No estudo do cálculo diferencial de funções de uma variável real, $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, aprendemos que a existência da derivada de f em um ponto $x \in D$, implicava na continuidade de f em x. Tal fato é facilmente comprovado através da seguinte consideração.

Seja $h \in \mathbb{R}^*$ e considere:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h$$

tomando o limite $h \to 0$, obtemos

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h$$

$$= f'(x) \cdot 0$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

ou seja, que f é contínua em $x \in D$ se f for diferenciável em $x \in D$.

Agora, seja um campo escalar $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e considere o mesmo argumento de antes. A saber, suponha a existência da derivada

$f'(x, y)$, com respeito a algum $y \in \mathbb{R}^n$.

Logo, para algum $h \neq 0$ podemos escrever que:

$$f(x + hy) - f(x) = \frac{f(x+hy) - f(x)}{h} h \xrightarrow{h \to 0} f'(x; y) \cdot 0 = 0$$

Portanto, a existência da derivada $f'(x, y)$ para algum vetor $y \in \mathbb{R}^n$ implica que

$$\lim_{h \to 0} f(x + hy) = f(x),$$

ou seja, que a função: $f(r) \longrightarrow f(x)$ conforme $r \to x$ ao longo da reta: $r(h) = x + hy$.

Conseqüentemente, se $f'(x, y)$ existir para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$, concluímos que

$$f(r) \longrightarrow f(x) \quad \text{conforme} \quad r \to x$$

ao longo de qualquer reta passando por $x \in D$. Sugerindo, pois, que a função f seja contínua no ponto $\mathbb{x} \in D$. Surpreendentemente, tal conclusão não é verdadeira em geral como demonstra o contraexemplo a seguir:

Exemplo 6.1: "Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

E estudemos a continuidade de f em $\mathbb{x} = \mathbb{0} = (0,0)$. Tomemos um vetor $\mathbb{y} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ arbitrário. Se $a \neq 0$ e $h \neq 0$, podemos escrever que:

$$\frac{f(\mathbb{x} - h\mathbb{y}) - f(\mathbb{x})}{h} = \frac{f(h\mathbb{y}) - f(\mathbb{0})}{h} = \frac{f(ha, hb)}{h}$$

$$= \frac{ha\, h^2 b^2}{h(h^2a^2 + h^4b^4)} = \frac{ab^2}{a^2 + h^2b^4}$$

tomando $h \to 0$ obtemos:

$$f'(\mathbb{0}, \mathbb{y}) = \frac{b^2}{a}, \quad \forall\, \mathbb{y} = (a,b) \text{ com } a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}$$

Por outro lado se $\mathbb{y} = (0,b)$, temos, similarmente, que:

$$\frac{f(\mathbb{x}+h\mathbb{y})-f(\mathbb{x})}{h} = \frac{f(h\mathbb{y})-f(\mathbb{0})}{h} = \frac{f(h0,hb)}{h} = 0$$

que no limite $h \to 0$, implica que

$$f'(\mathbb{0},\mathbb{y}) = 0 \quad , \quad \forall \mathbb{y} = (0,b) \quad , \quad b \in \mathbb{R}.$$

Conseqüentemente, a derivada $f'(\mathbb{0},\mathbb{y})$ existe para qualquer $\mathbb{y} \in \mathbb{R}^2$, ou seja, para todas as direções.

Verifiquemos, pois, se tal campo escalar é contínuo na origem, para tanto, deve ser verdade que

$$\lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{0}} f(\mathbb{x}) = \mathbb{0}.$$

Consideremos duas curvas γ_1 e γ_2, parametrizadas respectivamente por

$\mathbb{r}_1(t) = t\,\mathbb{e}_1$, uma reta ao longo do eixo $\hat{O}x$

$\mathbb{r}_2(t) = t^2\mathbb{e}_1 + t\,\mathbb{e}_2$, a parábola : $x = y^2$

Claramente, $\mathbb{r}_1(0) = \mathbb{r}_2(0) = \mathbb{0}$, e consideramos o limite de f conforme $\mathbb{x} \to \mathbb{0}$ ao longo de tais curvas:

$$\lim_{t \to 0} f(\mathbb{r}_1(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0} = 0$$

$$\lim_{t \to 0} f(\mathbb{r}_2(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}.$$

Como tais limites são distintos, satisfazemos as hipóteses do teorema 4.14, que nos permite concluir que o

$$\lim_{\mathbb{x} \to \mathbb{0}} f(\mathbb{x})$$

não pode existir! Logo, f não pode ser contínua em $\mathbb{x} = \mathbb{0} \in D$."

O contraexemplo que acabamos de exibir demonstra que a existência de todas as derivadas direcionais em um ponto não é uma condição suficiente para que o campo escalar seja contínuo neste ponto. Assim, fica claro que o conceito de derivada direcional (bem como as derivadas parciais) não são generalizações suficientemente satisfatórias do conceito unidimensional de derivada. Na próxima secção introduzimos o conceito de derivada total, cuja existência implica continuidade.

1 – Derivada Total

Para construirmos o conceito de derivada total nos inspiramos novamente em resultados do cálculo de uma variável real.

A saber, relembramos que uma função $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável no ponto $a \in D$ pode ser aproximada na vizinhança de a por um polinômio de Taylor de 1º ordem (aproximação linear):

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + h\,E(a,h)$$

onde $E(a,h)$ denota o erro que cometemos ao nos distanciarmos do ponto $a \in D$ por um valor h:

$$E(a,h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a), & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases}$$

Naturalmente,

$$\lim_{h \to 0} E(a,h) = 0$$

Implicando que o erro absoluto que incorremos em tal aproximação $h\,E(a,h)$ é de menor ordem do que h, ou seja, $h\,E(a,h) \to 0$ mais rápidamente do que $h \to 0$.

Essa propriedade, que permite aproximarmos uma função diferenciável por uma linear, sugere uma forma de estendermos o conceito de diferenciabilidade para $\mathbb{R}^n$.

Definição 6.2: "Seja $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um ponto interior $a \in S$, considere uma bola aberta $B(a, r) \subset S$ e escolha um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ com $\|v\| < r$ tal que $(a + v) \in B(a, r)$. Dizemos que o campo escalar f é diferenciável em $a \in S$, se existir uma transformação linear $T_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e uma função $E(a, v)$ tais que:

$$f(a + v) = f(a) + T_a(v) + \|v\| E(a, v)$$

para $\|v\| < r$, com

$$\lim_{\|v\| \to 0} E(a, v) = 0.$$

A transformação linear T_a é denominada derivada total (ou diferencial) do campo escalar f em $a \in S$."

É importante ressaltar que a derivada total T_a não é um número, mas sim uma função (transformação linear). Já o valor da derivada total em $v \in \mathbb{R}^n$, $T_a(v) \in \mathbb{R}$.

A expressão:

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\| E(\mathbf{a}, \mathbf{v})$$

que apareceu na definição 6.2 é a expansão de Taylor em primeira ordem para $f(\mathbf{a}+\mathbf{v})$. Ela fornece uma aproximação linear, $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})$, para a diferença $f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})$. O erro incorrido nesta aproximação $\|\mathbf{v}\| E(\mathbf{a}, \mathbf{v})$ é de ordem menor do que $\|\mathbf{v}\|$, ou seja,

$\|\mathbf{v}\| E(\mathbf{a}, \mathbf{v}) \longrightarrow 0$ mais rapidamente do que $\|\mathbf{v}\| \longrightarrow 0$.

Teorema 6.3: "Seja $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbf{a} \in \mathring{S}$ com derivada total $T_{\mathbf{a}}$. Então a derivada $f'(\mathbf{a}, \mathbf{y})$ existe para qualquer $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, e

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}) = f'(\mathbf{a}, \mathbf{y})$$

Ademais, $f'(\mathbf{a}, \mathbf{y})$ é uma combinação linear das componentes de $\mathbf{y}$. A saber, se $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i$, então:

$$f'(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(\mathbf{a})\, y_i \,."$$

Demonstração:

Como T_a é uma transformação linear, segue trivialmente que $T_a(0) = 0$. Por outro lado, vimos no exemplo 5.2 (a) que $f'(a, 0) = 0$.

Logo, segue trivialmente que

$$T_a(y) = f'(a, y) \quad , \quad y = 0.$$

Conseqüentemente, podemos supor sem perda de generalidade que $y \neq 0$. Da diferenciabilidade de f em $a \in \dot{S}$, temos da definição 6.2 que

$$f(a + v) = f(a) + T_a(v) + \|v\| E(a, v)$$

com $\|v\| < r$, para algum $r > 0$ e

$$\lim_{\|v\| \to 0} E(a, v) = 0.$$

Tomemos, então $v = hy$, com $h \neq 0$ de forma a satisfazer

$$\|v\| < r \Leftrightarrow |h| \|y\| < r$$

Da linearidade de T_a, temos que

$$T_a(v) = T_a(hy) = h T_a(y)$$

e a fórmula de Taylor implica que:

$$\frac{f(a + h y) - f(a)}{h} = T_a(y) + \frac{|h| \|y\|}{h} E(a, v)$$

tomando o limite $h \to 0$, obtemos:

$$f'(a, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h y) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[T_a(y) + \frac{|h| \|y\|}{h} E(a, v) \right]$$

$$= T_a(y) + \|y\| \lim_{h \to 0} \left[\frac{|h|}{h} E(a, v) \right]$$

Como $\frac{|h|}{h} = \pm 1$ é limitada e $E(a, v) \xrightarrow{h \to 0} 0$, pois $\|v\| \xrightarrow{h \to 0} 0$, o segundo termo se anula e concluímos que

$$f'(a, y) = T_a(y).$$

Escrevendo $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ e usando a linearidade de T_a:

$$T_a(y) = T_a\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} y_i T_a(e_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i f'(a, e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \partial_i f(a)$$

obtemos a tese. ∎

2- O Gradiente de um Campo Escalar

O teorema 6.3 forneceu uma expressão para a derivada de um campo escalar $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ao longo de um vetor $y \in \mathbb{R}^n$ num ponto interior $a \in S$:

$$f'(a, y) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a)\, y_i$$

que pode ser interpretada como o produto interno do vetor y com um vetor cujas componentes são as derivadas parciais do campo escalar f ao longo das direções canônicas.

Definição 6.4: "Seja $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $a \in S$ um ponto interior, se existirem as derivadas parciais de f em a, definimos o gradiente de f como o seguinte vetor

$$\nabla f(a) := \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a)\, e_i = (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \dots, \partial_n f(a))."$$

Uma notação alternativa para o gradiente de f é: $\nabla f = \text{grad} f$.

Naturalmente, se existirem as derivadas parciais de f em todos os pontos de $\tilde{S} \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$, verificamos que

$$\nabla f: \tilde{S} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad x \longmapsto \nabla f(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x)\, e_i$$

constitui um campo vetorial.

Em termos do gradiente, podemos escrever a expansão de Taylor em primeira ordem como:

$$f(a+v) = f(a) + \nabla f(a) \cdot v + \|v\| E(a,v)$$

com $E(a,v) \xrightarrow{\|v\| \to 0} 0$, que possui uma forma muito semelhante à sua contraparte unidimensional, com o gradiente $\nabla f(a)$ fazendo o papel da derivada ordinária, $f'(a)$.

<u>Exemplo 6.5</u>: " Determinar o vetor gradiente dos seguintes campos escalares:

(a) $f(x,y) = 5x^2 y + \frac{1}{x} y^2$

(b) $g(x,y,z) = x y z^2$

<u>Solução</u>:

(a) $$\nabla f(x,y) = \sum_{i=1}^{2} \partial_i f(x,y)\, e_i = \partial_x f(x,y)\, e_1 + \partial_y f(x,y)\, e_2$$

$$= \left(10xy - \frac{y^2}{x^2}\right) e_1 + \left(5x^2 + 2y/x\right) e_2$$

(b) $$\nabla g(x,y,z) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i g(x,y,z)\, e_i = \partial_x g(x,y,z)\, e_1 + \partial_y g(x,y,z)\, e_2 + \partial_z g(x,y,z)\, e_3$$

$$= yz^2 e_1 + xz^2 e_2 + 2xyz\, e_3 \,."$$

Podemos finalmente demonstrar que a nossa noção de diferenciabilidade, como na <u>definição 6.2</u> é, de fato, uma condição suficiente para a continuidade do campo escalar em questão.

<u>Teorema 6.6</u>: "Seja $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em um ponto interior $\mathbf{a} \in S$, então f é contínua em $\mathbf{a}$."

<u>Demonstração</u>: Como f é diferenciável em $\mathbf{a}$ podemos escrever que

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\| E(\mathbf{a},\mathbf{v})$$

com $E(\mathbf{a},\mathbf{v}) \xrightarrow{\|\mathbf{v}\| \to 0} 0$. Tomando o módulo de ambos os lados dessa igualdade e empregando as desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})| &= |\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\| E(\mathbf{a},\mathbf{v})| \\ &\leqslant |\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}| + |\|\mathbf{v}\| E(\mathbf{a},\mathbf{v})| \\ &\leqslant \|\nabla f(\mathbf{a})\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\| |E(\mathbf{a},\mathbf{v})| \end{aligned}$$

Tomando o limite $\|\mathbf{v}\| \to 0$, concluímos que

$$\lim_{\|\mathbf{v}\| \to 0} |f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})| = 0 \iff \lim_{\|\mathbf{v}\| \to 0} f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{a})$$

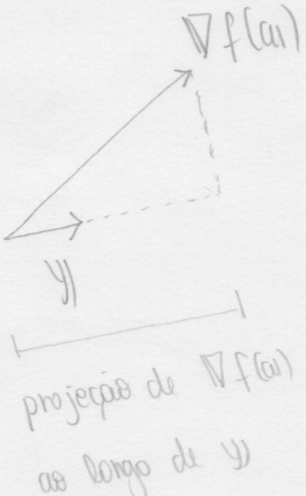
Demonstrando a continuidade de f em $\mathbf{a}$. ■

Seja $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar, um vetor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ unitário e suponha que exista a derivada direcional $f'(\mathbf{a}, \mathbf{y})$, para algum ponto interior $\mathbf{a} \in S$. Suponha, adicionalmente que exista o gradiente de f no ponto $\mathbf{a}$ e que $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Pelo <u>teorema 6.3</u>

$$f'(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = \nabla f(\mathbf{a}) \circ \mathbf{y} = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \, \|\mathbf{y}\| \cos\theta$$

$$= \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre $\nabla f(\mathbf{a})$ e $\mathbf{y}$.



A relação acima possui uma interpretação geométrica simples mas deveras importante. A saber, a derivada direcional de $\mathbf{y}$ é simplesmente a projeção do vetor gradiente na direção $\mathbf{y}$.

Naturalmente, a derivada direcional é máxima quando $\cos\theta = 1$, ou seja, quando $\mathbf{y}$ é paralelo ao gradiente $\nabla f(\mathbf{a})$. Ao passo que, a derivada direcional se anula quando consideramos uma direção $\mathbf{y}$ perpendicular ao gradiente $\nabla f(\mathbf{a})$. Consequentemente, podemos interpretar a direção definida pelo vetor gradiente como aquela na qual o campo escalar sofre a maior taxa de variação, que corresponde à norma do vetor gradiente, $\| \nabla f(\mathbf{a}) \|$.

3 - Uma Condição Suficiente para Diferenciabilidade

O teorema 6.6 comprovou que a nossa definição 6.2 para diferenciabilidade de fato leva ao resultado desejado, a saber, fornece uma condição suficiente para a continuidade de campos escalares. Contudo, verificar se um dado campo escalar é diferenciável não é uma tarefa simples como comprova o exemplo seguinte:

Exemplo 6.7: " Demonstrar que o campo escalar:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \longmapsto \|\mathbf{x}\|^2 = x^2 + y^2$$

é diferenciável.

Solução: Para verificarmos a diferenciabilidade de tal f, precisamos, de acordo com a definição 6.2, verificar que o limite

$$\lim_{\|\mathbf{v}\| \to 0} E(\mathbf{a}, \mathbf{v}) = 0$$

com: $f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\| E(\mathbf{a}, \mathbf{v})$.

ou seja, precisamos calcular

$$\lim_{\|v\| \to 0} E(a, v) = \lim_{\|v\| \to 0} \left[\frac{f(a+v) - f(a) - \nabla f(a) \cdot v}{\|v\|} \right]$$

Escrevendo $a = (a_1, a_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, temos que

$$\nabla f(a) = \left(\partial_x (x^2+y^2), \partial_y (x^2+y^2) \right) \Big|_{x = a} = (2x, 2y) \Big|_{x=a}$$

$$= (2a_1, 2a_2)$$

De forma que

$$\lim_{\|v\| \to 0} E(a, v) = \lim_{\|v\| \to 0} \left[\frac{(a_1+v_1)^2 + (a_2+v_2)^2 - a_1^2 - a_2^2 - 2a_1v_1 - 2a_2v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right]$$

$$= \lim_{\|v\| \to 0} \frac{v_1^2 + v_2^2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \lim_{\|v\| \to 0} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$= \lim_{\|v\| \to 0} \|v\| = 0$$

Portanto f é diferenciável $\forall a \in \mathbb{R}^2$ //

O exemplo que acabamos de considerar, ilustra como mesmo para um campo escalar suficientemente simples verificar sua diferenciabilidade é uma significativamente complicada.

O próximo teorema fornece um critério mais objetivo para determinarmos se um dado campo escalar é diferenciável.

Teorema 6.8: "Seja $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in S$ um ponto interior, se as derivadas parciais $\partial_i f(x)$, $1 \leq i \leq n$ existirem em uma bola aberta $B(a, r) \subset S$ e forem contínuas no ponto a, então f é diferenciável em a."

Demonstração: O teorema 6.3 nos diz que $T_a(v) = \nabla f(a) \cdot v$. Demonstraremos sob as hipóteses acima que:

$$f(a+v) - f(a) = \nabla f(a) \cdot v - \|v\| E(a,v)$$

com $E(a,v) \xrightarrow{\|v\| \to 0} 0$.

Denote $\|v\| = v$ e introduza um vetor unitário u, $\|u\| = 1$, tal que: $v = v u$. Tomando v pequeno o suficiente de forma que: $(a+v) = (a + v u) \in B(a,r)$, na qual as derivadas parciais de f existem por hipótese.

Naturalmente, podemos expandir u na base canônica:

$$\mathbb{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbb{e}_i$$

Escrevendo a diferença $f(\mathbb{a} + \mathbb{v}) - f(\mathbb{a})$ como uma soma telescópica:

$$f(\mathbb{a} + \mathbb{v}) - f(\mathbb{a}) = f(\mathbb{a} + v\,\mathbb{u}) - f(\mathbb{a})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[f(\mathbb{a} + v\,\mathbb{w}_k) - f(\mathbb{a} + v\,\mathbb{w}_{k-1}) \right]$$

onde os vetores $\mathbb{w}_k \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq k \leq n$ são escolhidos de forma a satisfazer a relação de recorrência:

$$\mathbb{w}_k = \mathbb{w}_{k-1} + u_k \mathbb{e}_k \quad , \quad 0 \leq k \leq n$$

e as condições: $\mathbb{w}_0 = \mathbb{0}$, $\mathbb{w}_n = \mathbb{u}$. Mais concretamente,

$$\mathbb{w}_0 = \mathbb{0}, \ \mathbb{w}_1 = u_1 \mathbb{e}_1, \ \mathbb{w}_2 = u_1 \mathbb{e}_1 + u_2 \mathbb{e}_2, \ldots, \ \mathbb{w}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \mathbb{e}_k .$$

Consequentemente, podemos escrever que:

$$f(\mathbb{a} + v\,\mathbb{w}_k) - f(\mathbb{a} + v\,\mathbb{w}_{k-1}) = f(\mathbb{b}_k + v\,u_k \mathbb{e}_k) - f(\mathbb{b}_k)$$

onde introduzimos o vetor $\mathbb{b}_k = \mathbb{a} + v\,\mathbb{w}_{k-1}$ e utilizamos a relação de recorrência.

Agora, como os vetores $\mathbb{b}_k$ e $\mathbb{b}_k + v\,u_k \mathbb{e}_k$ diferem apenas em sua k-ésima componente, podemos invocar o teorema do valor médio (teorema 5.4), para garantir a existência de um $\mathbf{c}_k$ pertencente ao segmento de reta

$$\mathbb{r}(t) = \mathbb{b}_k + t\,\mathbf{e}_k \quad , \quad t \in [0, v u_k]$$

tal que

$$f(\mathbb{b}_k + v u_k \mathbf{e}_k) - f(\mathbb{b}_k) = v u_k f'(\mathbf{c}_k ; \mathbf{e}_k) = v u_k \partial_k f(\mathbf{c}_k)$$

Note que, como $\lim\limits_{v \to 0} \mathbb{b}_k = \lim\limits_{v \to 0} (\mathbb{a} + v \mathbb{w}_{k-1}) = \mathbb{a}$, temos que

$$\lim_{v \to 0} \mathbf{c}_k = \mathbb{a}$$

Substituindo tal resultado na soma telescópica, obtemos:

$$f(\mathbb{a} + \mathbb{v}) - f(\mathbb{a}) = v \sum_{k=1}^{n} u_k \partial_k f(\mathbf{c}_k)$$

Usando que

$$\nabla f(\mathbb{a}) \cdot \mathbb{v} = v \nabla f(\mathbb{a}) \cdot \mathbb{u} = v \sum_{k=1}^{n} u_k \partial_k f(\mathbb{a})$$

Conseqüentemente,

$$\|\mathbf{v}\| \, E(\mathbf{a}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$$

$$= v \sum_{k=1}^{n} \left[\partial_k f(\mathbf{c}_k) - \partial_k f(\mathbf{a}) \right] u_k$$

mas $\mathbf{c}_k \xrightarrow{\|\mathbf{v}\| \to 0} \mathbf{a}$, de forma que da continuidade das derivadas parciais, i.e.,

$$\lim_{\|\mathbf{v}\| \to 0} \partial_k f(\mathbf{c}_k) = \partial_k f\left(\lim_{\|\mathbf{v}\| \to 0} \mathbf{c}_k \right) = \partial_k f(\mathbf{a})$$

Concluímos que

$$\lim_{\|\mathbf{v}\| \to 0} E(\mathbf{a}, \mathbf{v}) = \lim_{\|\mathbf{v}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[\partial_k f(\mathbf{c}_k) - \partial_k f(\mathbf{a}) \right] u_k = 0$$

$\blacksquare$

Exemplo 6.9: "Verificar se as funções são diferenciáveis:

(a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & , \; x \neq 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases}$$

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

Solução: (a) Como:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^4} - \frac{2x^2y^2}{(x^2+y^4)^2} \quad \text{e}$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^4} - \frac{4xy^5}{(x^2+y^4)^2}$$

que são discontínuas na origem. Logo, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(b) Como:

$$\partial_x f(x,y) = 2x \quad e \quad \partial_y f(x,y) = 2y$$

são funções contínuas, concluímos que f é diferenciável em $\forall x \in \mathbb{R}^2$. //