Correlação e Regressão Linear

A medida de correlação é o tipo de medida que se usa quando se quer saber se duas variáveis possuem algum tipo de relação, de maneira que quando uma varia a outra varia também. Baseado na medida de correlação entre duas variáveis, pode-se ter uma idéia sobre se o conhecimento de valores de uma das variáveis permite a previsão de valores da outra variável. Se uma variável tende a aumentar quando a outra aumenta, dizemos que a correlação é positiva. Por outro lado, se uma variável tende a diminuir quando a outra aumenta, dizemos que a correlação é negativa. Já uma correlação igual a zero indica que uma variação em uma das variáveis (aumento ou diminuição) não influencia a outra.

Pense nas seguintes afirmações:

1. Quanto mais velha a pessoa, de menos coisas ela se lembra;
2. Quanto mais se dá às crianças, mais elas querem;
3. As pessoas mais altas tendem a ter mais sucesso nas suas carreiras;
4. Quanto mais punição física as crianças recebem, mais agressivas elas vão ficar quando crescerem;
5. A estimulação cognitiva na infância aumenta a inteligência da pessoa;
6. Bons músicos são, em geral, bons em matemática;
7. Pessoas que são boas em matemática tendem a ser ruins em literatura;
8. Quanto mais se pratica um instrumento musical, menos erros são cometidos ao tocá-lo.

Estes são todos exemplos de casos de correlação entre duas variáveis. Cada afirmação propõe que duas variáveis estão correlacionadas, isto é, que elas co-variam no sentido de que:

- Quando uma variável aumenta a outra também aumenta (**correlação positiva**);
- Quando uma variável aumenta a outra diminui (**correlação negativa**).

Exercício: Quais dos casos acima são, em sua opinião, exemplos de correlação positiva e quais são exemplos de correlação negativa? Sugira outros exemplos de correlações positivas e negativas.

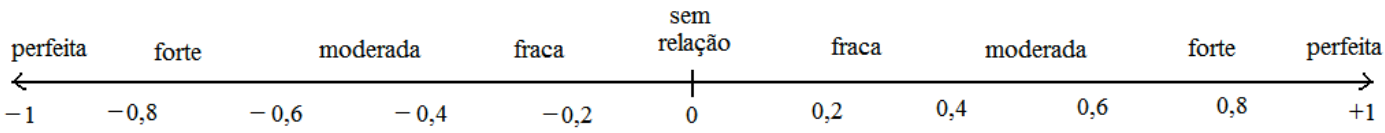
O primeiro passo para se verificar a validade de uma afirmação como as anteriores é *operacionalizar* as definições das variáveis envolvidas. Por exemplo, no caso da afirmação 7 o que se pode fazer para testá-la é olhar os resultados de provas de alunos de segundo grau nas duas matérias (matemática e literatura). No caso da afirmação 3, uma das variáveis pode ser medida diretamente (a altura), mas e a outra? Como *medir* o sucesso de alguém em uma carreira? Pelo salário, ou deve-se considerar alguma medida de "satisfação no emprego", e com que pesos? Isto é o que se quer dizer por operacionalização de uma variável.

Exercício: Proponha definições operacionais para as duas variáveis envolvidas em cada um dos exemplos anteriores e como elas devem ser medidas em um estudo de correlação.

Afirmações como "há uma correlação entre punição severa na infância e delinqüência na idade adulta", ou "punições severas na infância e delinqüência na idade adulta tendem a se correlacionar" são muito comuns em diversos meios (imprensa, universidade, governo, sistemas judiciário e penal, organizações não-governamentais, etc). Na verdade, nas duas afirmações estão faltando duas coisas importantes: (i) quão forte é a correlação; e (ii) quão significativa ela é. Força e significância são dois elementos importantes para se qualificar uma correlação, e elas não querem dizer a mesma coisa – como veremos.

A **força** de uma relação entre duas variáveis nos dá o grau com que uma variável tende a variar quando a outra varia. Ela é expressa em uma escala indo de -1 (correlação negativa perfeita) a $+1$ (correlação positiva perfeita). O nome que se dá à variável que mede a força de uma correlação (nessa escala de -1 a $+1$) é **coeficiente de correlação** (representado pela letra r).

As interpretações que se costumam dar aos significados dos valores do coeficiente de correlação dentro da sua faixa de valores possíveis são dadas abaixo:



Note que correlação negativa não quer dizer falta de correlação! O sinal do coeficiente de correlação tem como função apenas indicar se as duas variáveis se correlacionam de maneira diretamente proporcional ou inversamente proporcional, isto é, se quando uma aumenta a outra aumenta ou se quando uma aumenta a outra diminui. A força da correlação (positiva ou negativa) é dada pelo *módulo* do coeficiente de correlação: quanto maior o módulo, mais forte é a correlação. E correlação zero indica que não há qualquer relação entre as duas variáveis.

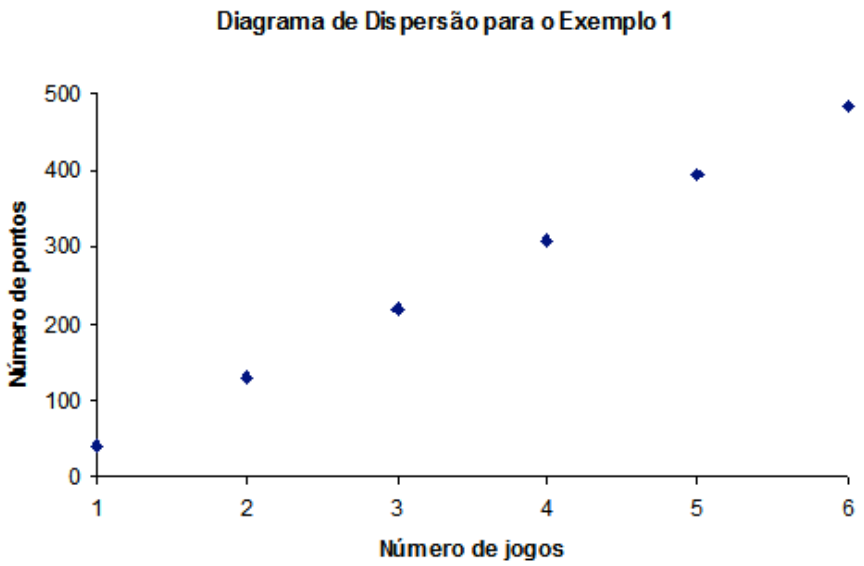
A técnica mais simples e provavelmente mais útil para se estudar a relação entre duas variáveis é o chamado **diagrama de dispersão**. O primeiro passo para a construção de um diagrama de dispersão é coletar pares de valores, um para a variável X e outro para a variável Y, onde cada par (X,Y) refere-se a um mesmo indivíduo (por exemplo, nota da prova de matemática e nota da prova de literatura de um aluno).

Supondo que foram coletados n pares de valores, (X_i,Y_i), $i = 1, ..., n$, para n indivíduos diferentes, o diagrama de dispersão é um gráfico cartesiano em que os valores da variável X são colocados no eixo horizontal (abscissa) e os valores da variável Y são colocados no eixo vertical (ordenada). Desta forma, cada um dos n pares de valores é representado graficamente como um único ponto. Olhando para o arranjo dos pontos no gráfico, pode-se discernir algum padrão que indique a possível forma funcional da relação entre os dados.

Exemplo 1: Suponha que uma criança esteja aprendendo a jogar um novo jogo de vídeo-game, por exemplo, um jogo em que a criança assuma o papel de uma personagem em um mundo encantado que tenha como objetivo encontrar certo tesouro. Durante a busca pelo tesouro, a personagem se movimenta por esse mundo encantado e vai enfrentando desafios de vários tipos. Cada vez que ela supera um desafio, ganha certo número de pontos e novas habilidades que a ajudarão a achar o tesouro mais facilmente. Vamos supor que o aprendizado da criança em jogar esse novo jogo esteja sendo monitorado por um pedagogo. Pelas regras do acompanhamento, a cada dia a criança deve iniciar um jogo novo com a sua personagem sempre na mesma situação e com zero pontos.

Após seis jogos, o desempenho da criança resultou nos seguintes dados, apresentados abaixo nas formas de tabela e de diagrama de dispersão (dados fictícios):

Número de jogos	Número de pontos
1	42
2	131
3	219
4	308
5	396
6	485

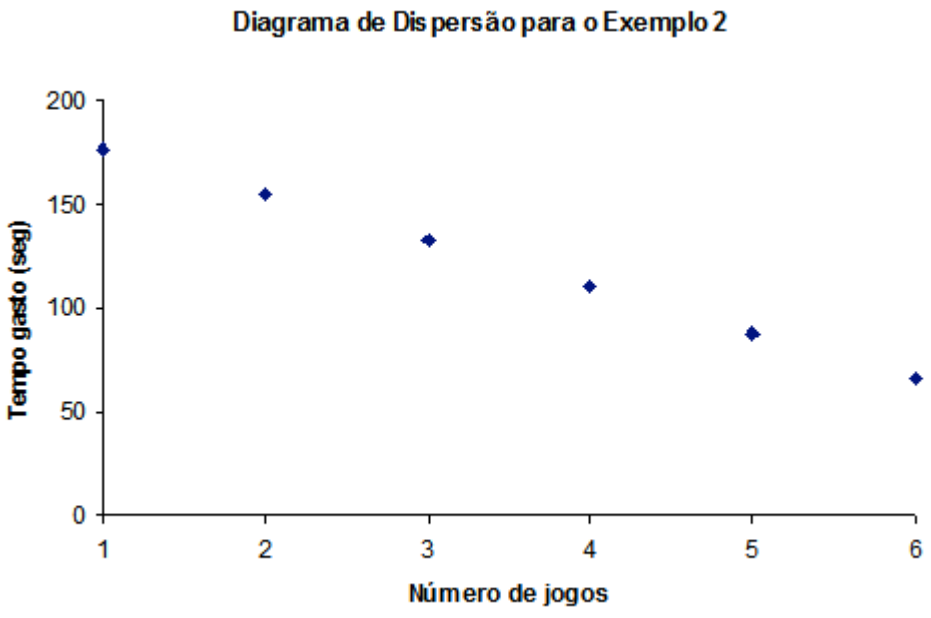


Observe que o diagrama de dispersão indica claramente que há uma relação *positiva* entre o número de pontos num jogo e o número de vezes que a criança o jogou: quanto mais vezes a criança repete o jogo, mais pontos ela faz. No caso, a correlação entre as duas variáveis é positiva e perfeita (coeficiente de correlação $r = +1$); veremos como calcular esse coeficiente depois.

Exemplo 2: Consideremos novamente o mesmo caso do exemplo anterior. A cada repetição do jogo, além de registrar o número de pontos que a criança faz, o pedagogo também registra o tempo gasto pela criança para completar o primeiro desafio do jogo.

Os resultados estão mostrados abaixo.

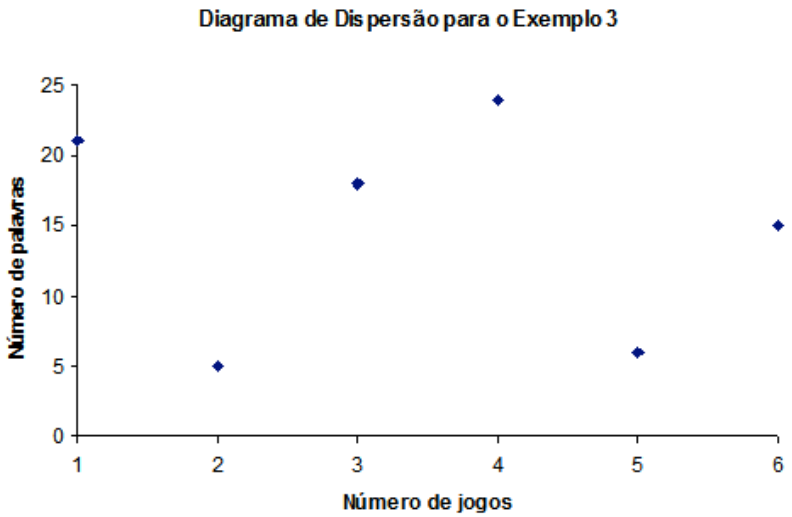
Número de jogos	Tempo gasto (seg.)
1	177
2	155
3	133
4	110
5	88
6	66



A correlação entre as duas variáveis é agora negativa e perfeita (coeficiente de correlação $r = -1$). Compare os dois diagramas de dispersão: quando a correlação é positiva, os pontos no diagrama de dispersão vão do quadrante inferior esquerdo ao quadrante superior direito; já quando a correlação é negativa, os pontos vão do quadrante superior esquerdo ao quadrante inferior direito.

Exemplo 3: Ainda considerando o mesmo caso dos dois exemplos anteriores, suponha que a cada repetição do jogo o pedagogo também anote quantas palavras a criança fala durante os primeiros 10 minutos de jogo. O resultado está dado abaixo.

Número de jogos	Número de palavras faladas
1	20
2	4
3	13
4	24
5	5
6	15

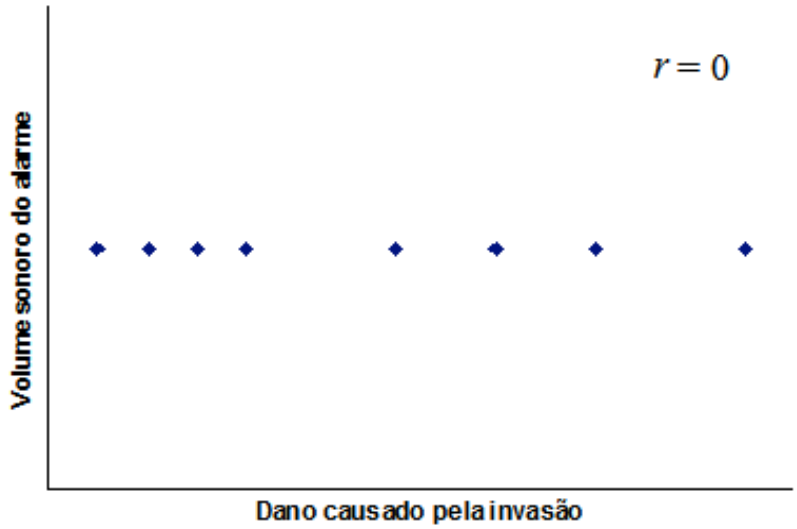


Neste último caso não há correlação entre as duas variáveis (o coeficiente de correlação vale $r = -0{,}02$).

Nos casos dos exemplos 1 e 2, em que as correlações são perfeitas (positiva ou negativa), é possível traçar uma reta a olho unindo todos os pontos. A equação dessa reta nos dá a relação quantitativa entre as duas variáveis (X e Y). Porém, quando a correlação não é perfeita (mesmo que seja forte) deve-se *calcular* essa reta matematicamente e não usar o *olhômetro*. A reta que dá a relação entre duas variáveis é chamada de **reta de regressão linear** e ela sempre pode ser calculada, mesmo que as varáveis não tenham qualquer correlação. Veremos como calculá-la mais tarde.

No exemplo 3, o valor do coeficiente de correlação é $r \cong 0$ porque as variações em Y não são afetadas pelas variações em X. Outra maneira de dizer isso é que o valor de Y não pode ser previsto a partir do conhecimento do valor de X. Para interpretar melhor o significado de $r = 0$, vejamos mais alguns casos em que isso ocorre.

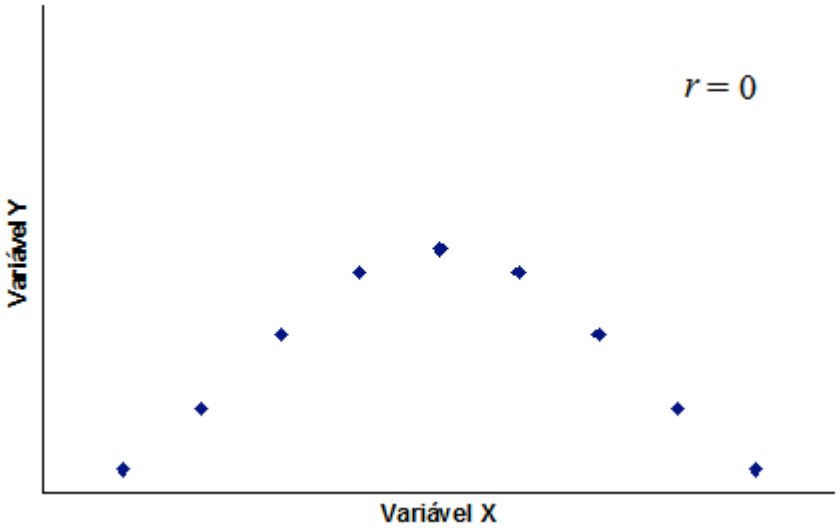
Exemplo 4: Seja o diagrama de dispersão mostrado abaixo.



Este diagrama mostra, no eixo x, a quantidade de dano causado a uma família quando a sua casa é invadida por ladrões (em alguma escala predeterminada de dano) e, no eixo y, o volume do alarme sonoro que dispara quando a casa é invadida. Observe que, neste caso, $r = 0$ porque o valor da variável y permanece constante independentemente do que aconteça com a variável x. O valor de Y pode ser previsto pelo diagrama (é sempre o mesmo!), mas o valor de X não. A única coisa que se pode prever a partir do conhecimento de X é que, se X tiver algum valor diferente de zero, haverá um valor de Y.

No começo desta aula foi escrito que "uma correlação igual a zero indica que uma variação em uma das variáveis (aumento ou diminuição) não influencia a outra". Isto só está correto para o caso de relações *lineares* entre variáveis. No caso de relações não-lineares, o coeficiente de correlação pode ter um valor próximo de zero e ainda assim elas estarem relacionadas. É por isso que a construção de um diagrama de dispersão é fundamental para o estudo da relação entre duas variáveis, pois ele permite que se visualize a relação entre elas. Vejamos um exemplo.

Exemplo 5: Seja o seguinte diagrama de dispersão.



Este diagrama tem uma forma curva, em forma de U invertido. Para este caso o cálculo do valor do coeficiente de correlação resulta em $r = 0$, mas mesmo assim vemos pelo gráfico que existe uma relação previsível entre Y e X. As variáveis X e Y não estão especificadas, mas pode-se pensar em algumas que possuam uma relação desse tipo. Por exemplo, temperaturas médias ao longo dos meses ano (começando a contar do inverno). Em pedagogia tal relação poderia descrever, por exemplo, o interesse de uma pessoa em realizar uma dada tarefa (como montar quebra-cabeças, por exemplo) em função do número de vezes que ela repete a tarefa. No começo, o interesse cresce com o número de repetições porque elas representam um desafio para a pessoa, mas depois que ela já atinge domínio sobre a tarefa o seu interesse decresce.

Exercício: pense em outras situações de interesse em pedagogia que possam ser descritas por uma relação em forma de U invertido como a acima. Pense também em situações que possam ser descritas por uma relação em forma de U.

Relações entre duas variáveis como a do exemplo 5 são chamadas de **relações não-lineares** (simplesmente porque não se pode traçar uma linha reta que descreva a relação entre *X* e *Y*). Relações não-lineares são muito importantes por serem muito comuns – na natureza e nas relações humanas –, mas o seu estudo (com exceção de alguns casos simples) não será feito aqui.

Relações lineares também são importantes: (i) elas são aproximadamente válidas na natureza em algumas condições restritas; (ii) elas funcionam como bons modelos iniciais para um grande número de relações; e (iii) elas são simples, permitindo um tratamento matemático completo de forma analítica (isto é, não computacional).

O coeficiente de correlação *r* é usado para medir a força de relações *lineares* entre duas variáveis Y e X. Quando $r = 0$, isto significa que não há relação linear entre as variáveis. Porém, *r* pode ser zero e ainda assim existir possivelmente alguma relação entre as duas variáveis, mas ela será necessariamente não-linear.

Veremos na próxima aula como calcular o coeficiente de correlação *r*. Antes de mais nada, é importante dizer que há mais de uma maneira de se definir o coeficiente de correlação matematicamente. Vamos apresentar na próxima aula dois desses coeficientes: o **coeficiente de correlação de Pearson** e o **coeficiente de correlação de Spearman**.

Antes de terminar esta aula, faremos a seguir alguns comentários importantes sobre correlação.

Mais Comentários sobre Correlação

1 Causa e Efeito

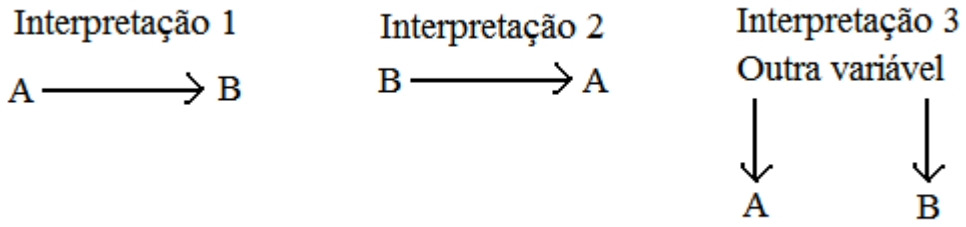
Considere as seguintes afirmações:

- Pesquisas estabeleceram que existe uma forte correlação entre o uso de punição física pelos pais e o desenvolvimento de comportamentos agressivos em seus filhos. Os pais não devem usar essa forma de impor disciplina se não quiserem que seus filhos tornem-se agressivos.
- Existe uma correlação significante entre o desmame precoce e o aparecimento de irritabilidade em crianças pequenas. Portanto, mães não devem se apressar em parar de amamentar seus bebês se elas quiserem ter filhos tranqüilos.
- Pobreza está correlacionada com crime. Portanto, famílias que têm uma renda alta têm menor probabilidade de que seus filhos sejam criminosos.

Em cada um dos casos acima, assumiu-se que a primeira variável é a *causa* da segunda. Em geral, quando há uma correlação significante entre duas variáveis, A e B, pode haver várias possíveis interpretações para a relação entre elas:

1. A variável A tem um efeito causal sobre a variável B;
2. A variável B tem um efeito causal sobre a variável A;
3. Tanto A como B estão relacionadas a alguma outra variável;
4. Apesar de significante a um nível α (por exemplo, 0,05), a correlação entre A e B não é real e o valor do coeficiente de correlação é apenas fruto de uma coincidência.

As primeiras três interpretações estão ilustradas abaixo.



Um exemplo em que a terceira interpretação seria a correta é o da medição da temperatura em uma sala com dois termômetros, um que mede a temperatura em graus Celsius (^{o}C) e outro que mede a temperatura em graus Fahrenheit (^{o}F). As duas medições estão correlacionadas, mas não se pode dizer que um termômetro influencia o outro (eles são independentes). O que causa a correlação entre as duas medidas é a temperatura da sala.

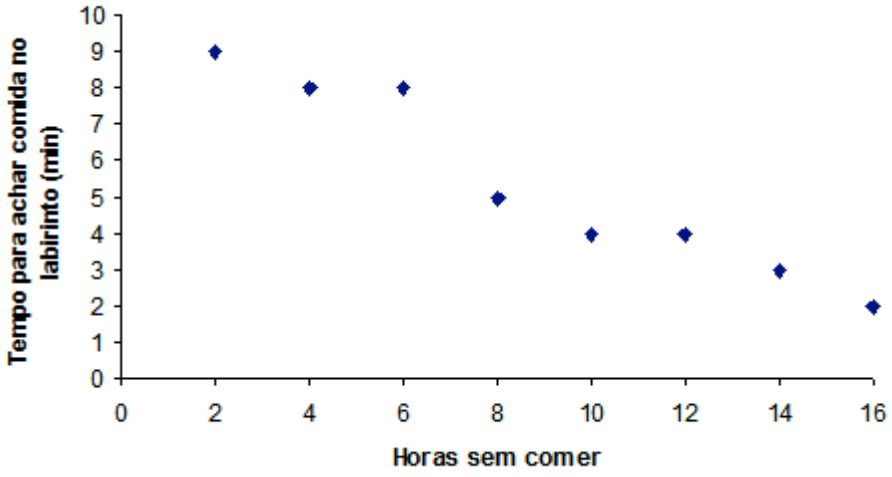
Da mesma forma, pode-se argumentar que não é a punição física aplicada pelos pais que causa a agressividade de seus filhos, mas que as duas são conseqüência de um mesmo ambiente. Um ambiente social violento pode produzir tanto pais que batem em seus filhos como filhos agressivos, e não seriam as punições físicas dos pais que tornariam seus filhos agressivos.

Em geral, é uma boa prática questionar se, ao invés de ser A que causa B, não seria B que causa A. Talvez não seja a punição física que cause filhos agressivos, mas filhos com agressividade inata que levem seus pais a usarem de violência contra eles. Da mesma forma, talvez sejam os bebês que nasçam irritadiços que induzam suas mães a abandonar o aleitamento materno.

Em alguns casos, a configuração do problema permite que se determine se uma variável causa a outra. Um exemplo disso é quando uma variável *antecede* a outra. Por exemplo, se de fato existir uma correlação positiva entre a altura da pessoa e o seu sucesso profissional, a altura seria a causa do sucesso e não o contrário. Pode até ser que o sucesso profissional de uma pessoa a faça parecer mais alta segundo a *percepção* de outros, por exemplo, pesquisas nos Estados Unidos indicam que a população tende a superestimar a altura do candidato que ganha uma disputa para a presidência. Mas o sucesso profissional não tem como influenciar a altura de uma pessoa, pois esta é uma característica determinada pela genética e pela alimentação da pessoa na infância, antes de ela ingressar no mercado de trabalho. A interpretação 3, no entanto, poderia ser válida neste caso. Outras características

genéticas e do ambiente onde a pessoa cresce poderiam causar tanto uma alta estatura como um sucesso profissional.

Outra situação onde se pode determinar qual variável é a causa da outra é quando se faz um *experimento controlado* em laboratório. Por exemplo, quando se mede o efeito que a quantidade de horas sem alimentação tem sobre o tempo que um camundongo leva para achar onde está a comida em um labirinto, pode-se obter um diagrama de dispersão como o abaixo.



Neste caso, é a quantidade de horas sem comer que causa uma diminuição no tempo gasto pelo animal para achar comida no labirinto. Em situações experimentais como a mostrada acima, costuma-se chamar a variável causadora (colocada no eixo-*x*) de variável *independente* e a outra variável (colocada no eixo-*y*) de variável *dependente*.

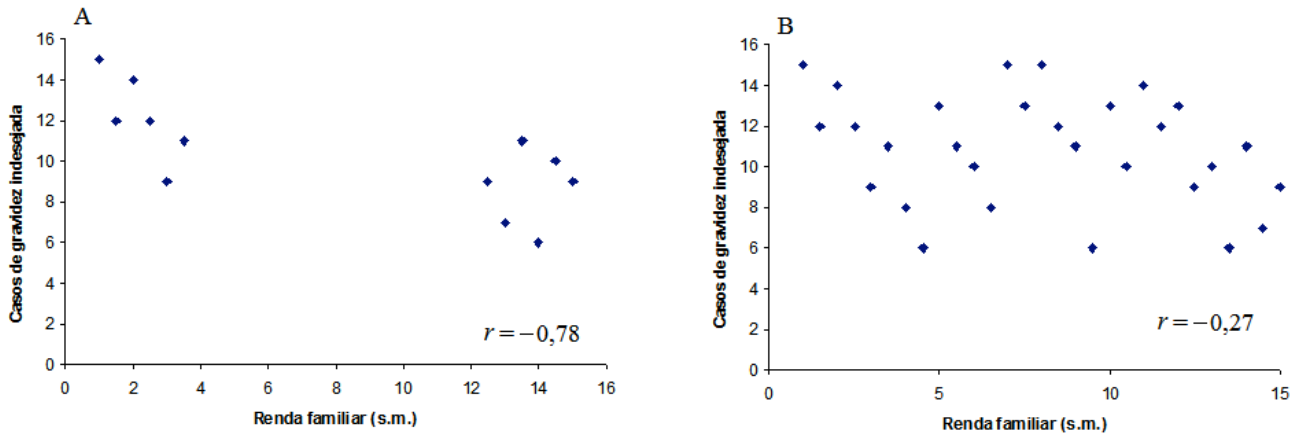
Outro exemplo é o de um experimento em que se mostra uma seqüência de palavras separadas por certo intervalo de tempo a uma pessoa e depois pede-se a ela que repita as palavras mostradas. Em um experimento desse tipo, quando se aumenta o intervalo de tempo entre as palavras, o índice de acertos da pessoa em se lembrar das palavras mostradas também aumenta. Pelo *desenho* do experimento, as palavras são mostradas primeiro, com o intervalo de tempo entre elas determinado pelo experimentador, e só depois é que se pede à pessoa para se lembrar das palavras. Portanto, o intervalo de tempo

é a variável independente e o índice de acertos (a fração de palavras corretamente lembradas) é a variável dependente.

2 Escolha da Faixa de Variação dos Valores

Às vezes, a escolha dos dados para serem incluídos em um estudo de correlação pode fazer parecer que existe uma forte correlação entre eles, quando de fato ela não existe.

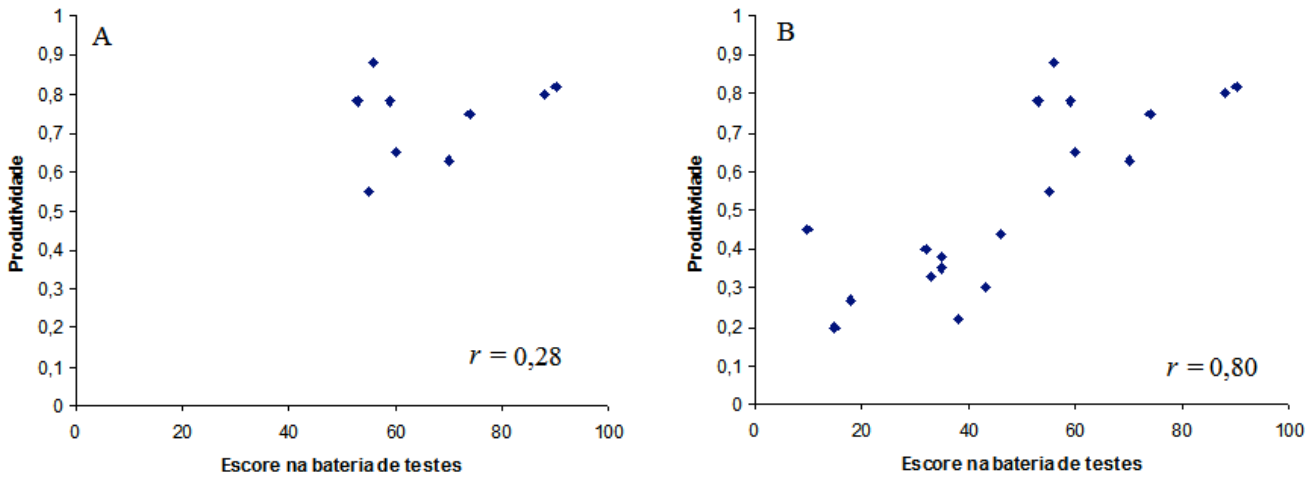
Por exemplo, considere um estudo feito para medir a correlação entre a faixa de renda familiar e o número de casos de gravidez indesejada. Suponha que o estudo acabe concluindo que existe uma forte correlação negativa entre as duas, com base no diagrama de dispersão da esquerda (indicado por A) abaixo.



Um resultado como esse poderia ser usado politicamente para dizer que as pessoas pobres são menos cuidadosas em suas relações sexuais e que, portanto, há uma maior incidência de casos de gravidez indesejada entre elas. Dependendo da sociedade em que isso ocorra, tal conclusão poderia levar a uma campanha em favor de uma melhor educação sexual entre os pobres, ou a uma campanha (explícita ou oculta) de esterilização em massa de mulheres pobres.

Observando o diagrama da figura A, porém, vemos que ele se baseia em uma amostra *enviesada*, que só leva em conta famílias com renda familiar alta e baixa, desprezando as de renda intermediária. Essa amostragem seletiva implica em uma forte correlação, mas uma amostragem mais representativa da população (veja o diagrama da figura B) poderia implicar em uma correlação mais fraca.

Um efeito oposto pode ocorrer quando a faixa de valores é escolhida de uma maneira diferente. Suponha que uma companhia contrate um psicólogo para ajudá-la a selecionar candidatos a empregos através de uma bateria de testes psicológicos. Suponha que, um ano após a contratação do grupo de candidatos selecionados, a companhia resolva fazer um estudo de correlação entre a produtividade desses empregados e o seu escore no teste aplicado pelo psicólogo. Vamos supor que a correlação obtida seja baixa como a mostrada no diagrama A da figura abaixo.



A companhia poderia, então, dispensar os serviços do psicólogo alegando que a bateria de testes utilizada por ele não é boa para prever se o candidato terá alta produtividade ou não. O psicólogo, porém, poderia se defender dessa crítica alegando que, caso os candidatos que tiveram escores baixos fossem contratados, suas produtividades seriam menores ainda e teríamos um diagrama como o mostrado na figura B, indicando uma correlação alta entre o resultado no teste e a produtividade.

4 Usos comuns de coeficientes de correlação

As situações mais comuns em que estudos de correlação são feitos em pedagogia e psicologia são as seguintes:

- Estudos não experimentais: De longe, o uso mais comum de coeficientes de correlação em pedagogia e psicologia ocorre em estudos em que duas variáveis *já existentes* são medidas para uma amostra. Tais estudos são chamados em psicologia de "não-experimentais" (ou de "correlacionais" por alguns autores), para diferenciar de estudos experimentais controlados em que uma variável independente é manipulada para *causar ou não* variações em uma variável dependente. Exemplos de estudos não-experimentais de correlação são: quantidade de fumo ingerida e nível de ansiedade; atitudes sexistas e racistas de pessoas; horas que uma criança passa assistindo a programas violentos na TV e nível de agressividade.

- Testes de confiabilidade: Testes desse tipo são aplicados para, por exemplo, determinar se alguma medida feita em uma amostra de pessoas é confiável para ser usada ao longo do tempo. O método usado neste caso é o do teste e re-teste: por exemplo, toma-se uma amostra de *n* pessoas em um dado momento e mede-se alguma variável para elas; um tempo depois, digamos, seis meses, mede-se a mesma variável para o mesmo grupo de pessoas e faz-se um estudo de correlação entre os dois conjuntos de medidas. Testes desse tipo são importantes, por exemplo, para se avaliar a confiabilidade dos julgamentos de pessoas responsáveis por atribuir escores ou notas a outras.

- Estudos com gêmeos: Gêmeos idênticos (monozigóticos) ou, eventualmente, fraternos (dizigóticos) formam *pares ideais* para estudos de correlação. De fato, é comum que medidas ou escores para gêmeos desses tipos sejam correlacionados. Exemplos são os estudos sobre influências hereditárias no comportamento, dos quais os mais famosos são os estudos sobre a correlação entre os QIs de gêmeos idênticos e fraternos criados separadamente, isto é, em ambientes diferentes. Para mais detalhes sobre estudos de

correlação entre desempenhos intelectuais ou traços de personalidade de gêmeos, ver, por exemplo, o Capítulo 3 do livro de David R. Shaffer, *Psicologia do Desenvolvimento: Infância e Adolescência*, Editora Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2005.