Fenômenos Elétricos

Neste capítulo vamos descrever alguns fenômenos importantes que decorrem do movimento de cargas. Em especial discutiremos sobre circuitos elétricos e mostraremos um modelo simples de membrana celular a partir destes conceitos.

Precisamos primeiro definir o conceito de corrente elétrica. Se conectarmos duas placas paralelas a um tomada, por exemplo, surgirá entre elas um campo elétrico que deslocará os elétrons da placa na direção negativa do campo. O fluxo de carga será definido como a corrente elétrica e terá sentido oposto ao do movimento da carga:

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{1}$$

A unidade no SI é dada pelo ampère, $A = C/s$.

Vamos então medir a corrente elétrica que passa em um fio conectando uma bateria a uma lâmpada. Para isso vamos construir um modelo microscópico de deslocamento dos elétrons quando sujeito a uma diferença de potencial (bateria). Devido a energia térmica, os elétrons estão constantemente se movimentando no fio, mas a velocidade *média* é nula, já que a distribuição de velocidades é aleatória em todas as direções. Se aplicarmos uma diferença de potencial no fio, então o campo elétrico provocará uma aceleração no sentido do campo, dado por

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}, \tag{2}$$

onde e e m são a carga e a massa do elétron, respectivamente, e E é o campo elétrico aplicado.

A velocidade de deslocamento dos elétrons livres será dada por $v_d = a\tau$, onde a é a aceleração calculada em 2 e τ é o tempo de colisão, pois quando o elétron colide com um dos átomos do fio ele é desviado na direção oposta. Assim, temos

$$v_d = a\tau = \frac{eE}{m}\tau = \frac{eV}{mL}\tau, \tag{3}$$

onde consideramos a definição de potencial elétrico aplicado a placas paralelas, $V = EL$, L sendo o deslocamento dado pela distância entre as placas.

Mas se considerarmos que a carga livre, ΔQ, depende da densidade de elétrons livres, n, da área A do fio, então em um comprimento l do fio ela será $\Delta Q = nAle$. O tempo necessário para a carga deslocar uma distância l do fio é $\Delta t = v_d/l$. Portanto, a corrente elétrica que passa pelo fio será

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{nAle}{l/v_d} = nAev_d \tag{4}$$

Usando 3 em 4:

$$I = \frac{ne^2\tau A}{mL} V \tag{5}$$

Podemos reescrever esta equação como

$$I = \sigma \frac{A}{L} V = GV, \tag{6}$$

onde σ é a condutividade e é dado por

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \tag{7}$$

e G é a condutância.

Daí obtemos a *Lei de Ohm*,

$$V = RI, \tag{8}$$

onde R é a resistência e é dada por

$$R = \frac{1}{G} = \rho \frac{L}{A}, \tag{9}$$

onde ρ é a resistividade do material, dado pelo inverso da condutividade, $\rho = 1/\sigma$.

É importante notar que nesta dedução assumimos que corrente e potencial são linearmente proporcionais. Isto não é sempre válido, como pode-se notar no comportamentos de diodos e transistores.

Por fim, vamos obter uma relação entre potência, tensão e corrente. A energia potencial é dada por $U = qV$. A carga pode ser expressa em termos da corrente como $q = I\Delta t$. Lembrando da definição de potência, variação da energia por tempo,

$$P = \frac{U}{\Delta t} = IV \tag{10}$$

Usando 8 em 10,

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R} \tag{11}$$

Aplicação da lei de Ohm em circuitos elétricos

Basicamente, os conceitos apresentados anteriormente são suficientes para a resolução de quase todos os circuitos simples. Devemos apenas nos atentar sobre qual grandeza é conservada em cada parte do circuito.

Resistor + Bateria

Vamos considerar um circuito elétrico como o da Figura (I). Qual a diferença de potencial em um ponto qualquer desse circuito fechado? A diferença de potencial tem necessariamente que ser 0, pois ao retornar ao ponto de origem (que possui o mesmo valor de tensão), a diferença será 0.

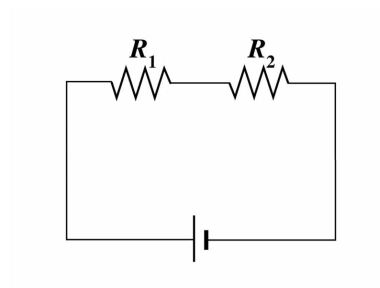

Figura I

Vamos adotar como sinal positivo componentes que *fornecem* energia ao circuito e como sinal negativo as que absorvem parte desta energia. Assim,

$$\begin{aligned} &V_{bateria} - V_{resistor\ 1} - V_{resistor\ 2} = 0 \\ \Rightarrow &V - R_1 I - R_2 I = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

onde $V = V_{bateria}$ e usamos a lei de Ohm para o resistor. Reescrevendo os resistores como um *único* resistor equivalente, teríamos

$$V = R_{equiv} I. \tag{13}$$

Daí, obtemos a regra de adição de resistores em série:

$$R_{equiv} = R_1 + R_2 \tag{14}$$

Agora vamos considerar um circuito com resistores em paralelo (Figura II). No ponto B temos três possibilidades de envolver o circuito. O circuito maior, englobado por R_1 e a bateria, o menor, por R_2 e a bateria e o que contém apenas os dois resistores. Daí obtemos as seguintes, equações, respectivamente:

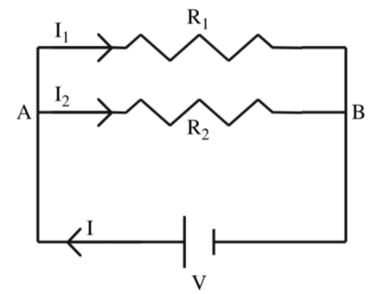

Figura II

$$\begin{aligned} V - R_1 I_1 &= 0 \\ V - R_2 I_2 &= 0 \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Por conservação de carga, temos outra equação independente,

$$I = I_1 + I_2 \tag{16}$$

Usando as duas primeiras equações de 15 em 16, obtemos:

$$I = \frac{V}{R_{equiv}} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{17}$$

E daí obtemos a regra de adição de resistores em paralelo:

$$\frac{1}{R_{equiv}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{18}$$

Capacitor + Bateria

Vamos agora estudar capacitores em série e em paralelo ligados a uma bateria. Um capacitor simples é constituído por duas placas paralelas que, quando aplicadas a uma diferença de potencial V, gera um campo elétrico E, provocando uma separação de cargas que ficam acumuladas em suas superfícies. A tensão será proporcional a carga:

$$V = \frac{Q}{C} \tag{19}$$

Esta expressão será deduzida no próximo capítulo.

Considere o circuito de capacitores em série da Figura III. A tensão em cada capacitor será, respectivamente, $V_1 = Q_1C_1$ e $V_2 = Q_2C_2$.

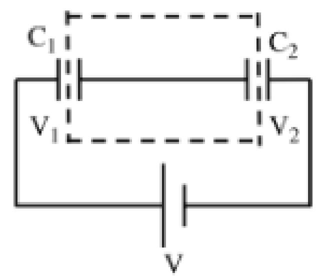

Figura III

Vamos agora considerar o circuito fechado pelas linhas pontilhadas. Se esse circuito está neutro, assim continuará. Isto só será satisfeito se $Q_1 = Q_2$. Novamente escolhendo um ponto qualquer do circuito fechado, teremos que

$$V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \tag{20}$$

E daí podemos encontrar o capacitor equivalente que satisfaça $V = Q/C_{equiv}$, de forma temos

$$\frac{1}{C_{equiv}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{21}$$

Consideremos por fim um circuito de capacitores em paralelo (Figura IV). Nesse caso a tensão em cada capacitor é a mesma, $V = V_1 = V_2$ e usamos a conservação de carga para obter a relação entre as cargas Q, Q_1 e Q_2:

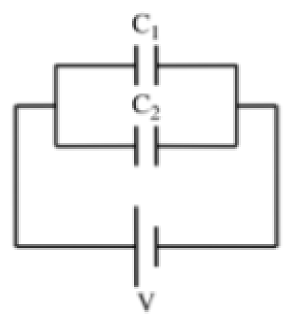

Figura IV

$$Q = Q_1 + Q_2 = V\left(C_1 + C_2\right) \tag{22}$$

Daí temos a relação para o capacitor equivalente:

$$C_{equiv} = C_1 + C_2 \tag{23}$$

Qual a energia armazenada em um capacitor? Lembremos que $U = VQ$. Assim, um elemento infinitesimal será $dU = VdQ$. Usando a definição do capacitor:

$$dU = \frac{Q}{V}dQ \tag{24}$$

Integrando esta equação de $Q_i = 0$ até $Q_f = Q$:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \tag{25}$$

Capacitores possuem uma fase transiente até atingir o equilíbrio. Vamos calcular qual é esta fase. A corrente elétrica é dada pela equação $I = -dQ/dt$. Em um circuito composto por capacitor e resistor, temos que $-RI + Q/C = 0$. Substituindo na equação da corrente elétrica, temos que

$$R\frac{dQ}{dt} + QC = 0$$

Resolvendo está equação e integrando de um tempo inicial $t_i = 0$, que possui um carga inicial $Q(t_i) = Q_0$, até um tempo t, onde $Q(t) = Q$:

$$\int_{Q_0}^{Q} = \frac{dQ}{Q} = -RC\int_0^t dt$$

Resolvendo esta equação, obtemos

$$\log\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = -\frac{t}{RC}$$

,

ou, de forma mais explicita,

$$\frac{Q}{Q_0} = e^{-t/RC}$$

Por fim, calculemos como a corrente elétrica varia em função do tempo,

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC}.$$

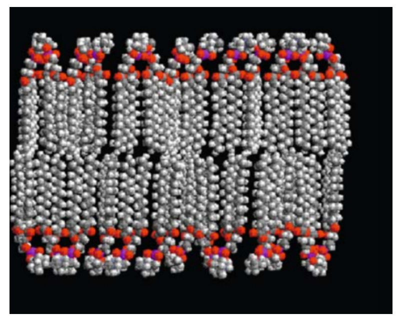

Figura V

Membranas celulares

As duplas camadas lipídicas de uma membrana celular podem ser modeladas como um capacitor, com duas camadas de condutores (a parte polar dos lipídeos) separada por uma camada dielétrica (a cauda de hidrocarbonetos da molécula lipídica), Figura V. Esta dupla camada funciona como uma barreira que mantém um ambiente intracelular de íons e macromoléculas diferentes do ambiente externo.

Como há uma distribuição diferente entre os vários íons dentro e fora das células, existe um potencial de repouso cuja diferença de potencial é de $\sim 0,1\,V$. Além disso, há também uma resistência ao fluxo de corrente iônica. Podemos então usar um circuito RC como o da Figura VI para descrever o comportamento da membrana.

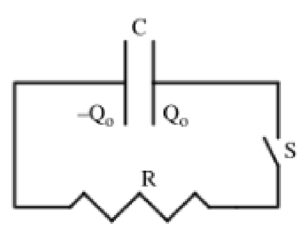

Figura VI

Quando o circuito S for fechado por algum mecanismo celular que permite a passagem de íons, haverá uma corrente sendo transportada da placa positiva a placa negativa do capacitor. Assim, matematicamente, o circuito será descrito por

$$-IR + \frac{Q}{C} = 0 \tag{26}$$

Nesse caso, estamos no regime transiente do capacitor em que ele está sendo carregado e descarregado e, portanto, *varia com o tempo*.

Então, como calculado na seção anterior, a carga e a corrente do capacitor serão dadas por

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 e^{-t/RC}, \\ I &= I_0 e^{-t/RC}. \end{aligned} \tag{27}$$

Q_0 é a carga inicial do capacitor e I_0 é a corrente inicial quando o circuitoS é fechado e será $I_0 = Q_0/RC$.

Vamos agora obter uma estimativa do número de moléculas que passam pela membrana. No estado de repouso, a constante $\tau = RC$ varia entre $10\,\mu s$ e $1\,s$. Vamos utilizar a capacitância e resistância por unidade de área, C/A e RA, respectivamente (note que $C/A \times RA = RC$). $C/A \approx 1\,\mu F/cm^2$ e $RA = \rho L$ varia entre 10 e $10^6\,\Omega - cm^2$. Para um potencial de repouso de $0,1\,V$, a densidade de carga na superfície é aproximadamente $Q_0/A \approx 1\,\mu A/cm^2$. Um mol de um íon monovalente corresponde a uma carga $\mathcal{F} = N_A e = 6 \times 10^{23} \cdot 1,6 \times 10^{-19} \approx 10^5\,C/mol$, onde $\mathcal{F}$ é a constante de Faraday. Temos então que o número de moles relacionado a Q_0 por unidade de área é

$$\frac{Q_0}{A\mathcal{F}} = 10^{-12}\,mol/cm^2 = 1\,pmol/cm^2 \tag{28}$$

Vamos estimar a densidade de corrente usando a densidade de carga obtida acima e um tempo de $1\,ms$. Daí obtemos que $I/A \approx 10\,\mu A/cm^2$ e, portanto, temos um fluxo de $1\,nmol\ íons/cm^2 s$.

Membranas biológicas possuem uma série de proteínas que atuam como canais seletivos que permitem o fluxo de correntes iônicas através da membrana. Em média, membranas possuem $\approx 10\,canais/\mu m^2$. O número de íons que passam por canal é, portanto,

$$\frac{I/A}{canais/cm^2} = 0,1\,pA = 10^{-18}\,mols\ de\ íons/s = 600\,íons/ms \tag{29}$$

Neste modelo desconsideramos a origem do potencial de repouso, ou seja, o mecanismo de geração de energia do circuito. Isso se deve a permeabilidade seletiva da membrana aos vários íons.

Vamos considerar apenas os canais de potássio, K^+. Isso significa que apenas potássio pode ultrapassar a barreira da membrana. Na ausência de fenômenos elétricos, as concentrações de K^+ dentro e fora da célula seriam iguais. No caso do KCl, por exemplo, os íons negativos do Cl^- exercem uma papel importante no balanceamento de forças, explicando este desequilíbrio.

Este equilíbrio de concentrações será atingido por

$$\frac{c_0}{c_i} = e^{-\frac{U_0 - U_i}{RT}}, \tag{30}$$

onde R é a constante molar dos gases, c_x e U_x a concentração e energia potencial do íon dentro e fora da membrana. Esta equação pode ser deduzida dentro do contexto de termodinâmica e não será feita aqui.

A diferença de potencia, $\Delta U = U_0 - U_i$, pode ser reescrita como $\Delta U = N_a e \Delta V = z\mathcal{F}(V_0 - V_i) = z\mathcal{F}V_k$, onde N_A é o número de Avogadro, z o número de cargas de valência do íon, $z\mathcal{F}$ o número de cargas por mol do íon e V_k, é o potencial de equilíbrio da membrana devido a este íon. Substituindo $DeltaU$ em 30,

$$V_k = \frac{RT}{z\mathcal{F}} \log\left(\frac{c_0}{c_i}\right). \tag{31}$$

A equação 31 é conhecida por *equação de Nerst* e V_k, o *potencial de Nerst*.

Células Neuronais

O sistema nervoso humano possui da ordem de $\widetilde{\nu} = 10^{11}$ neurônios, com um consumo médio aproximadamente constante de $\varepsilon = 20\,W$, o que dá um consumo de $\varepsilon/\widetilde{\nu} = 2 \times 10^{-10}\,W/neurônio$.

Vamos considerar que a energia para o funcionamento das células nervosas se deve ao consumo de glicose, que libera $\widetilde{G} = 0{,}686 \times 10^6\,cal/mol = 2{,}872 \times 10^6\,J/mol$. Assim o consumo por neurônio será $\widetilde{G}/\widetilde{\nu} = 4{,}787 \times 10^{-18}\,J/neurônio = 30\,eV/neurônio$. A quantidade total de glicose consumida por segundo no cérebro será, então, $\frac{\varepsilon/\widetilde{\nu}}{\widetilde{G}/\widetilde{\nu}} = 4{,}2 \times 10^7\,íons/s$.

Vamos supor que a transmissão elétrica entre células nervosas se dê por um sistema de capacitores em série. Qual a capacitância equivalente para cada célula?

A capacitância é dada por

$$C = \varepsilon\frac{A}{d}, \tag{32}$$

onde ε é a permissividade do material, A, a área das placas paralelas e d a distância entre elas.

Dado que o cérebro humano pesa em média $1{,}4\,kg$, cada neurônio pesa então $\approx 14\,ng$. Façamos uma suposição inicial de que a densidade do neurônio é a mesma da água e que sua membrana é quadrada. Assim, cada lado mede $L = 14\mu m$ e, portanto, sua área será $A = 1{,}96 \times 10^{-10}\,cm^2$. Dado que a separação típica entre membrana é de $80\,$, a capacitância para o neurônio obtida por estas hipóteses é

$$C \simeq 10\,pF.$$

Portanto, a carga Q_0 deste capacitor equivalente será

$$Q_0 = 5\text{-}6\, pC.$$

O modelo anterior de um circuito RC a tensão e a corrente dependem apenas do tempo, mas não da posição espacial. Este modelo descreve bem membranas celulares pequenas, mas não as dos neurônios.

Um modelo proposto que apresenta este comportamento é o de um cabo linear (justamente porque possui o mesmo circuito elétrico de um cabo), Figura VII. A resolução deste circuito foge do escopo deste curso, mas vejamos algumas propriedades dele.

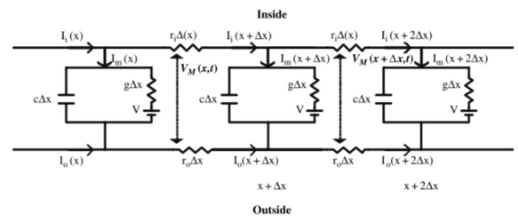

Figura VII

Precisamos analisar dos parâmetros: a constante temporal $\tau = RC = C/G$, dado neste caso por

$$\tau_M = \frac{c_M}{g_M}, \tag{33}$$

onde c_M e g_M, são a capacitância e condutância por unidade de comprimento, respectivamente. E temos que analisar a constante temporal,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(r_i + r_0)\, g_M}}, \tag{34}$$

onde r_i e r_0 são as resistências longitudinais interna e externa, respectivamente. τ_M tem valores típicos de ms e λ, de mm.

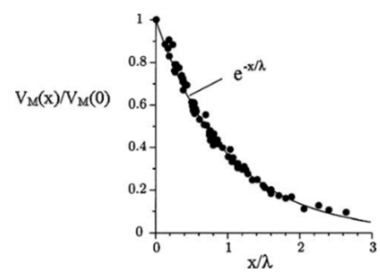

Figura VIII

Se uma corrente elétrica constante é aplicada no ponto $x = 0$, a diferença de tensão da membrana, V_M, do potencial de repouso decairá exponencialmente ao longo do axônio de acordo com

$$V_M = V_M(0)\, e^{-\frac{|x|}{\lambda}}. \tag{35}$$

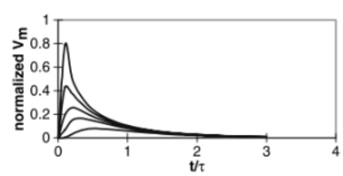

Figura IX

Na figura VIII é possível notar a variação espacial da tensão ao longo do axônio e na Figura IX, a temporal.

Uma generalização deste modelo é o *modelo de Hodgkin-Huxley*, em que no lugar da condutância de um único canal há três possíveis, do K^+, Na^+ e mais um que descreve a corrente de fuga. Na figura X é possível notar a variação temporal em cada um desses canais.

Problemas

1. Admitindo para uma célula uma forma esférica e uma distância entre membranas de 70 , pergunta-se: qual o valor da capacitância para diâmetros de 10 μm e 15 μm se a permissividade elétrica for de 11 ($\varepsilon = \varepsilon_0 \times 11$, $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\, F/m$ e $C = \varepsilon \frac{A}{d}$)?
2. Esquematicamente a entrada de glucose se dá no interior da célula conduzida por um íon Na^+. Qual seria, hipoteticamente, a corrente iônica, se unicamente capacitiva (esta é apenas uma parte da condução da glicose)?

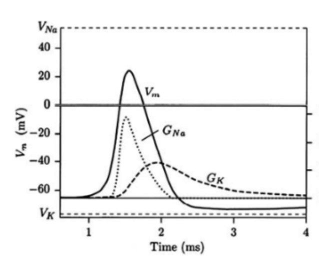

Figura X

3. A lei de Ohm estabelece que $V = RI$ e $\frac{1}{R} = G = \frac{J}{E}$. Estabeleça uma fórmula para G em função da carga elétrica, massa do íon e densidade iônica.
4. A lei de Donnan determina o potencial de repouso nas células. Verifique que este valor é $100\,mV$ para os íons Na^+ e Cl^-.
5. Sódio radiativo é utilizado para verificar a condução elétrica de uma célula. Utilizando os resultados de problemas anteriores e que a taxa de desintegração é $\frac{dN}{dt} = \frac{N_0}{\tau}$ ($\tau = 20\,h$), qual deve ser a tividade do Na^+ para que a presença do sódio radiativo seja 10% da corrente total? (Admita condução capacitiva).