o SMS pelo menos uma vez?

7. O número de bits B em uma transmissão de fax é uma variável aleatória geométrica com $p = 2.5 \cdot 10^{-5}$. Qual a probabilidade $P[B > 500000]$ de que um fax tenha mais de 500000 bits?

8. O número de ônibus que chega em um ponto de ônibus em T minutos é uma variável aleatória com distribuição de Poisson B, com valor esperado $T/5$.

   (a) Qual é a função de massa de probabilidade de B?

   (b) Qual é a probabilidade de que em um intervalo de 2 minutos, 3 ônibus cheguem ao ponto?

   (c) Qual é a probabilidade de que nenhum ônibus chegue ao ponto em um intervalo de 10 minutos?

   (d) Quanto tempo você deve gastar para que apareça ao menos um ônibus com probabilidade 0.99?

9. Uma variável aleatória X do tipo Zipf$(n, \alpha = 1)$ possui função de probabilidade

$$P_X(x) = \begin{cases} c(n)/x, & x = 1,2,\cdots,n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   A constante $c(n)$ é escolhida de forma que $\sum_{x=1}^{n} P_X(x) = 1$.

   Calcule $c(n)$ para $n = 1,2,\ldots,6$.

10. Uma estação de rádio dá ingressos para o show da banda Calypso para o *sexto* ouvinte a ligar e a acertar a data de nascimento da Joelma. Para cada pessoa que liga, a probabilidade de que ela saiba a data de nascimento é 0.75. Todas as chamadas são independentes.

    (a) Qual a função de massa de probabilidade de L, o número de chamadas necessário para obter um vencedor?

    (b) Qual é a probabilidade de achar um vencedor na décima ligação?

    (c) Qual a probabilidade de que a estação de rádio precise de 9 ou mais ligações para obter um vencedor?

11. A variável aleatória X tem função de distribuição cumulativa dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 0.4, & -3 \leq x < 5 \\ 0.8, & 5 \leq x < 7 \\ 1, & x \geq 7 \end{cases}$$

   (a) Desenhe um gráfico da função de probabilidade acumulada.

   (b) Escreva $P_X(x)$, a função de massa de probabilidade de X.

12. Chamadas de voz custam 20 centavos cada, enquanto chamadas de dados custam 30 centavos cada. Seja C o custo de uma ligação telefônica. A probabilidade de que uma chamada seja de voz é $P[V] = 0.6$, enquanto que uma chamada de dados tem probabilidade $P[D] = 0.4$.

   (a) Encontre $P_C(c)$, a função de massa de probabilidade de C.

   (b) Qual é $E[C]$, o valor esperado de C?

13. Suponha que você vai a um cassino com exatamente 63 reais. Nesse cassino, existe apenas uma roleta e as únicas apostas possíveis são vermelho e verde. Além disso, a roleta é honesta e $P[\text{vermelho}] = P[\text{verde}] = 1/2$. Você tem a seguinte estratégia: primeiro, você aposta 1 real. Se você vence, pára de jogar e leva 64 reais para casa. Se você perde, você aposta 2 reais. Nesse caso, se você ganha, pára de jogar. Se perde, você aposta então 4 reais. De fato, sempre que você perder você vai dobrar sua aposta até ganhar ou até esgotar o seu dinheiro. Porém, assim que você ganhar, você pára de jogar. Seja Y a quantidade de dinheiro que você leva para casa. Encontre $P_Y(y)$ e $E[Y]$. Você gostaria de participar desse jogo todo dia?