Terceiro bloco

Sistemas de muitos corpos

Conteúdo:

1. Dinâmica de muitos corpos
2. Sistemas de massa variável
3. Colisões Unidimensionais
4. Colisões Bidimensionais
5. Bônus

Oscar Éboli (eboli@if.usp.br)

Dinâmica de muitos corpos

primeira aula

Oscar Éboli 6 de maio de 2022

- Pontos são aproximações! Na natureza há muitos sistemas complexos!

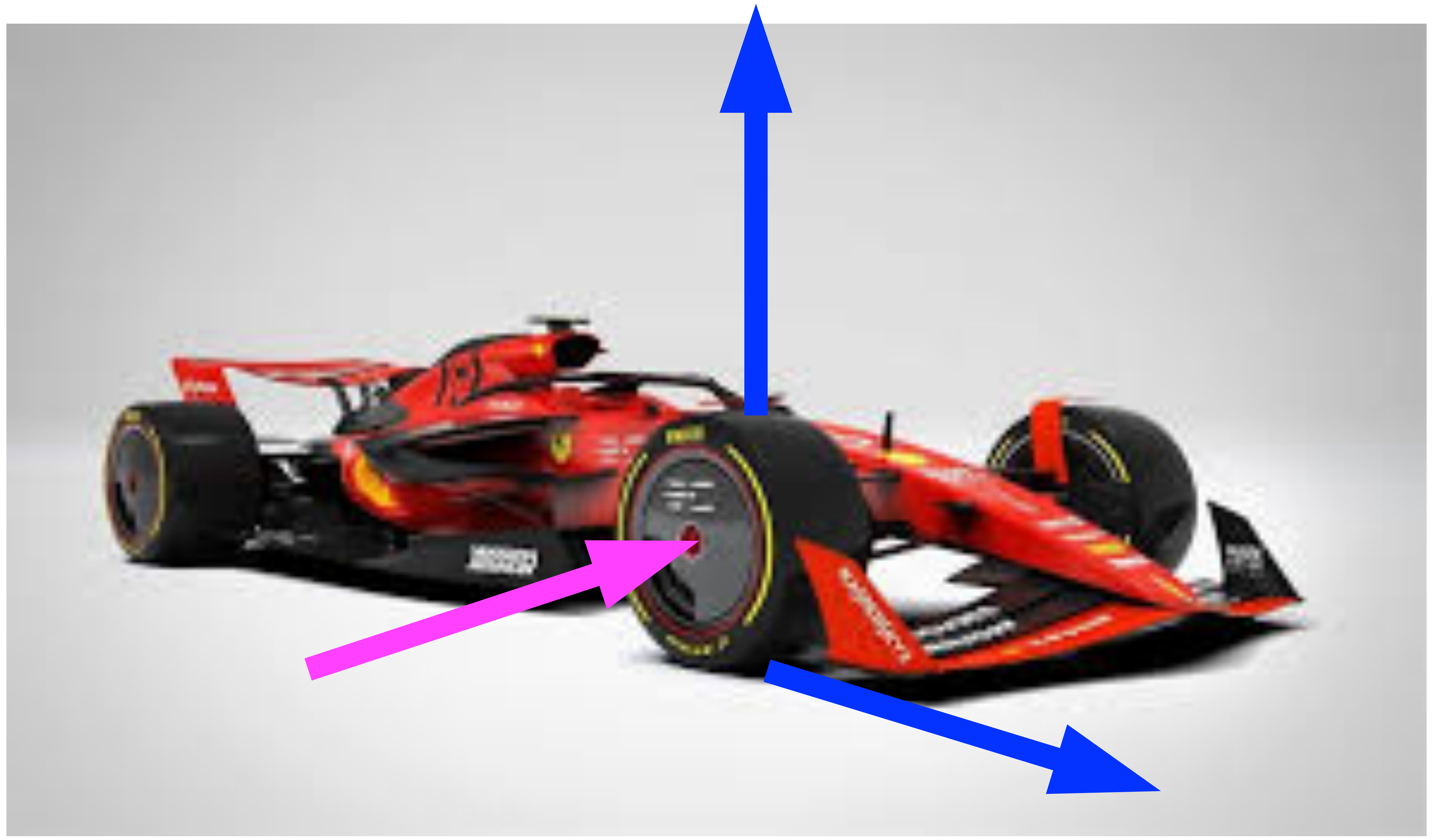
Galáxias são formadas por estrelas + …

Como se movem as galáxias no Universo?

- Dependendo da escala que olhamos

carro de fórmula 1 pode ser tratado como um ponto

- mas os carros tem várias partes
- como relacionar o movimento do ponto com a descrição mais detalhada?



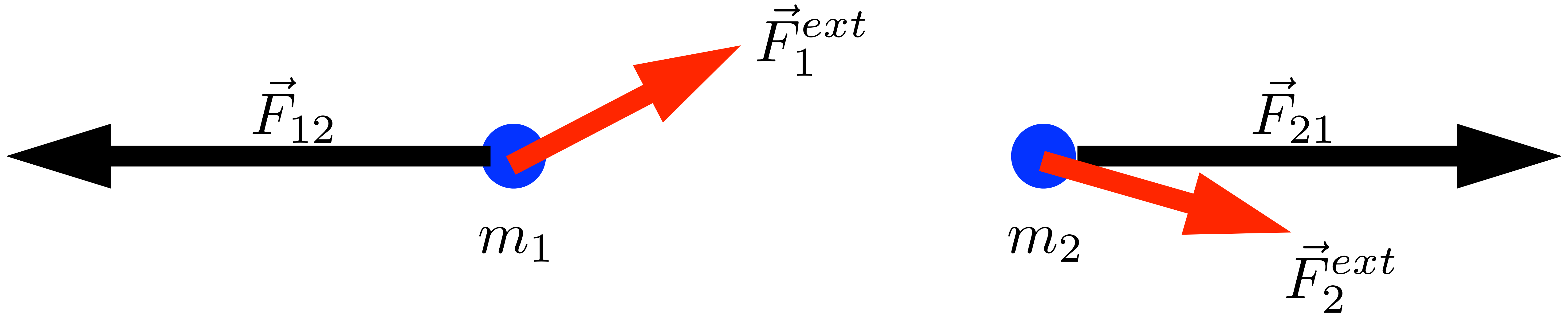
- Como as forças sobre constituintes se combinam?
- O que é o ponto que vemos de longe?
- O que é relevante?

Objetivos das 2 primeiras aulas:

1. Centro de massa
2. Coordenadas relativas
3. Conservação do momento linear

1. Centro de massa

1.a Aquecimento com 2 partículas



$$m_1 \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21}$$

$$m_1 \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}$$

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2}\right) = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$$

massa total

Definimos o centro de massa por:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

e

$$M = m_1 + m_2$$

Então

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \frac{1}{M}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

Logo, o momento do centro de massa é

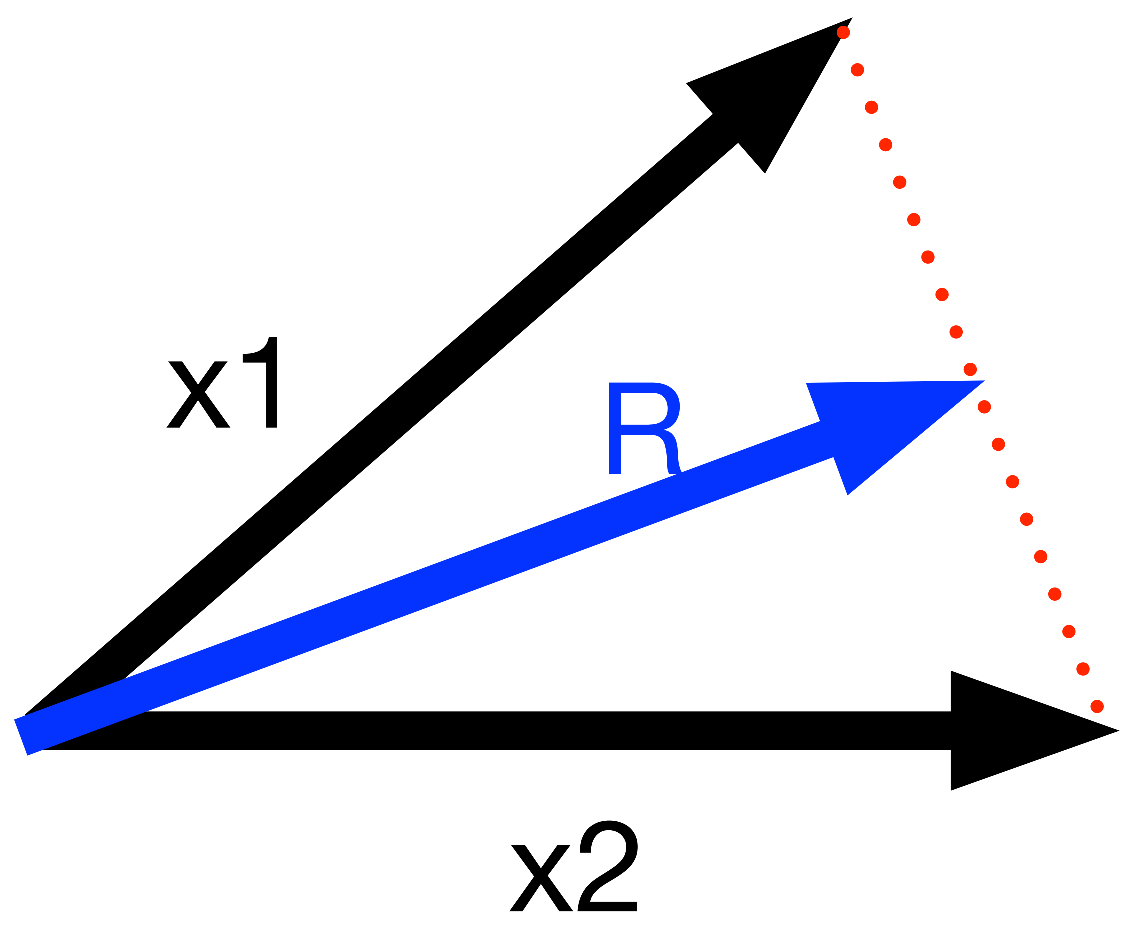
$$\vec{P}_{CM} = M\vec{v}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Discussão

$$\vec{R} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{x}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{x}_2$$

$$= \frac{m_1 + m_2 - m_2}{m_1+m_2}\vec{x}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{x}_2$$

$$= \vec{x}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\vec{x}_2 - \vec{x}_1\right)$$



O CM está entre as duas massas

para $\quad m_1 >> m_2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{R} \simeq \vec{x}_1 + \frac{m_2}{m_1}\left(\vec{x}_2 - \vec{x}_1\right)$

$$m_1 = m_2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{R} \simeq \vec{x}_1 + \frac{1}{2}\left(\vec{x}_2 - \vec{x}_1\right)$$

1.b N corpos:

$$m_1 \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots + \vec{F}_{1N}$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \cdots + \vec{F}_{2N}$$

$$\ldots\ldots$$

$$m_N \frac{d^2\vec{x}_N}{dt^2} = \vec{F}_N^{ext} + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \cdots + \vec{F}_{N(N-1)}$$

Introduzimos a notação:

$$m_k \frac{d^2\vec{x}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^{ext} + \sum_{j\neq k} \vec{F}_{kj} \ \text{para}\ k = 1, 2 \ldots N$$

agora somamos todas as equações

$$\sum_k m_k \frac{d^2\vec{x}_k}{dt^2} = \sum_k \vec{F}_k^{ext} + \sum_k \sum_{j\neq k} \vec{F}_{kj}$$

o último termo é nulo pela terceira lei de Newton:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_k m_k \vec{x}_k\right) = \sum_k \vec{F}_k^{ext}$$

definindo $\quad M = \sum_k m_k$

$$M\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum_k m_k \vec{x}_k}{M}\right) = \sum_k \vec{F}_k^{ext}$$

O centro de massa é $\quad \vec{R} \equiv \frac{\sum_k m_k \vec{x}_k}{M} \quad \Longrightarrow \quad M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_k \vec{F}_k^{ext} = \vec{F}_{total}^{ext}$

Note que

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_k m_k \vec{x}_k}{M}\right)$$

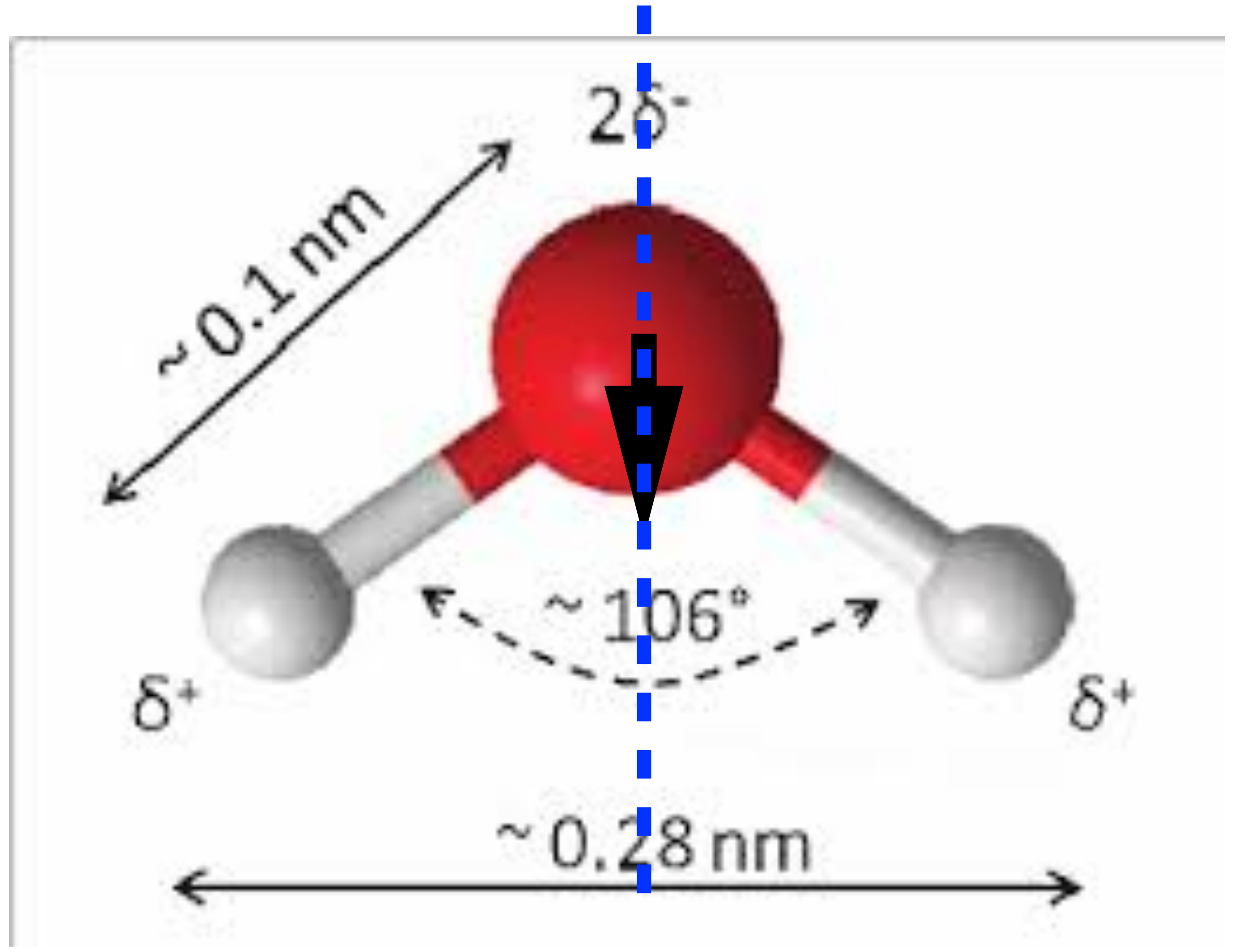
$$= \frac{1}{M}\left(\sum_k m_k \vec{v}_k\right) = \frac{1}{M}\sum_k \vec{p}_k$$

logo

$$\vec{P}_{CM} \equiv M\vec{v}_{CM} = \sum_k \vec{p}_k$$

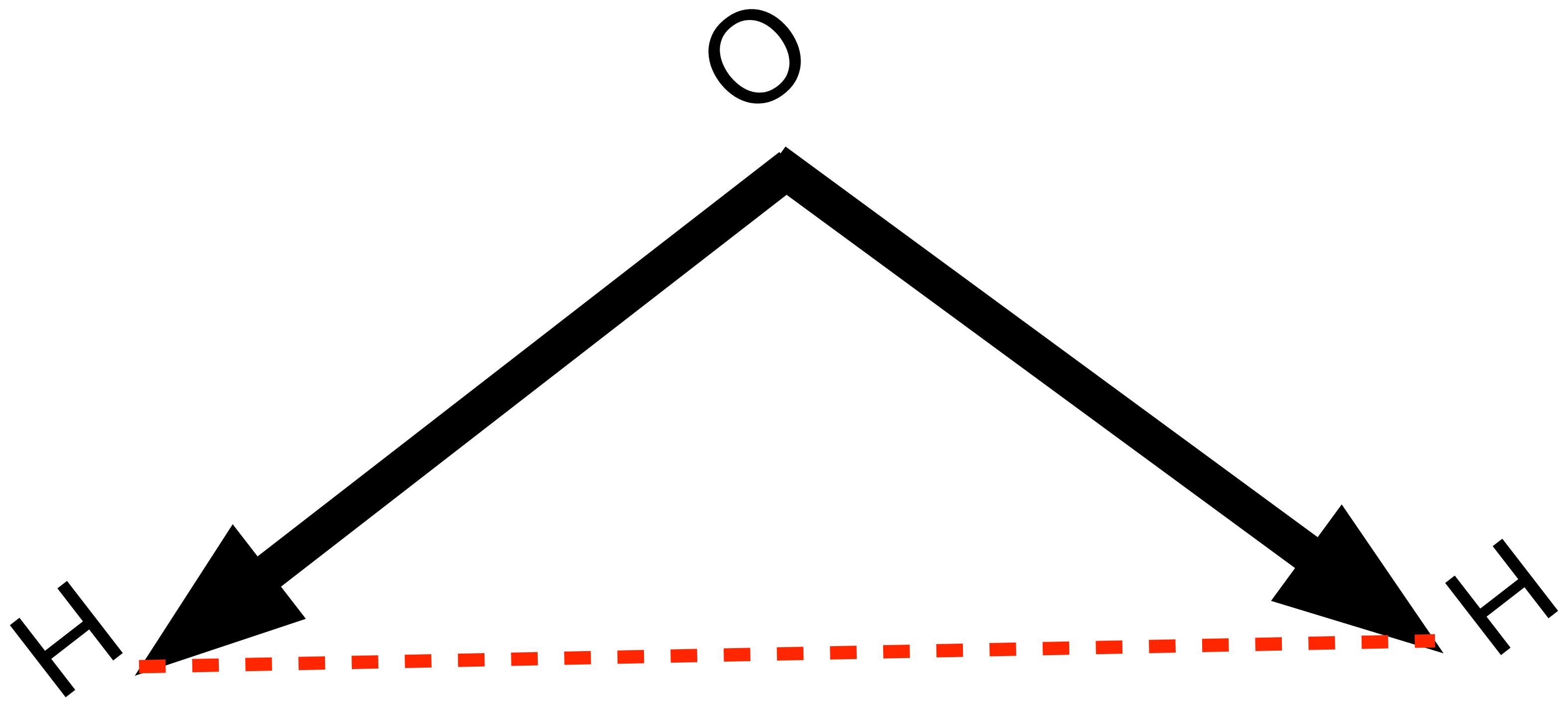
Exemplo 1: molécula d'água

Molécula é simétrica por reflexão com respeito à linha azul



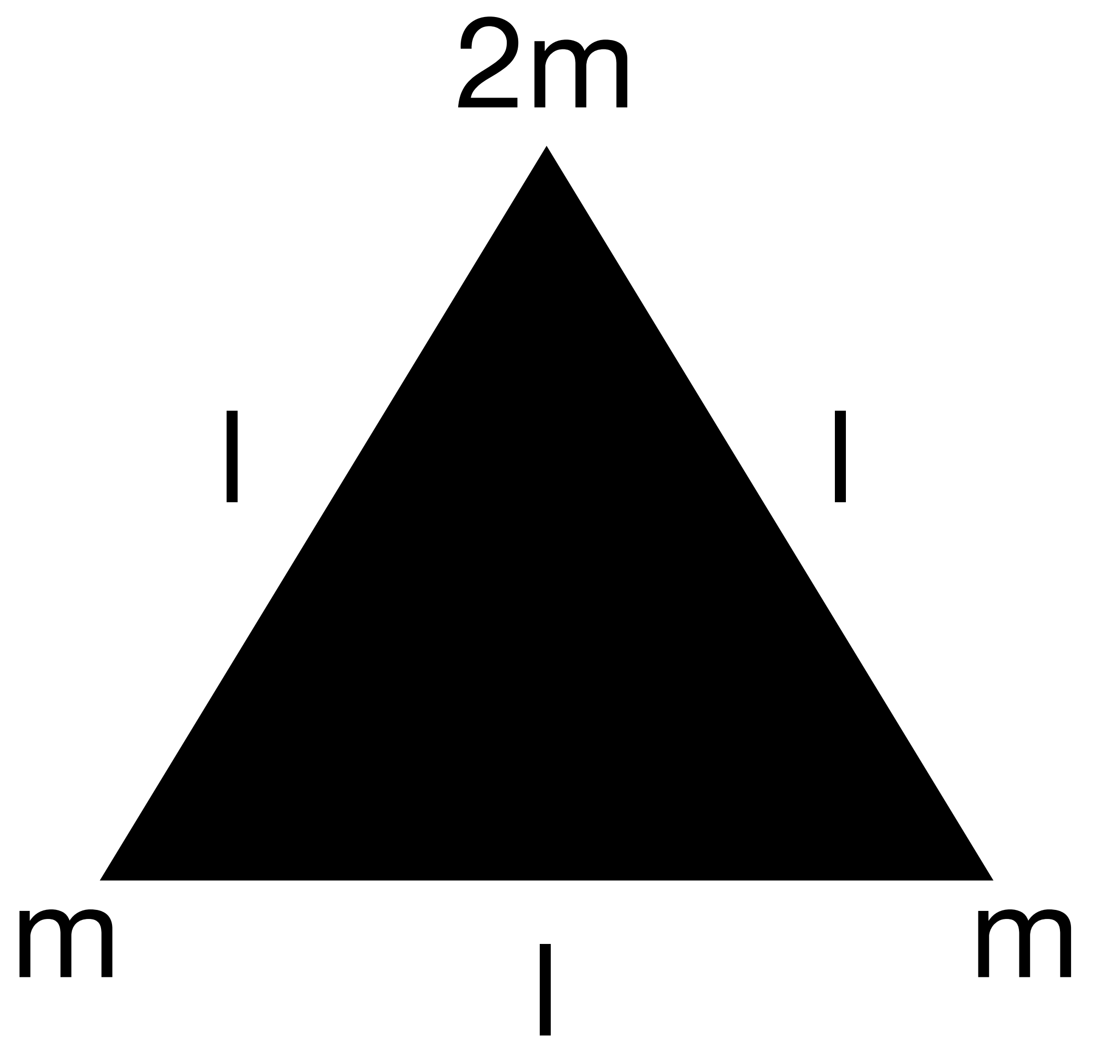
CM sobre a linha azul

origem no oxigênio



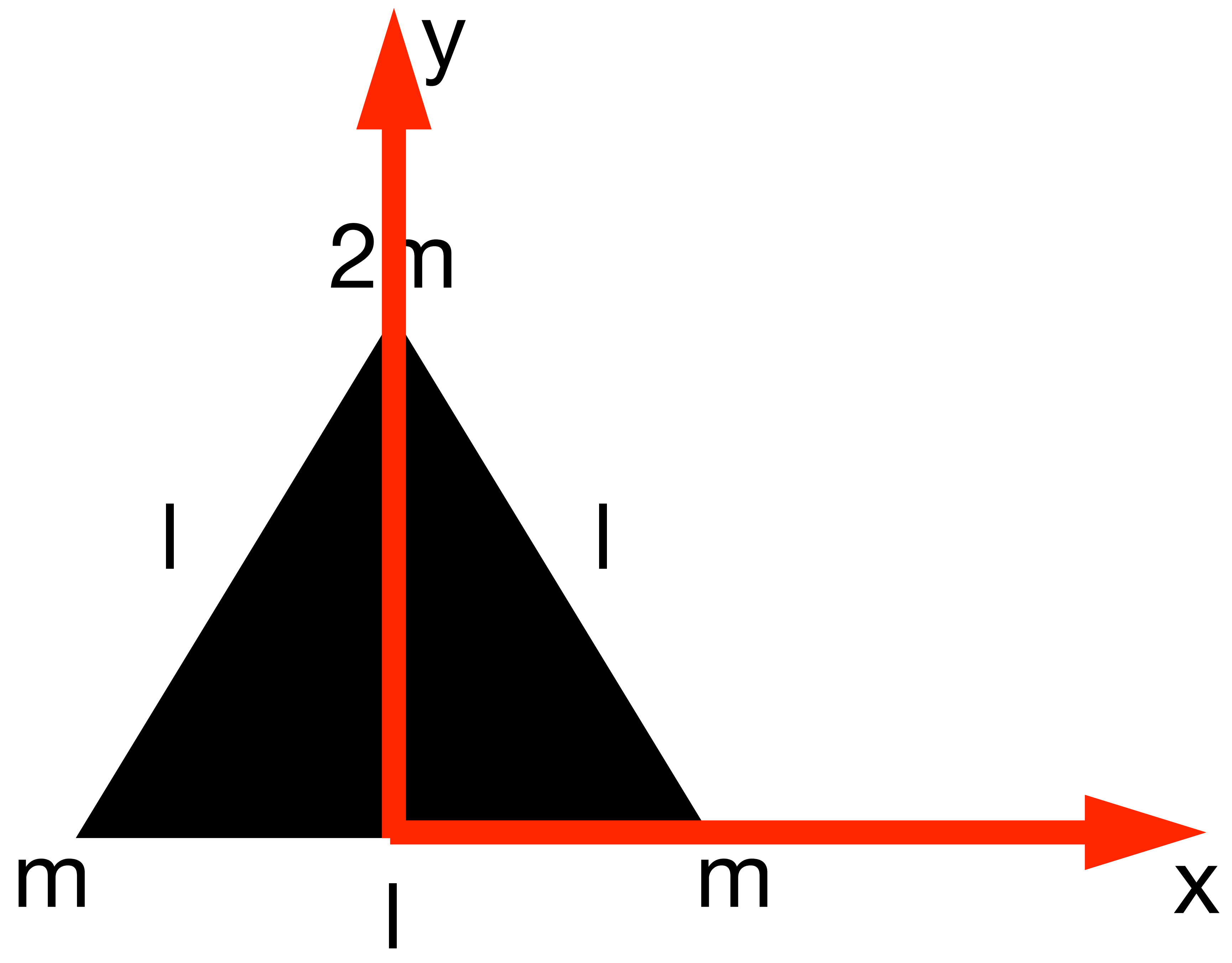
$$\vec{R} = \frac{1}{18}(\vec{x}_{H,1} + \vec{x}_{H,2})$$

Exemplo 2:



Escolhemos os eixos para explorar a simetria do problema

Exemplo 2



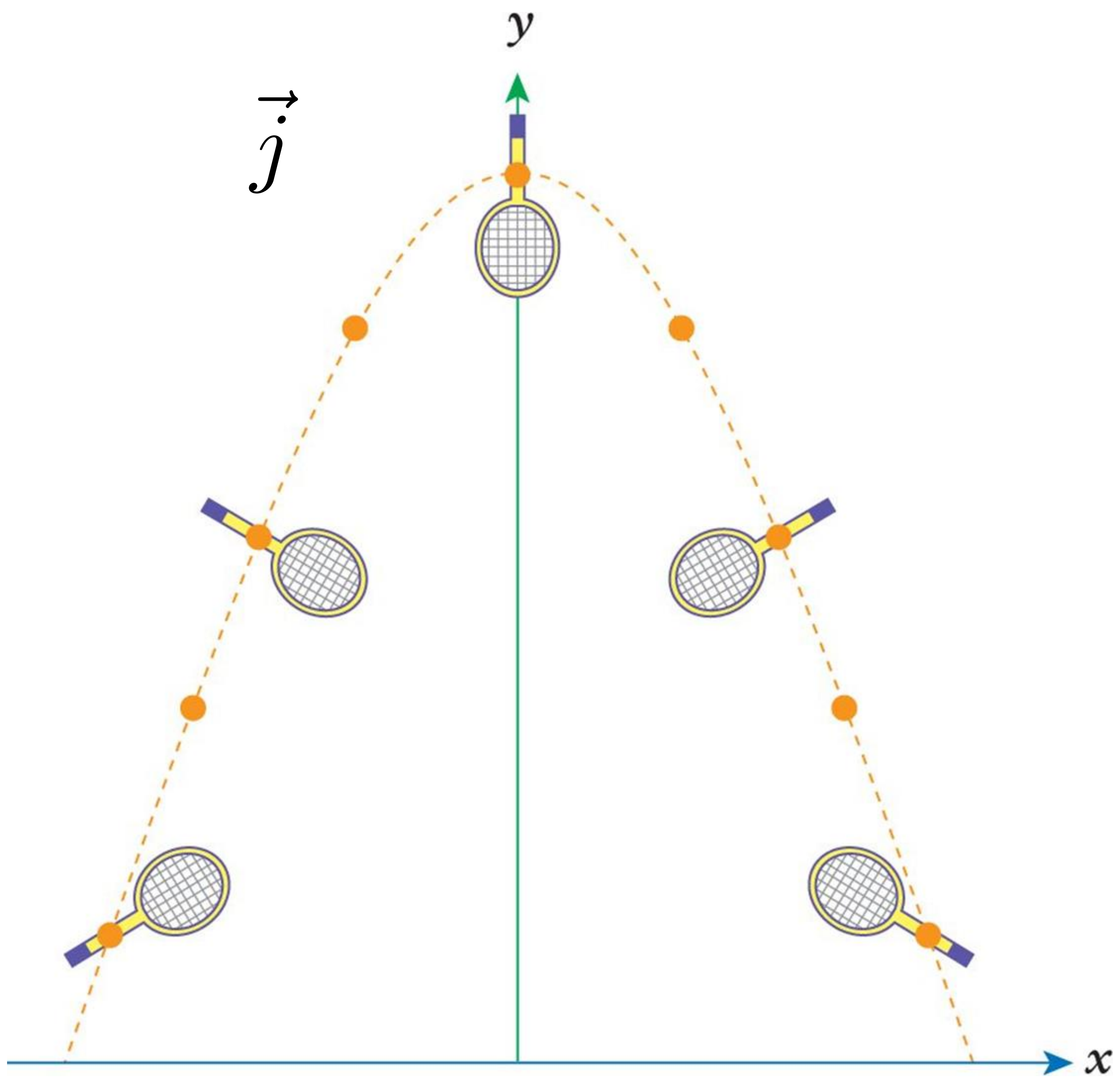
$$\vec{R} = \frac{m\vec{x}_1 + m\vec{x}_2 + 2m\vec{x}_3}{m + m + 2m}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{l}{2}(-\vec{i}) + \frac{l}{2}\vec{i} + 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}l\vec{j}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\;l\;\vec{j}$$

Exemplo 3: raquete de tenis

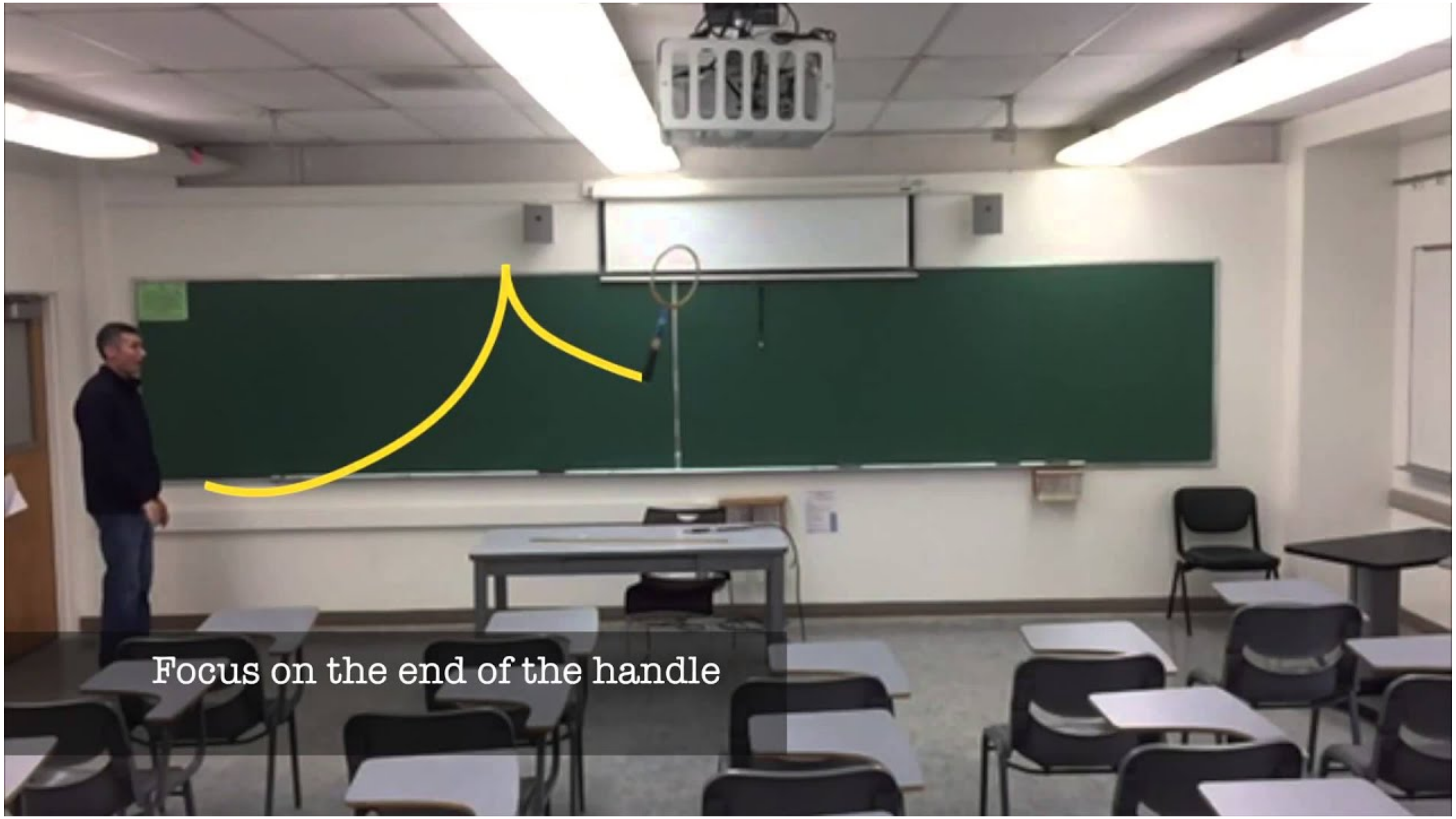
Equação do movimento to centro de massa:



$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -Mg\vec{j}$$

solução é uma parábola

Vejamos isso na vida real https://www.youtube.com/watch?v=_DzgPB9646k


Focus on the end of the handle

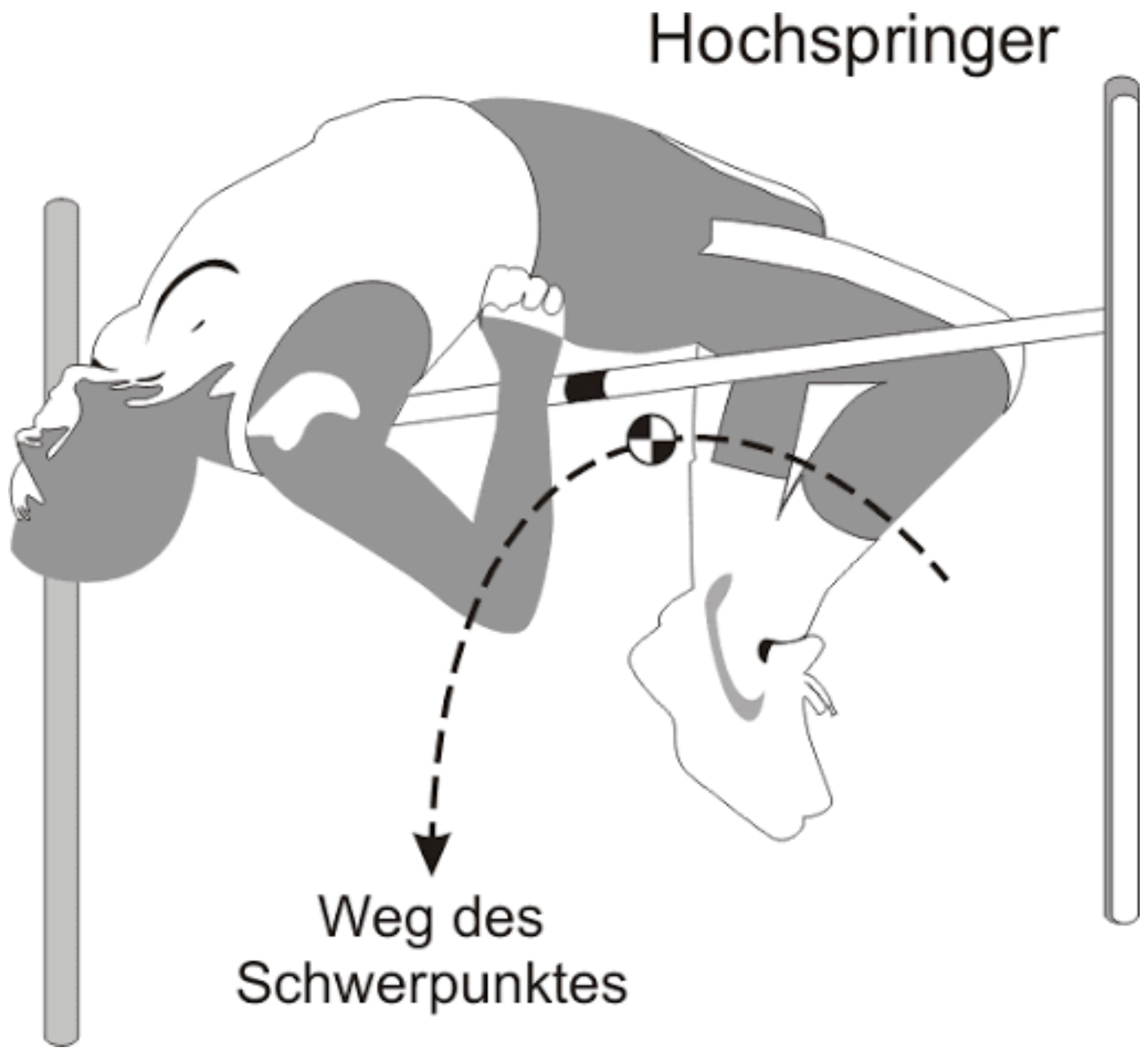
Exemplo 4: Salto em altura olímpico!

- Física deu a medalha de ouro de 1968 a Fosbury!

- Novamente

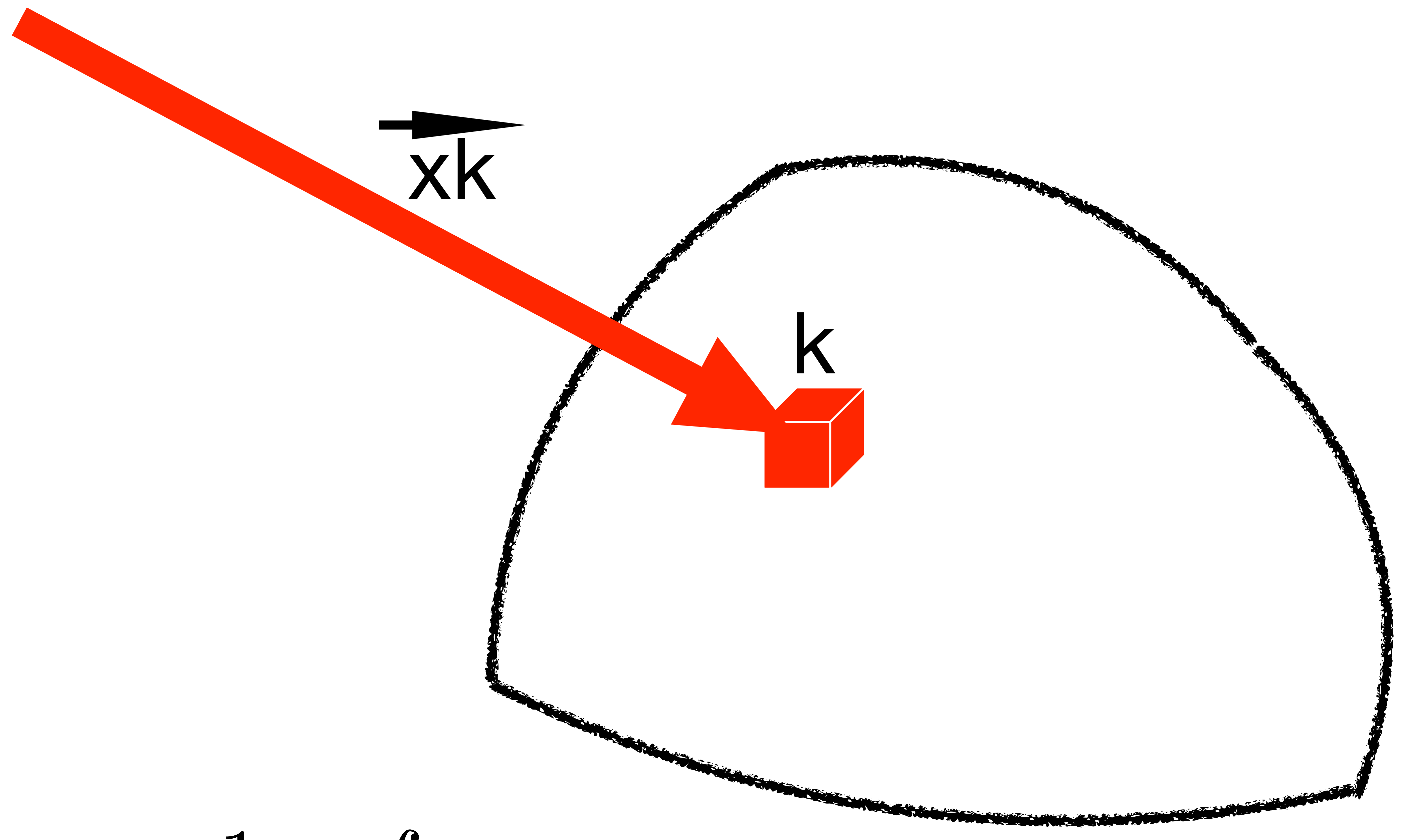
$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -Mg\vec{j}$$

Truque: CM está abaixo da barra



https://www.ted.com/talks/asaf_bar_yosef_an_athlete_uses_physics_to_shatter_world_records#t-78200

1.c Distribuição contínua da matéria:



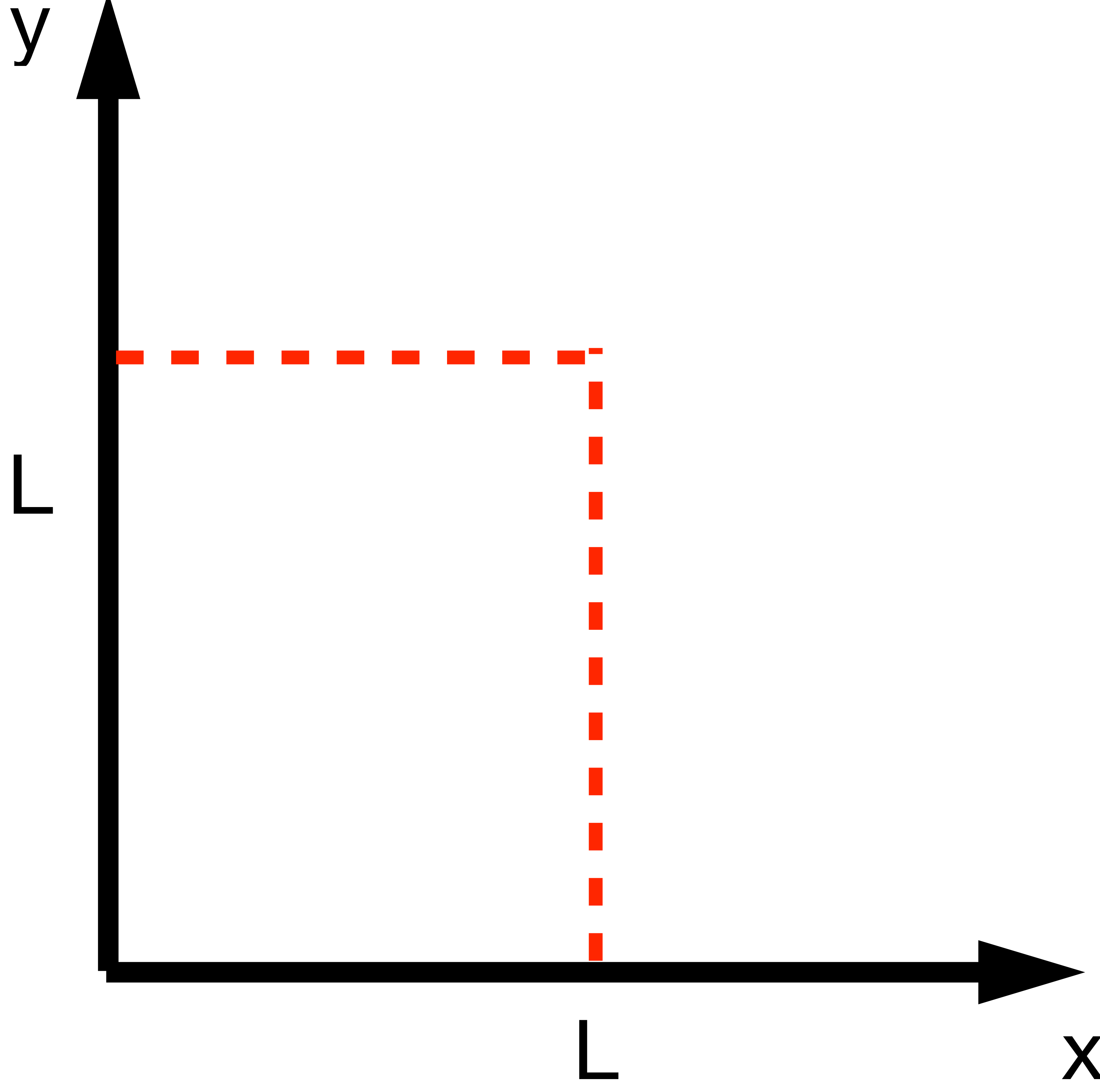
- Divido o espaço em volumes pequenos
- Somo sobre todos volumes
- Tomo o limite do volume indo a zero

$$\vec{R} = \frac{\sum_k m_k \vec{x}_k}{M} \simeq \frac{1}{M} \sum_v dm_k \vec{x}_k \quad \Longrightarrow \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \int dm \; \vec{x}$$

ou ainda usando que $dm = dV \rho$

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int dV \;\; \rho(\vec{x}) \; \vec{x}$$

Exemplo: quadrado com distribuição de massa uniforme



- Por simetria este está no centro no quadrado!

$$dm = \sigma dx dy$$

$$M = \int dm = \int_0^L dx \int_0^L dy\ \sigma = \sigma L^2$$

Por outro lado

$$\int dm\ \vec{x} = \int_0^L dx \int_0^L dy\ \sigma(x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$= \sigma \left(\int_0^L dy \int_0^L dx\ x\vec{i} + \int_0^L dx \int_0^L dy\ y\vec{j} \right)$$

$$= \sigma \frac{L^3}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

Logo $\vec{R} = \frac{L}{2}(\vec{i} + \vec{j})$