FÍSICA I - AULA 21 (2022-1)

Dinâmica do corpo rígido (1)

1. Prólogo: noções importantes já vistas

Para sistemas de N pontos (possivelmente contínuos), os seguintes resultados são <u>importantíssimos</u>:

(a) $$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)}$$ onde
$$\begin{cases} M = \sum_{i=1}^{N} m_i = \text{massa total} \\ \vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \text{momento total} \\ \vec{F}^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i^{(ext)} = \text{resultante das forças externas} \end{cases}$$

É importante também definir o Centro de Massa (CM):

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \Rightarrow M\dot{\vec{R}}_{CM} = \vec{P}$$

(b) $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(ext)}$$ com
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i = \text{momento angular total}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{\tau}^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{f}_i^{(ext)} = \text{torque total das forças externas}$$

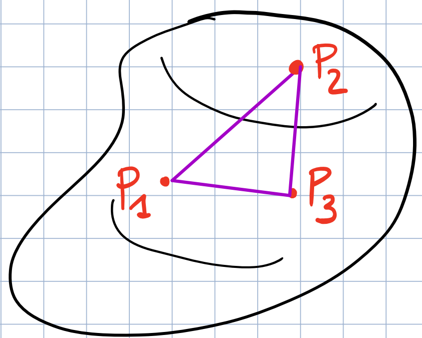
Importante: $\vec{L}$ e $\vec{\tau}^{(ext)}$ dependem da escolha da origem do sistema de coordenadas!

2. Corpo rígido: definição

Um corpo rígido é um corpo (possivelmente contínuo) onde as distâncias relativas entre os vários pontos se mantém constante.

É uma boa aproximação para corpos sólidos com pouca elasticidade.

De quantas variáveis (= graus de liberdade) precisamos para descrever completamente um corpo rígido (em relação a um dado referencial)?



(a) 3 pontos determinam completamente a posição do corpo (= 9 coordenadas)

(b) As distâncias relativas são fixadas

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \|\vec{P}_2 - \vec{P}_1\| = \text{const} \\ \|\vec{P}_2 - \vec{P}_3\| = \text{const} \\ \|\vec{P}_1 - \vec{P}_3\| = \text{const} \end{array}\right\} \text{3 condições}$$

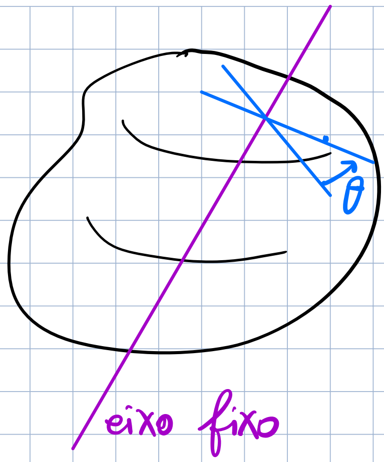
$$\Downarrow$$

$9 - 3 = $ 6 graus de liberdade

O movimento mais geral de um corpo rígido será dado por uma combinação de translação do CM e movimento entorno do CM. Como o corpo é rígido, o movimento entorno do CM deve ser de rotação (todo os pontos estão em movimento "juntos")

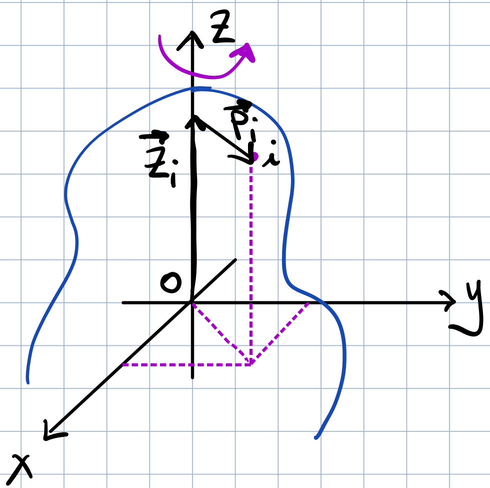
3. Rotação entorno de um eixo fixo

O caso mais simples de movimento de um corpo rígido é aquele de rotação entorno de um eixo fixo:



APENAS 1 GRAU DE LIBERDADE (θ)!

Descrição quantitativa: fixemos eixos fixos



posição de um ponto qualquer: determinada por $\vec{z}_i$ & $\vec{\rho}_i$

Rotação entorno do eixo z:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad \text{com} \quad \vec{r}_i = \vec{z}_i + \vec{\rho}_i$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i \ /\!/ \text{ plano } x,y$$

Momento angular total:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{z}_i + \vec{\rho}_i) \times m_i \vec{v}_i =$$

$$= \sum_i \vec{z}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) + \sum_i \vec{\rho}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)$$

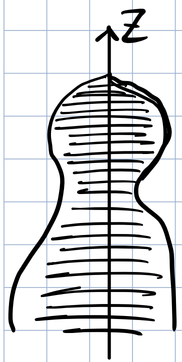
$=$ usando a identidade $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

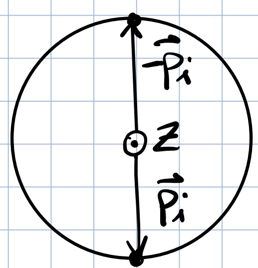
$$= \underbrace{\sum_i m_i (-z_i \omega) \vec{\rho}_i}_{\vec{L}_\perp} + \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega}}_{L_z \hat{e}_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)\, \omega\, \hat{e}_z}$$

O termo $\vec{L}_\perp$ possui as seguintes propriedades:

(a) depende da escolha do polo O (porque z_i depende de O)

(b) no caso de um corpo rígido simétrico respeito ao eixo z temos a situação seguinte:



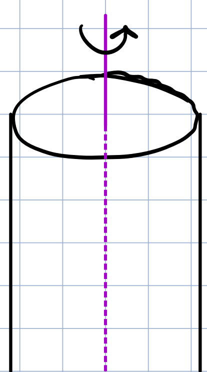


Como para cada ponto há um ponto simétrico com $-\vec{\rho}_i$ (ambos na mesma altura z_i) portanto vale

$$\vec{L}_\perp = -\omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i = 0$$

(cada contribuição tem uma contribuição oposta)

Exemplo: cilindro em rotação entorno do eixo



$$\vec{L}_\perp = 0$$

Em relação à componente paralela ao eixo, definimos o

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{MOMENTO DE INÉRCIA (em relação ao eixo } z\text{):} \\[2ex] \qquad I = \sum_i m_i \rho_i^2 \qquad \Rightarrow \qquad L_z = I\omega\end{array}}$$

Se $\tau_z^{(ext)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dL_z}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I\omega = \text{const}}$

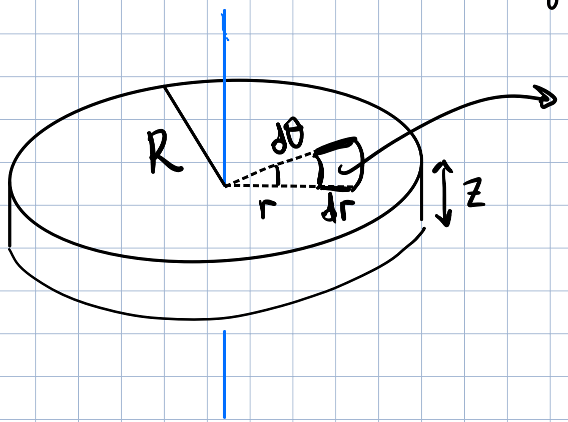
Antes de explorar mais consequências dinâmicas das equações vistas até agora, vamos ver um exemplo de cálculo do momento de inércia para um corpo contínuo.

3. Momento de inércia de um disco fino

A generalização da fórmula vista acima para o caso contínuo é

$$I = \int_{corpo} dm\,(x^2+y^2)$$

No caso de um disco fino uniforme de massa M temos



$$dm = \rho\, dV = \rho\, z\, dr\, r d\theta$$
$$= \frac{M}{V} z r dr d\theta$$
$$= \frac{M}{\pi R^2 z} z\, r dr d\theta = \frac{M}{\pi R^2} r dr d\theta$$

Como escrever x^2+y^2 em coordenadas polares?

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = r^2$$

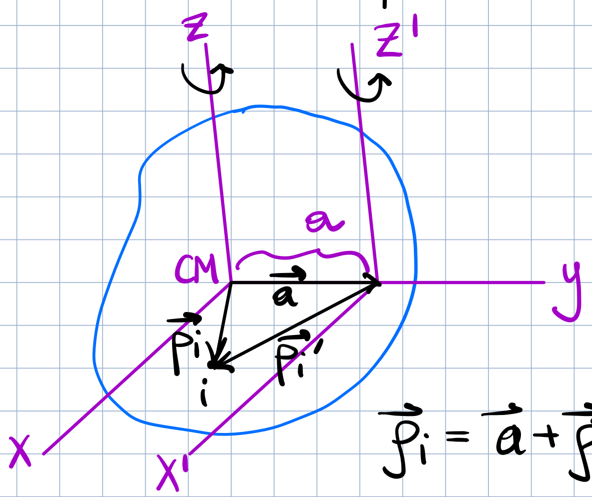
Logo $$I = \int dm\,(x^2+y^2) = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta\; r^3$$

$$= \frac{M}{\cancel{\pi} R^2}\,\cancel{2\pi}\,\frac{R^4}{\cancel{4}\,2} = \frac{MR^2}{2}$$

Mais exemplos podem ser encontrados no livro "Física básica" 1 do Moyses.

4. Teorema dos eixos paralelos

Vamos agora mostrar que conhecendo I calculado respeito a um eixo que passa para o CM, o cálculo de I respeito a um eixo paralelo ao anterior é imediato:



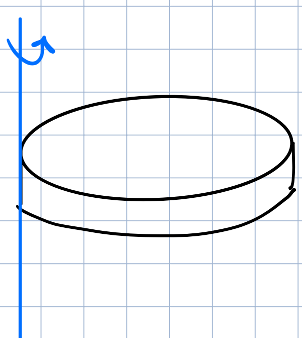
$$\vec{\rho}_i = \vec{a} + \vec{\rho}_i'$$

$$I_z' = \sum_i m_i \vec{\rho}_i'^{\,2} = \sum_i m_i (\vec{\rho}_i - \vec{a})^2 = \sum_i m_i \vec{a}^2 + \sum_i m_i \vec{\rho}_i^{\,2} + 2\Big(\sum_i m_i \vec{\rho}_i\Big)\cdot\vec{a} = M\vec{a}^2 + I_z$$

posição do CM no referencial do CM $\Rightarrow 0$

Como, necessariamente, $M\vec{a}^2 > 0$, o momento de inércia passante para o CM é o menor possível.

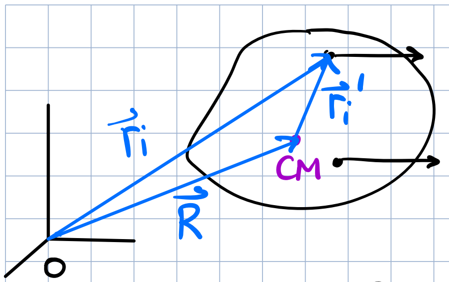
Exemplo:



$$I = I_{CM} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

5. Energia cinética

Para o cálculo geral da energia cinética é conveniente por em evidência o movimento do CM:



$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\,' + \vec{R} \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_i\,' + \dot{\vec{R}}$$

$$K = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\vec{v}_i\,' + \dot{\vec{R}}\right)^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}_i\,'^2 + \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i\,'}_{\vec{P}_{CM}\,' = 0} \cdot \dot{\vec{R}}$$

(momento do CM no referencial do CM)

$$= \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i\,'^2$$

en. cinética do CM

en. cinética respeito ao CM

para um corpo rígido pode só ser de rotação $\Rightarrow \vec{v}_i\,' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i\,'$

$$= \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,2}\right) \omega^2 = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{I \omega^2}{2}$$

Usando agora a forma $\frac{d}{dt}(I\omega) = T_z^{(ext)}$ com $I = \text{const}$:

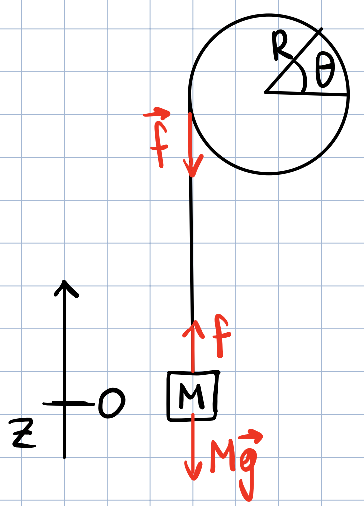
$$I \dot{\omega} = T_z^{(ext)} \Rightarrow I \omega \dot{\omega} = \omega T_z^{(ext)} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{I}{2}\omega^2\right) = \omega T_z^{(ext)}$$

potência do torque

Temos também

trabalho = potência × dt $\Rightarrow$ $dW = \frac{d\theta}{dt}\tau_z^{(ext)}dt = d\theta\,\tau_z^{(ext)}$

6. Um exemplo: roldana com fio puxado por peso



Qual é o movimento de M?

Vínculo cinemático: $\omega R = -\frac{dz}{dt}$

Em termos de forças:

Corpo: $M\ddot{z} = f - Mg$

Roldana: $I\dot{\omega} = Rf$

Derivando o vínculo cinemático: $R\dot{\omega} = -\ddot{z}$

$$\Rightarrow f = \frac{I}{R}\dot{\omega} = -\frac{I}{R^2}\ddot{z}$$

$$\Rightarrow M\ddot{z} = f - Mg = -\frac{I}{R^2}\ddot{z} - Mg$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{z} = \frac{-Mg}{M+\frac{I}{R^2}} = \frac{-MgR^2}{I+MR^2}$$

Em termos de energia:

- $\frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{I}{2}\omega^2 + Mgz = $ Const
- fixando $z=0$ quando o sistema está parado fixa Const $=0$

- Usando o vínculo cinemático: $\dot{z} = -\omega R$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} M \omega^2 R^2 + \frac{I}{2}\omega^2 = -Mgz$$

$$\frac{1}{2}(MR^2 + I)\omega^2 = -Mgz \Rightarrow \omega^2 = -\frac{2Mgz}{I+MR^2}$$

- Derivando no tempo:

vínculo

$$2\omega\dot{\omega} = -\frac{2Mg}{I+MR^2}\dot{z} = \frac{2Mg\,\omega R}{I+MR^2} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{MgR}{I+MR^2}$$

- Derivando o vínculo:

$$\ddot{z} = -R\dot{\omega} = -\frac{MgR^2}{I+MR^2}$$ (como já achamos)