PTC-2305: Respostas da quinta lista de exercícios

1. $$F_X(x\,;\,t) = \begin{cases} e^{-(t-x)}, & x < t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

2. (a) $\mathrm{E}[X(t)] = t - 1$.
   (b) $C_{XX}(t, t+\tau) = 1$.

3. (a) Não.
   (b) Não.
   (c) Sim.
   (d) Não.
   (e) Não.

4. $R_{XX}[n_1, n_2] = \min(n_1, n_2) \cdot \sigma_W^2$.

5. (a) $\mu_X(t) = \dfrac{1}{3}\,[\,\sin(2\pi t) - 2\,]$
   (b) $R_{XX}(t_1, t_2) = \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9}\,[-2\sin(2\pi t_1) - 2\sin(2\pi t_2) + \sin(2\pi t_1)\sin(2\pi t_2)]$
   (c) Não é estacionário no sentido amplo.

6. (a) $R_{XX}(0) = 1$
   (b) $\mathrm{E}[\,\cos(2\pi f_C t + \Theta)\,] = 0$
   (c) $\mathrm{E}[\,Y(t)\,] = 0$

7. (a) $\mu_X(t) = 0$
   (b) $R_{XX}(t_1, t_2) = \dfrac{2}{3}\cos[\omega(t_1 - t_2)]$.
   (c) Sim, no sentido amplo.

8. $\mathrm{E}[X(t)] = 0$, mas como $R_{XX}(t, t+\tau) = \dfrac{1}{3}\,(t^2 + \tau t + 1)$, o processo não é estacionário no sentido amplo.

9. $\mathrm{E}[X(t)] = 0$ e $R_{XX}(t, t+\tau) = \sigma^2 \cos(w_0 \tau)$.

   A pdf $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2\,;\, t, t+\tau)$ é dada por

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2\,;\, t, t+\tau) = \frac{1}{2\pi\,|\sin(w_0\tau)|\,\sigma^2} \cdot \exp\left(\frac{-\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2 & -\sigma^2\cos(w_0\tau) \\ -\sigma^2\cos(w_0\tau) & \sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}{2\sin^2(w_0\tau)\sigma^2} \right)$$

10. $\mathrm{E}[Y(t)] = 0$ e $R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\alpha\tau)$. Portanto, $Y(t)$ é estacionário no sentido amplo com densidade espectral de potência

$$S_{YY}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\, S_{XX}\left(\frac{\omega}{|\alpha|}\right)$$

11. $S_{YY}(\omega) = 2\pi\,(A^2 + 2AB\mu_X)\,\delta(\omega) + B^2 S_{XX}(\omega)$.

12. (a) $R_{XX}(0) = 1$

    (b)

$$S_{YY}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{-\frac{\omega^2}{16\pi}}, & |w| \leq 4\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    (c) $\mathrm{E}\left[Y^2(t)\right] = 0.9876$

13. (a) $\mathrm{E}\left[X^2(t)\right] = 0.02$

    (b)

$$S_{XY}(\omega) = \begin{cases} 10^{-4} H(\omega), & |\omega| < 200\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    (c)

$$S_{YY}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{10^{-4}}{10^4\pi^2 + \omega^2}, & |\omega| < 200\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    (d) $\mathrm{E}\left[Y^2(t)\right] = 1.12 \cdot 10^{-7}$

14. $\mathrm{E}[Y(t)] = \mu_C \mu_X \neq \langle\, y(t)\,\rangle = C\mu_X$. Portanto, o processo não é ergódico na média.

    $\mathrm{E}[Y(t)Y(t+\tau)] = \mathrm{E}\left[C^2\right] r_X(\tau) \neq \langle\, y(t)y(t+\tau)\,\rangle = C^2\, r_X(\tau)$. Portanto, o processo não é ergódico na autocorrelação.

15. (a) $R_{XX}(\tau) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n^2}{2} \cos(\omega_n \tau)$.

(b) $S_{XX}(\omega) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n^2 \pi}{2} \left[\, \delta(\omega - \omega_n) + \delta(\omega + \omega_n) \,\right].$

16. $\mathrm{E}[Y(t)] = 2$ e $R_{YY}(\tau) = 4 + R_{XX}(\tau)$. Portanto, o processo é estacionário no sentido amplo.

17. (a) $\overline{P} = R_{XX}(0) = 8$.

    (b)

$$S_{YY}(\omega) = \begin{cases} 2(1 - |\omega|), & |\omega| \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    (c) $\mathrm{var}[Y(t)] = \overline{R}_{YY}(0) = 2$

18. (a) $\mu_V(t) = \frac{5}{t}\left[e^{-0.9t} - e^{-1.1t}\right] \mu\mathrm{V}$, $t \geq 0$ em segundos.

    (b) $R_{VV}(t_1, t_2) = \frac{5}{t_1 + t_2}\left[e^{-0.9(t_1+t_2)} - e^{-1.1(t_1+t_2)}\right] \mu\mathrm{V}^2$, $t_1, t_2 \geq 0$ em segundos.

    (c) Não.

    (d) $\Pr[T < 0.95 \text{ ms}] = 0.25$

19. (a) $\mu_Y(t) = v(t)$

    (b) $R_{YY}(t_1, t_2) = v(t_1)v(t_2) + 2\pi \cdot 10^{-6}\, \delta(t)$

    (c) $B = \frac{1}{4\pi} \cdot 10^4$