ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

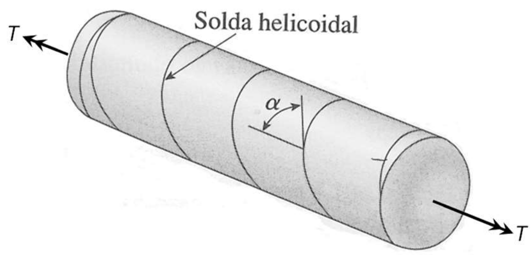
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II / Profs.: C.A. Martins e R. Ramos Jr.

Prova Substitutiva - 06/12/2016 / Duração da Prova: 100 minutos

Não é permitido o uso de calculadoras ou qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova!

1ª Questão (3,0 pontos):



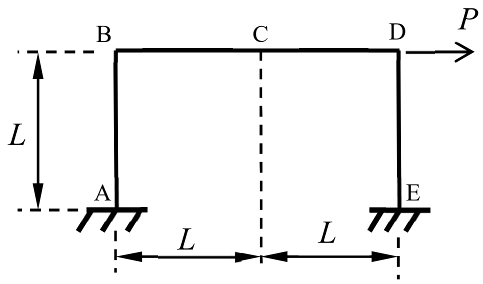
Um tubo de raio R é construído a partir de uma chapa de aço longa e fina, de espessura $t \ll R$, enrolando-se a chapa de aço em torno de um mandril e soldando-se ao longo das bordas da chapa para fazer uma junção helicoidal, conforme a figura. A solda helicoidal faz um ângulo α com o eixo longitudinal e é feita com um material dúctil, com tensão de escoamento σ_y. Determinar a faixa de valores de α para que o fator de segurança na solda seja no mínimo igual a FS, quando o eixo está submetido a um momento de torção T.

Dados: $\pi = 3$, $t = 1mm$, $R = 4cm$, $FS = 2$,
$T = 2{,}4\ kNm$, $\sigma_y = 500MPa$

2ª Questão (3,5 pontos):

O pórtico ilustrado na figura ao lado é formado por barras de mesma rigidez flexional EI. Desprezando a contribuição das forças normais e das forças cortantes no cálculo da energia complementar total do pórtico e considerando o carregamento indicado, pede-se:

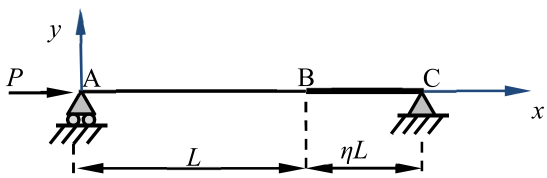
a) Determinar o diagrama de momentos fletores;
b) Determinar o deslocamento horizontal em B;
c) Determinar a rotação em C.



3ª Questão (3,5 pontos):

A barra indicada na figura é composta de duas partes: o trecho AB é deformável, possui comprimento L e rigidez flexional EI, enquanto o trecho BC é indeformável (rígido) e possui comprimento ηL, sendo η um adimensional. Sobre a extremidade A da barra atua uma força de compressão de magnitude P. Pede-se:

a) Determinar a equação característica que permite determinar as cargas críticas de flambagem, considerando que a flambagem do trecho AB ocorra no regime elástico-linear (deixe claro todo o procedimento de cálculo na obtenção da equação característica);
b) Para o caso particular em que η = 0, determine as cargas críticas de flambagem a partir da equação característica obtida anteriormente e comente os resultados obtidos;
c) Para o caso particular em que η = 2, encontre uma estimativa para a menor carga crítica de flambagem, e justifique sua estimativa de forma apropriada.



Resolução

1ª Questão:

A máxima tensão de cisalhamento τ devida ao momento de torção T ocorre na superfície externa do eixo. Então

$$\tau = \frac{TR}{I_P}$$

Como $t \ll R$, então

$$I_P = 2\pi t R^3$$

e, portanto,

$$\tau = \frac{T}{2\pi t R^2} = 250MPa \qquad (1,0)$$

O estado de tensão em um ponto da superfície externa do eixo pode ser representado pela matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $\vec{\imath}$ for um versor paralelo à linha central do eixo e $\vec{\jmath}$, o versor ortogonal à solda é dado por:

$$\vec{n} = \text{sen}\alpha\vec{\imath} + \cos\alpha\vec{\jmath}$$

Então o vetor tensão em um ponto da solda é

$$\vec{\rho}_w = \tau(\cos\alpha\vec{\imath} + \text{sen}\alpha\vec{\jmath})$$

A tensão normal será:

$$\sigma_w = \vec{\rho}_w \cdot \vec{n} = 2\tau\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha = \tau\,\text{sen}2\alpha$$

a tensão tangencial será dada por:

$$\tau_w = \pm\sqrt{\rho_w^2 - \sigma_w^2} = \pm\tau\cos2\alpha \qquad (1,0)$$

Supondo que a falha ocorra por cisalhamento na direção da solda:

$$|\tau_w| \le \frac{\sigma_y}{2FS}$$

e, portanto,

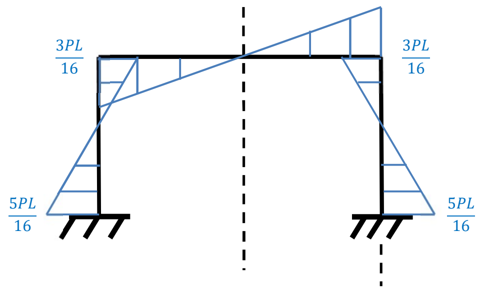
$$|\cos2\alpha| \le \frac{\sigma_y}{2FS\tau} = \frac{1}{2} \Rightarrow 60° \le 2\alpha \le 120° \Rightarrow 30° \le \alpha \le 60° \qquad (1,0)$$

(Outros critérios de falha poderiam ser adotados, como, por exemplo, máxima tensão de tração na solda)

2ª Questão:

a) O diagrama de momentos fletores fica dado por:

1,5 pto



b) O deslocamento horizontal em B vale:

1,0 pto

$$\delta_{H,B} = \frac{7PL^3}{96EI}$$

c) A rotação em C vale:

1,0 pto

$$\theta_C = \frac{PL^2}{32EI}$$

3ª Questão:

a) A equação característica fica dada por:

1,5 pto

$$sen(kL) + \eta(kL)\cos(kL) = 0$$

Ou, de forma equivalente:

$$tan(kL) + \eta(kL) = 0$$

Onde:

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

b) Para η = 0, a equação característica fica:

1,0 pto

$$sen(kL) = 0$$

Ou seja:

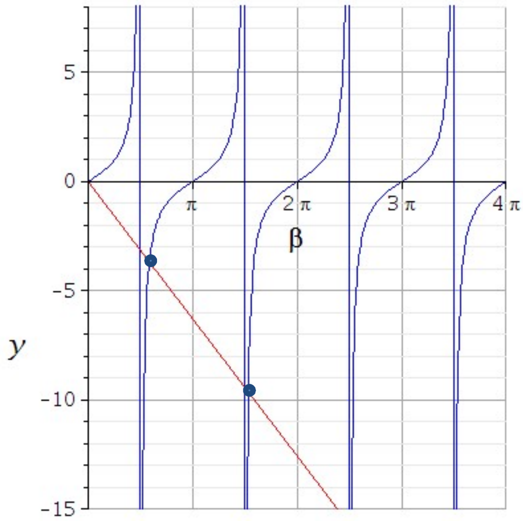
$$kL = n \quad \Leftrightarrow \quad k^2 = \frac{P}{EI} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \Leftrightarrow \quad P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$$

O que reproduz, como esperado, as cargas críticas de flambagem de uma viga biapoiada, de comprimento *L* e com rigidez flexional *EI* constante.

c) Para o caso em que η = 2, a equação característica fica:

$$tan(kL) = -2(kL)$$

Um simples esboço das funções $f(\beta) = \tan(\beta)$ e $g(\beta) = -2\beta$, com $\beta = kL$, como indicado abaixo, nos permite obter estimativas para as cargas críticas de flambagem: os pontos assinalados na figura mostram as duas primeiras cargas críticas.



Como uma estimativa a favor da segurança, podemos considerar para a 1ª carga crítica a seguinte aproximação:

1,0 pto

$$\beta = kL \cong \frac{\pi}{2}$$

O que leva a:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \cong \frac{\pi^2}{4L^2} \quad \Leftrightarrow \quad P_{cr} \cong \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

Veja ainda pelo gráfico acima que, a medida em que reduzimos o valor do coeficiente da função linear $g(\beta) = -\eta\beta$ (ou seja, a medida em que reduzimos o valor de η), a primeira raiz da equação característica se aproxima cada vez mais do valor encontrado no item (b) anterior, ou seja:

Para $\eta \to 0$, temos:

$$P_{cr,1} \to \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$