



PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II
13ª Lista de Exercícios

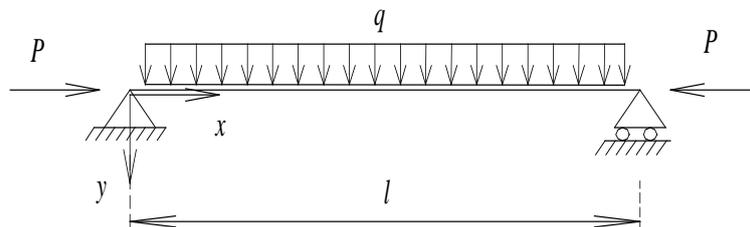
1) Determine as duas primeiras cargas críticas de flambagem (auto-valores) e os respectivos modos de flambagem (auto-vetores) para a barra de comprimento l e rigidez flexional EI indicada abaixo. Plotar os modos de flambagem obtidos. Dados: EI , l .



2) Mostre, utilizando a teoria de 2ª ordem, que a expressão da linha elástica da viga-coluna indicada abaixo (comprimento l e rigidez flexional EI) quando submetida a um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q e a forças de compressão de intensidade P é dada por:

$$v(x) = \frac{q}{k^4 \cdot EI} \left[\tan\left(\frac{k \cdot l}{2}\right) \cdot \text{sen}(k \cdot x) + \cos(k \cdot x) + \frac{(k \cdot x)^2}{2} - \left(\frac{k \cdot l}{2}\right) \cdot (k \cdot x) - 1 \right]$$

onde: $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ (observe o caráter não-linear entre os deslocamentos transversais $v(x)$ e a força P).



3) Utilizando o resultado do problema 2, mostre que o deslocamento transversal em $x = l/2$ é dado por:

$$\delta = v(l/2) = \frac{q \cdot l^4}{32 \cdot EI} \left[\frac{2 \cdot \sec(u) - u^2 - 2}{u^4} \right], \text{ onde } u = \frac{k \cdot l}{2}$$

Mostre então que:

- a expressão do deslocamento δ dado acima recupera assintoticamente o deslocamento devido apenas ao carregamento uniformemente distribuído no limite para $P \rightarrow 0$;
- é possível determinarmos a carga crítica de flambagem através da análise da expressão acima, notando, por exemplo, que, quando $u \rightarrow \frac{\pi}{2}$, teremos $\delta \rightarrow \infty$, ou seja, o deslocamento torna-se indeterminado a medida em que P se aproxima da carga crítica. (Obs: o mesmo resultado seria obtido se analisássemos o deslocamento em outro ponto da viga, a não ser, é claro, nas extremidades).

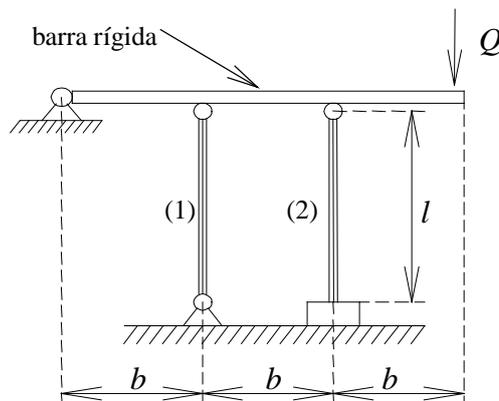


4) O sistema indicado abaixo é formado por uma viga rígida (“indeformável”) conectada a duas colunas: a coluna (1) é biarticulada nas duas extremidades, enquanto a coluna (2) é engastada na base e articulada no topo. As colunas são feitas de aço estrutural cujas propriedades são dadas abaixo. Pretende-se utilizar o mesmo perfil (tubular) para as duas colunas. Considerando que o diâmetro externo das colunas é $d = 50$ mm, determine qual deve ser a espessura utilizada para que o coeficiente de segurança com relação à estabilidade do sistema (como um todo) seja igual a 2 para o carregamento indicado na figura.

Dados do material: $E = 200$ GPa, $\sigma_p = 210$ MPa, $\sigma_e = 240$ MPa

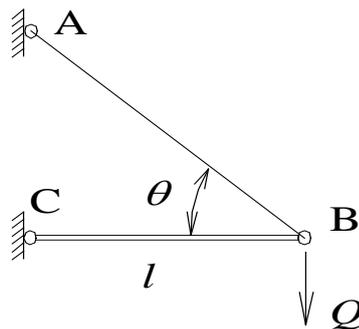
Dados geométricos: $l = 2500$ mm, $b = 1500$ mm, $d = 50$ mm (diâmetro externo das colunas)

Dados do carregamento: $Q = 50$ kN



5) A figura abaixo mostra uma barra horizontal BC, de diâmetro $D = 50,8$ mm e módulo de elasticidade $E = 207$ GPa. O fio AB tem um diâmetro $d = 6,35$ mm e pode suportar uma tensão máxima $\sigma_{ult} = 345$ MPa. Determine o valor máximo que a força Q pode ter para que o sistema (barra + fio) não falhe.

Dados adicionais: $l = 4570$ mm; $\theta = 45^\circ$; $\sigma_p = 210$ MPa e $\sigma_e = 240$ MPa (para a barra BC).

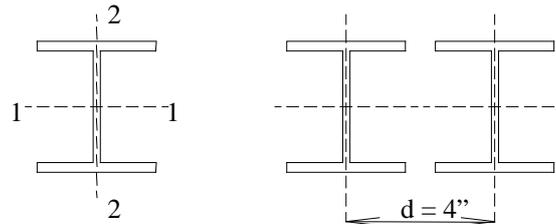


6) Uma coluna é constituída por dois perfis I (ver [características do perfil](#) na tabela a seguir) ligados de forma a trabalharem como um único pilar (ver figura). Admitindo que tal pilar seja biarticulado em suas extremidades, determine o comprimento mínimo do mesmo para o qual a fórmula de Euler seria válida (flambagem em regime elástico). Qual seria a carga crítica de flambagem neste caso?

Dados: $E = 210$ GPa, $\sigma_p = 210$ MPa.



Perfil	Área	Altura	I (eixo 1-1)	i (eixo 1-1)	I (eixo 2-2)	i (eixo 2-2)
S6 x 12,5	3,67 in ²	6,00 in	22,1 in ⁴	2,45 in	1,82 in ⁴	0,705 in



7) Um pilar de aço tem seção transversal retangular de dimensões $a \times 2a$ e comprimento $l = 1,5\text{m}$. Pede-se determinar o valor da dimensão a sabendo que este pilar é biarticulado e que deve suportar uma carga axial compressiva (centrada) de intensidade $P = 800\text{ N}$ com um coeficiente de segurança $\eta = 2$.

Dados: $E = 210\text{ GPa}$, $\sigma_e = 240\text{ MPa}$, $\sigma_p = 210\text{ MPa}$.

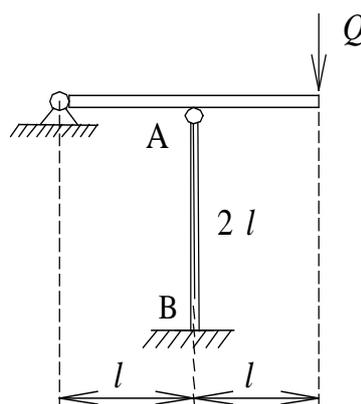
8) A coluna AB possui seção transversal circular cheia (diâmetro d), encontrando-se engastada na base e articulada, no topo, a uma barra horizontal rígida que suporta uma força concentrada $Q = 80\text{ kN}$, conforme a figura. Determine o diâmetro (d) necessário à coluna AB, para que o fator de segurança com respeito à flambagem ou escoamento seja C.S. = 2 (verifique se a fórmula de Euler pode ser utilizada neste caso).

Dado: $l = 1,0\text{ m}$

$E = 200\text{ GPa}$ (módulo de elasticidade)

$\sigma_p = 200\text{ MPa}$ (tensão limite de proporcionalidade)

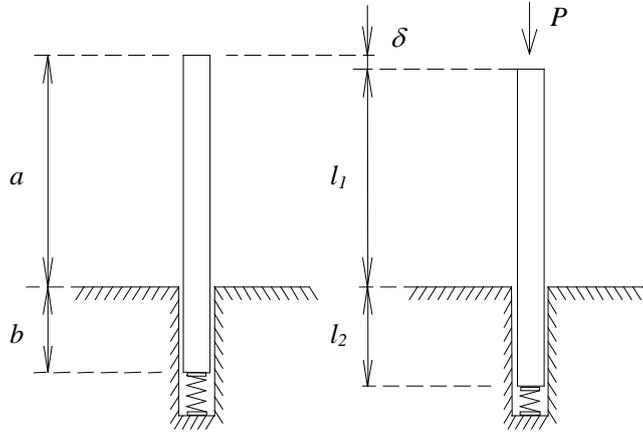
$\sigma_e = 250\text{ MPa}$ (tensão de escoamento)



9) A barra vertical de seção circular (diâmetro d) e comprimento total l encontra-se inicialmente descarregada, tendo parte de seu comprimento fora e parte dentro de uma cavidade indeformável. No interior da cavidade há uma mola linear de constante k_m , também inicialmente descarregada (desprezamos o efeito do peso próprio da barra). Uma força de compressão P é então gradativamente aplicada até que a flambagem da barra ocorra. Determine o mínimo valor de P para o qual a flambagem ocorre. Verifique se a fórmula de

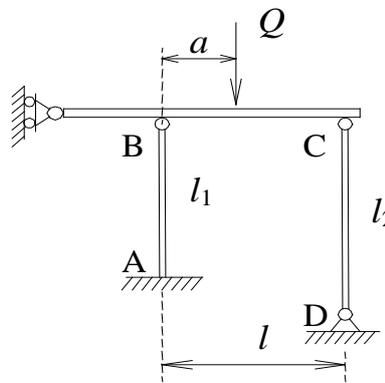


Euler é válida nesta situação ou não. Dados: $l = 3000$ mm; $a = 2200$ mm; $b = 800$ mm; $d = 60$ mm; $E = 200$ GPa; $\sigma_p = 210$ MPa; $\sigma_e = 240$ MPa; $k_m = 500$ N/mm.

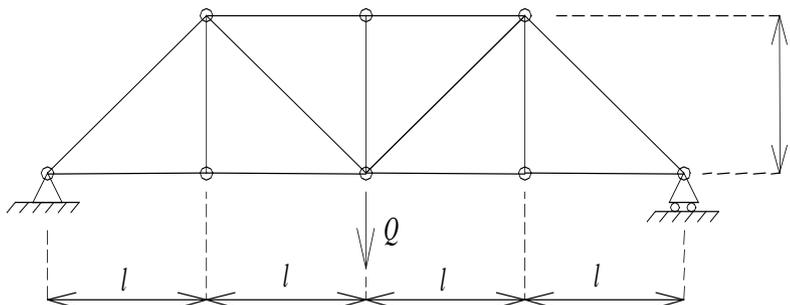


10) A barra horizontal mostrada na figura é simplesmente apoiada pelas colunas AB e CD, as quais são articuladas no topo à barra horizontal, sendo o suporte A fixo e o suporte D articulado. Ambas colunas tem seção transversal quadrada com largura $b = 15$ mm. Determine a máxima carga Q que pode ser aplicada ao sistema para que nenhuma das colunas flambe.

Dados: $l = l_1 = 1,0$ m, $l_2 = 1,2$ m, $a = 0,4$ m, $E = 200$ GPa



11) A estrutura treliçada indicada abaixo é formada por tubos de mesmo material e mesma seção transversal. O carregamento consiste em uma única força Q aplicada conforme indica a figura. Determine qual o valor máximo de Q para que nenhuma barra sofra flambagem. Dados: EI, l .





Respostas da 13^a Lista de Exercícios

1) A primeira carga crítica de flambagem ocorre para $k.l = 2\pi$, onde $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, resultando:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 \cdot EI}{l^2}$$

e o primeiro modo de flambagem é dado por: $v(x) = A \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) - 1 \right]$

A segunda carga crítica de flambagem ocorre para $k.l \cong 8,9868$, resultando:

$$P_{cr} \cong \frac{8,183 \cdot \pi^2 \cdot EI}{l^2}$$

e o segundo modo de flambagem é: $v(x) = A \cdot \left[\sin(k \cdot x) - \frac{k \cdot l}{2} \cdot \cos(k \cdot x) - k \cdot x + \frac{k \cdot l}{2} \right]$, com $k \cdot l \cong 8,9868$.

4) $t \cong 5,2$ mm

5) Carga máxima para que não haja rompimento do fio: $Q_{máx} \cong 7,73$ kN

Carga máxima para que não haja flambagem da barra: $Q_{máx} \cong 31,98$ kN

Logo: $Q_{máx} \cong 7,73$ kN (condição limite: rompimento do fio)

6) $l_{mín} = 5,35$ m , $P_{cr} = 994,4$ kN.

7) $a = 10,1$ mm.

8) $d = 50,4$ mm. Vale a fórmula de Euler (flambagem ocorre no regime elástico-linear).

9) $P_{cr} \cong 74,65$ kN. Vale a fórmula de Euler (flambagem ocorre no regime elástico-linear).

10) $Q_{máx} \cong 14,46$ kN (caso este valor seja ultrapassado a barra CD irá flambar)

$$11) Q_{máx} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2}$$