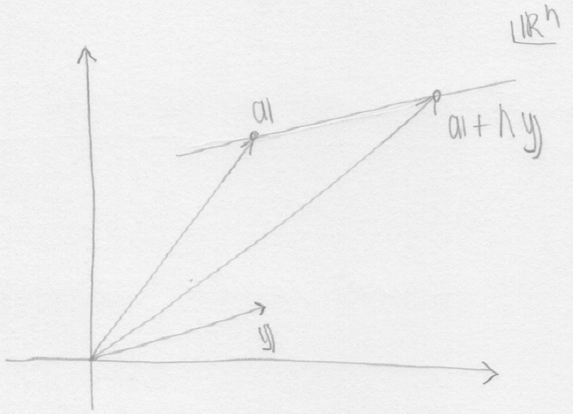
## 1 - Derivada de um Campo Escalar com respeito a um Vetor

Iniciamos a nossa discussão do cálculo diferencial para funções de várias variáveis reais considerando o caso particular mais simples de campos escalares, deixando a generalização para o caso de campos vetoriais para um momento posterior oportuno.

Seja $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e considere um ponto interior $\mathbf{a} \in S$. Queremos estudar a variação do campo escalar $f$ conforme avaliamos $f$ em alguma vizinhança do ponto $\mathbf{a}$. Por exemplo, suponha que $f(\mathbf{a})$ descreva a temperatura em um ponto $\mathbf{a}$ de uma sala aquecida, mas com uma janela aberta. Naturalmente, a temperatura diminui conforme nos aproximamos da janela, porém aumenta se nos aproximarmos do aquecedor. Assim, a nossa intuição nos diz que, de uma maneira geral, a forma com que o campo varia depende da direção com que nos afastamos ou aproximamos do ponto $\mathbf{a}$.

Claramente, podemos especificar tal direção por intermédio de um vetor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Assim, podemos parametrizar o movimento a partir do ponto $\mathbf{a}$

até o ponto $a + y$ por um segmento de reta unindo tais pontos;

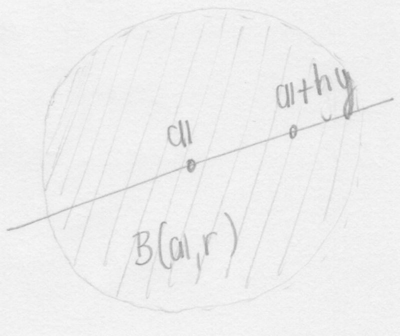



onde todo ponto sobre tal segmento é da forma

$$a + h y \ , \quad h \in \mathbb{R}$$

e dista do ponto $a$ : $\| h y \| = |h| \| y \|$.

Como por hipótese $a$ é um ponto interior de $S$, existe uma bola aberta de raio $r \in \mathbb{R}_+$ e centro em $a$, $B(a, r) \subset S$. Logo, se escolhermos $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| \| y \| < r$, o segmento unindo $a$ e $a + y$ estará completamente contido em $S$:




Tomando $|h|$ pequeno o suficiente para que $a + h y \in S$, mas com $h \neq 0$, podemos considerar o quociente:

$$\frac{f(a + h y) - f(a)}{h}$$

que corresponde à <u>taxa de variação média</u> de f sobre o segmento unindo os pontos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}+\mathbf{y}$. Assim como no cálculo de funções de uma única variável real, o conceito de derivada surge ao considerarmos o limite $h \to 0$.

<u>Definição 5.1</u>: " Sejam $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um ponto interior $\mathbf{a} \in S$ e um vetor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. A derivada do campo escalar f com respeito ao vetor $\mathbf{y}$ no ponto $\mathbf{a}$ é definida como o limite:

$$f'(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{y}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

quando este existir."

<u>Exemplo: 5.2</u>: " Aplicações triviais da <u>definição 6.1</u>:

(a) Seja $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e tome $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Logo,

$$f'(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a})}{h} = 0$$

Consequentemente, a derivada de qualquer campo escalar ao longo do vetor nulo sempre existe e é zero.

(b) Seja $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma transformação linear, de forma que

$$f(\mathbf{a} + h\mathbf{y}) = f(\mathbf{a}) + h\, f(\mathbf{y})$$

Logo, a derivada de $f$ ao longo do vetor $y$ no ponto $a$ é dada por:

$$f'(a; y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a) + h\, f(y) - f(a)}{h} = f(y).$$

Como esse resultado é válido para qualquer $a \in S$ e qualquer $y \in \mathbb{R}^n$, concluímos que a derivada de uma transformação linear com respeito ao vetor $y$ é igual ao valor da transformação linear em $y$."

Para estudarmos o comportamento do campo escalar $f$ ao longo da reta: $a + ty$, $t \in \mathbb{R}$, é conveniente introduzirmos a seguinte função

$$g: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \longmapsto g(t) = f(a + ty).$$

<u>Teorema 5.3</u>: "Sejam $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um ponto interior $a \in S$ e um vetor $y \in \mathbb{R}^n$ e considere $g: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(a + ty)$. Se alguma das derivadas $f'(a + ty; y)$ ou $g'(t)$ existir, então a outra também existe e

$$g'(t) = f'(a + ty; y).$$

Em particular, $g'(0) = f'(a; y)$."

<u>Demonstração</u>: Claramente,

$$g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + ty + hy) - f(a + ty)}{h}$$

$$= f'(a + ty \,;\, y)$$

$\blacksquare$

Um corolário imediato do <u>teorema 6.3</u> é o teorema do valor médio para campos escalares que demonstramos a seguir:

<u>Teorema 5.4</u>: " Sejam $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um ponto interior $a \in S$ e um vetor $y \in \mathbb{R}^n$. Se a derivada $f'(a + ty \,;\, y)$ existir para qualquer $t \in [0,1]$, então para algum $\theta \in (0,1)$ é verdade que:

$$f(a + y) - f(a) = f'(z \,;\, y) \quad , \quad z = a + \theta y \,."$$

<u>Demonstração</u>:

Do <u>teorema 5.3</u> sabemos que existe a derivada da função:

$$g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,,\quad t \in D \longmapsto g(t) = f(a + ty) \quad , \quad D = [0,1]$$

e que

$$g'(t) = f'(a + ty \,;\, y) \quad , \quad \forall t \in D \,.$$

Naturalmente, tal $g$ é contínua em $D$. Logo, podemos invocar o o teorema do valor médio para funções de uma única variável real, para garantir a existência de um $\theta \in \overset{\circ}{D} = (0,1)$, tal que:

$$g(1) - g(0) = g'(\theta)(1-0) = g'(\theta).$$

Como: $g(1) = f(a + y)$ e $g(0) = f(a)$, concluímos que:

$$f(a+y) - f(a) = f'(a + \theta y, y).$$

$\blacksquare$

## 2- Derivadas Direcionais e Derivadas Parciais

Um caso particularmente útil e importante ocorre quando calculamos a derivada de um campo escalar $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ao longo de um vetor $y \in \mathbb{R}^n$ unitário, i.e., $\|y\| = 1$. Neste caso, a distância entre os pontos $a$ e $a + hy$ é $|h|$ e o quociente

$$\frac{f(a + hy) - f(a)}{h}$$

representa uma taxa de variação da função $f$ por unidade de distância ao longo da direção $y$. Portanto, denominamos tal derivada $f'(a; y)$ de derivada direcional.

<u>Definição 5.5</u>: " Sejam $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um ponto interior $a \in S$ e $y \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário, i.e., $\|y\| = 1$. Denomina-se $f'(a, y)$ de derivada direcional de $f$ no ponto $a$ na direção de $y$. Em particular, se $y = e_i$, $1 \leq i \leq n$, um dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ a derivada direcional $f'(a, e_i)$ é denominada derivada parcial com respeito a $e_i$ e denotada por $\partial_i f(a)$. "

Em virtude das <u>definições 5.1 e 5.5</u>, temos que a derivada parcial do campo escalar $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com respeito ao i-ésimo vetor da base canônica, $e_i$, é

$$\partial_i f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h e_i) - f(a)}{h}$$

As notações seguintes são também comumente empregadas para denotar $\partial_i f(a)$:

$$\partial_i f(a) = D_i f(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(a) = f_{x_i}(a), \quad 1 \leq i \leq n$$

<u>Exemplo 5.6</u>: " Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = x \cdot \log(x^2 + y^2)$.

Calcule as derivadas parciais.

<u>Solução</u>: Precisamos calcular:

$$\partial_1 f(x,y) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

De acordo com o <u>teorema 5.3</u> podemos reduzir o cálculo de tais derivadas às derivadas ordinárias das funções:

$$g_1(t) = (x+t) \cdot \log[(x+t)^2 + y^2]$$

$$g_2(t) = x \cdot \log[x + (y+t)^2]$$

Como:

$$g_1'(t) = \log[(x+t)^2 + y^2] + (x+t) \cdot \frac{2(x+t)}{(x+t)^2 + y^2}$$

$$= \frac{2(x+t)^2}{(x+t)^2 + y^2} + \log[(x+t)^2 + y^2]$$

$$g_2'(t) = x \cdot \frac{2(y+t)}{x^2 + (y+t)^2} = \frac{2x(y+t)}{x^2 + (y+t)^2}$$

temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g_1'(t)\Big|_{t=0} = \frac{2x^2}{x^2+y^2} + \log(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g_2'(t)\Big|_{t=0} = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$ "

O exemplo 5.6 ilustra uma conseqüência importantíssima do teorema 5.3 para o cálculo de derivadas parciais, a saber, para calcularmos a derivada do campo escalar $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com respeito a $e_i$, $1 \leq i \leq n$, i.e., $\partial_i f(x_1, \ldots, x_n)$, mantemos todas as demais componentes $x_j$, $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$, constantes e usamos as regras de derivação das funções de uma variável com respeito a $x_i$.

Exemplo 5.7: " Calcular as derivadas parciais:

(a) $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^2 - 4x$

(b) $g(x,y,z) = z + \sin(2x+y)$.

Solução: (a) $\partial_x f = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y + 3xy^2 - 4x)$

$= 2 \cdot 2x \cdot y + 3y^2 - 4 = 4xy + 3y^2 - 4$

$\partial_y f = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y + 3xy^2 - 4x)$

$= 2x^2 + 6xy$

(b) $\partial_x f = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(z + \sin(2x+y)\right) = 2\cos(2x+y)$

$\partial_y f = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(z + \sin(2x+y)\right) = \cos(2x+y)$

$\partial_z f = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(z + \sin(2x+y)\right) = 1$ . //

Para podermos obter uma interpretação geométrica mais clara das derivadas parciais, restringiremo-nos aos campos escalares bidimensionais. Seja $f: S \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto z = f(x,y)$ um campo escalar que admite derivadas parciais no ponto $(x_0, y_0) \in S$.

Para $y = y_0$ temos que $f(x, y_0)$ é uma função de uma variável cujo

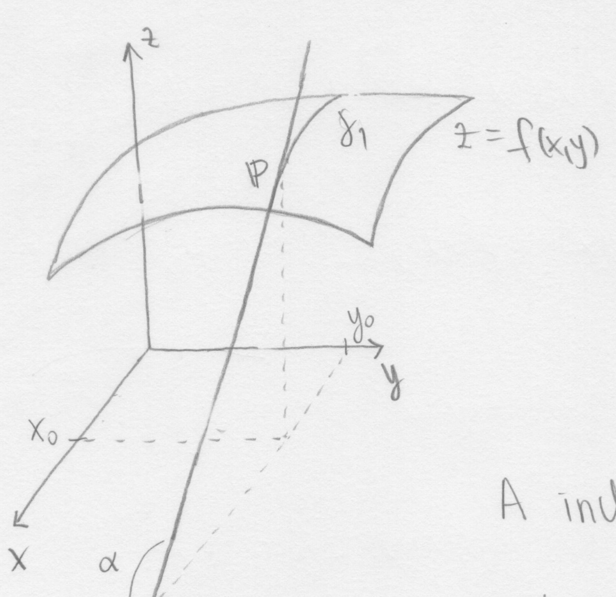
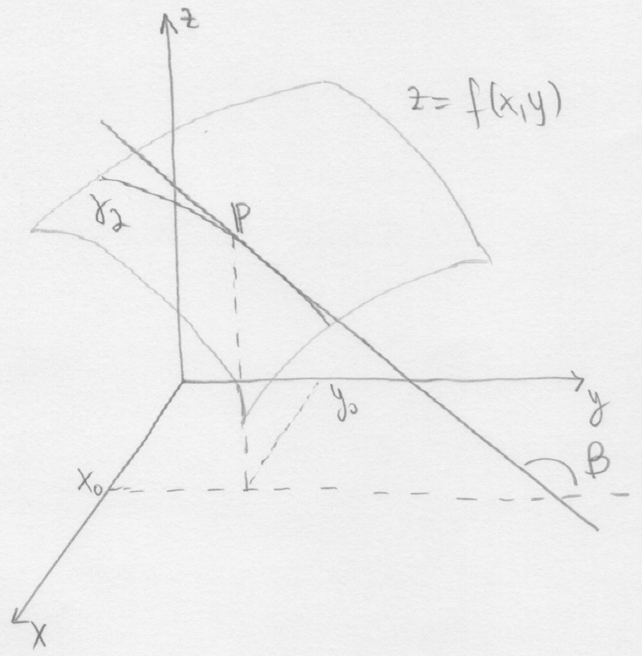



gráfico é uma curva $\gamma_1$, dada pela intersecção da superfície $z = f(x,y)$ com o plano $y = y_0$.

A inclinação ou coeficiente angular da reta tangente à curva $\gamma_1$ no ponto $P = (x_0, y_0)$ é:

$\tan\alpha = \partial_x f(x_0, y_0)$.

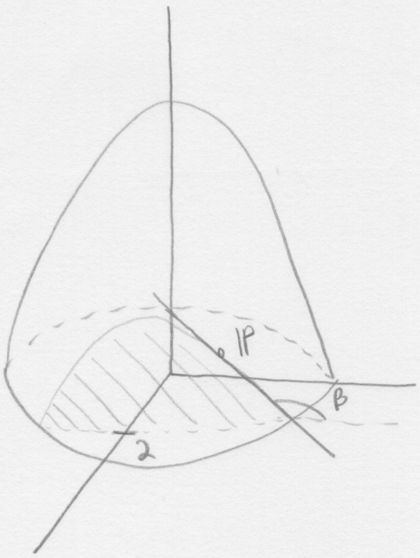
De maneira análoga, temos que a inclinação da reta tangente à curva $\gamma_2$, obtida a partir da intersecção de $z = f(x,y)$ com o plano $x = x_0$ é




$$\tan\beta = \partial_y f(x_0,y_0).$$

Exemplo 5.8 :// Seja $z = f(x,y) = 6 - x^2 - y^2$, encontre a inclinação da reta tangente à curva $\gamma_2$ obtida a partir da intersecção de $z = f(x,y)$ com o plano $x = 2$, no ponto $p = (2,1,1)$.

Solução :




A curva $\gamma_2$ é obtida pela intersecção do parabolóide $z = 6 - x^2 - y^2$ com o plano $x = 2$, i.e.

$$\gamma_2 : \ z = 6 - 4 - y^2 \Leftrightarrow z = 2 - y^2$$

Sua inclinação no ponto $p = (2,1,1)$ é

$$\tan\beta = \partial_y f(2,1) = \partial_y [2 - y^2]\Big|_{y=1} = -2y\Big|_{y=1} = -2 \ //$$

## 3- Derivadas Parciais de Ordem Superior

O processo de diferenciação parcial de um campo escalar $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ produz $n$ novos campos escalares:

$$g_i = \partial_i f : \tilde{S} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,, \quad 1 \leq i \leq n \,, \quad \tilde{S} \subseteq S$$

cujas derivadas parciais podemos também considerar:

$$\partial_j g_i = \partial_j \partial_i f \,, \quad 1 \leq i,j \leq n$$

Processo que podemos iterar até a ordem que desejarmos. Por exemplo, para um campo escalar bidimensional existem quatro derivadas parciais de segunda ordem:

$$\partial_1(\partial_1 f) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \,, \quad \partial_1(\partial_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\partial_2(\partial_1 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \,, \quad \partial_2(\partial_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

É importante ressaltar que de uma forma geral as derivadas parciais não precisam comutar, i.e.

$$\partial_2(\partial_1 f) \neq \partial_1(\partial_2 f) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Estudaremos posteriormente uma condição suficiente para que as derivadas parciais comutem.

Exemplo 5.9: " Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem da função

$$f(x,y) = x^3y + x^2y^4.$$

Solução:

$$\partial_x f = 3x^2y + 2xy^4 \Rightarrow \begin{cases} \partial_x^2 f = 6xy + 2y^4 \\ \partial_y \partial_x f = 3x^2 + 8xy^3 \end{cases}$$

$$\partial_y f = x^3 + 4x^2y^3 \Rightarrow \begin{cases} \partial_x \partial_y f = 3x^2 + 8xy^3 \\ \partial_y^2 f = 12x^2y^2 \end{cases}$$

Note que neste caso as derivadas parciais comutam pois

$$\partial_x \partial_y f = 3x^2 + 8xy^3 = \partial_y \partial_x f .$$ "