ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

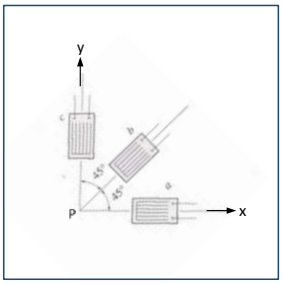
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II / Profs.: C.A. Martins e R. Ramos Jr.

2ª Prova - 18/10/2016 / Duração da Prova: 100 minutos

Não é permitido o uso de calculadoras ou qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova!

1ª Questão (4,0 pontos):



A roseta da figura está colada em um ponto *P* de uma placa plana submetida a esforços no seu plano. O material da placa tem módulo de elasticidade $E = 100\,GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}5$. As leituras dos extensômetros são $\varepsilon_a = 300\mu$, $\varepsilon_b = 150\mu$ e $\varepsilon_c = 0$. Pedem-se as deformações principais, as direções principais de deformação e os círculos de Mohr das deformações para o ponto *P*.

2ª Questão (3,0 pontos):

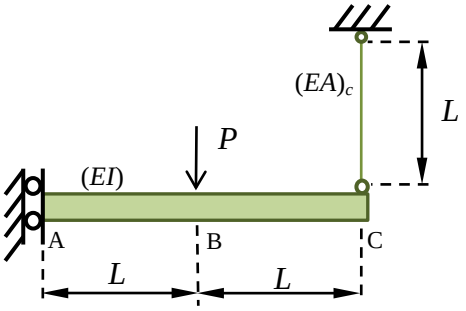
O eixo da figura é formado por dois materiais. Nas extremidades o material é dúctil, com tensão de escoamento $\sigma_y = 300MPa$. Na parte central o material é frágil, com tensão de ruptura $\sigma_r = 200MPa$. O eixo tem diâmetro $d = 2cm$ e momento polar $I_P = 1{,}6cm^4$. Sabendo que está aplicado ao eixo um torque $T = 160Nm$, determine qual é o fator de segurança.

3ª Questão (3,0 pontos):

A estrutura abaixo é formada por uma viga uniforme ABC, de comprimento total 2*L*, seção transversal retangular (*b*×*h*), feita com material de módulo de elasticidade *E*, e é submetida a um único esforço vertical de intensidade *P*, aplicado no meio do vão. Considerando que a extremidade C esteja ligada a um cabo de rigidez axial $(EA)_c$ e comprimento *L*, pede-se determinar o deslocamento vertical em *B* (expressão literal e valor numérico), após a aplicação da carga, utilizando o Princípio do Trabalho e da Energia.

Dados:

$P = 2$ kN, $L = 1{,}0$ m, $b = 5$ cm, $(h/L) = 0{,}1$, $E = 200$ GPa, $(EA)_c = 1000$ kN



Resolução

1ª Questão (4,0 pontos):

i) Cálculo das deformações:

Para uma roseta a 45º, as deformações são calculadas por:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_c$$
$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)$$

Então:

$$\varepsilon_x = 300\mu$$
$$\varepsilon_y = 0$$
$$\gamma_{xy} = 0$$

(1,0)

ii) Cálculo das tensões:

Como o estado de tensão é plano, sabemos que $\sigma_z = 0$, as outras tensões normais podem ser calculadas a partir da lei de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

ou,

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$

Então:

$$\sigma_x = 40MPa$$
$$\sigma_y = 20MPa$$

(1,0)

iii) Cálculo de ε_z:

O alongamento ε_z pode ser calculado pela lei de Hooke:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

ou seja,

$$\varepsilon_z = -300\mu$$

(0,5)

iv) Direções principais de deformação:

Como o estado de tensões é plano, a direção *z* é uma direção principal de tensão. Para um material elástico linear as direções principais de tensão e de deformação coincidem. Então a direção do eixo *z* é uma das direções principais. Como $\gamma_{xy} = 0$, as outras duas direções principais coincidem com as direções dos eixos *x* e *y*.

(0,5)

v) Deformações principais:

Conforme o item iv, as deformações principais são ε_x, ε_ye ε_z. Assim:

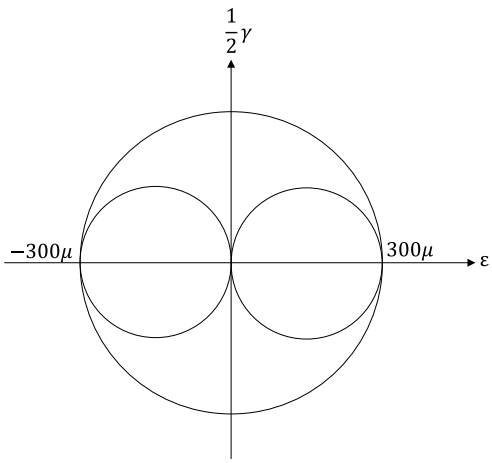
$$\varepsilon_1 = 300\mu$$

$$\varepsilon_2 = 0$$

$$\varepsilon_3 = -300\mu$$

(0,5)

v) Círculos de Mohr:



(0,5)

2ª Questão (3,0 pontos):

Um ponto de um eixo em torção pura está submetido a um estado de tensão que pode ser representado pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim as tensões principais serão:

$$\sigma_1 = \tau$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -\tau$$

onde

$$\tau = \frac{Tr}{I_P}$$

As maiores tensões principais ocorrerão na face externa do eixo e serão dadas por

$$\sigma_1 = \frac{Td}{2I_P}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -\frac{Td}{2I_P}$$

(1,0)

i) Como as extremidades são feitas de um material dúctil, um critério de falha adequado é o Critério de Tresca:

$$FS = \frac{\sigma_y}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\sigma_y}{2\tau} = \frac{\sigma_y I_P}{Td}$$

em valores numéricos:

$$FS = \frac{300 \times 10^6 \times 1{,}6 \times 10^{-8}}{160 \times 2 \times 10^{-2}} = 1{,}5$$

(1,0)

(alternativamente pode ser adotado o critério de von Mises)

ii) Como a parte central é feita de um material frágil, um critério de falha adequado é o critério de Rankine:

$$FS = \frac{\sigma_r}{\sigma_1} = \frac{\sigma_r 2I_p}{Td}$$

em valores numéricos:

$$FS = \frac{200 \times 10^6 \times 2 \times 1{,}6 \times 10^{-8}}{160 \times 2 \times 10^{-2}} = 2$$

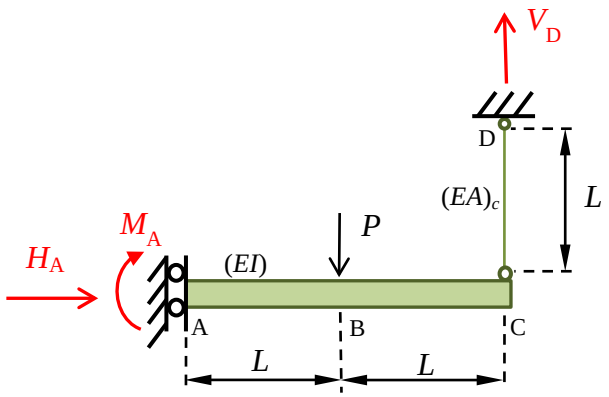
iii) O fator de segurança do eixo será o mínimo entre i e ii, então:

$$FS = 1{,}5$$

(1,0)

3ª Questão (3,0 pontos):

A figura abaixo ilustra o diagrama de corpo livre da estrutura fornecida:



A estrutura é isostática e, portanto, todas as reações vinculares podem ser obtidas a partir das equações de equilíbrio estático, a saber: (0,5)

$$\sum F_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_D = P$$

$$\sum M_{pólo\ A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_D.(2L) = P.L + M_A \quad \Leftrightarrow \quad M_A = P.L$$

A aplicação do Princípio do Trabalho e da Energia para a determinação do deslocamento vertical em B fornece (para estruturas com comportamento elástico-linear):

$$U = U^* = W^* = W$$

Onde:

$$W^* = W = \frac{P.\delta_{v,B}}{2}$$

e (desprezando a contribuição das forças cortantes no cálculo da energia complementar da viga):

$$U^* = \left(\sum \int \frac{M^2}{2EI} ds\right)\Bigg|_{viga} + \left(\int \frac{N^2}{2(EA)_c} ds\right)\Bigg|_{cabo}$$

$$U^* = \int_0^L \frac{(P.s)^2}{2EI} ds + \int_0^L \frac{(P.L)^2}{2EI} ds + \int_0^L \frac{(P)^2}{2(EA)_c} ds$$

$$U^* = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{P^2L^3}{2EI} + \frac{P^2.L}{2(EA)_c} = \frac{2P^2L^3}{3EI} + \frac{P^2.L}{2(EA)_c}$$

(1,5)

Da igualdade entre as quantidades indicadas virá:

$$\frac{P.\delta_{v,B}}{2} = \frac{2P^2L^3}{3EI} + \frac{P^2L}{2(EA)_c}$$

Ou seja:

$$\delta_{v,B} = \frac{4PL^3}{3EI} + \frac{PL}{(EA)_c}$$

(0,5)

Como a seção transversal da viga é retangular, virá:

$$\delta_{v,B} = 16\frac{P}{Eb}.\left(\frac{L}{h}\right)^3 + \frac{PL}{(EA)_c}$$

Substituindo os valores numéricos dados (para $\delta_{v,B}$ expresso em mm):

$$\delta_{v,B} = \left[16\frac{2.10^3}{200.10^9.5.10^{-2}}.(10)^3 + \frac{2.10^3.1}{10^6}\right].10^3 mm$$

Resultando:

$$\delta_{v,B} = [3{,}2 + 2]mm$$

$$\delta_{v,B} = 5{,}2\ mm$$

(0,5)