Fluidos

O que é um fluido ideal?

Embora saibamos distinguir o que é e o que não é um fluido, precisamos defini-lo com um pouco mais de precisão. Uma vez que as fórmulas matemáticas e efeitos previstos decorrem das hipóteses sobre as características dos fluidos, é de fundamental importância estas questões conceituais.

Fluidos apresentam comportamentos extremamente difíceis de se estudar, pois em certas circunstâncias observam-se turbulências que dão origens a movimentos caóticos. Turbulências são extremamente relevantes em asas de avião ou mesmo em coágulos no sangue que podem dar origem a trombose, por exemplo.

Vamos aqui nos restringir aos fluidos ideais. Eles possuem as seguintes características:

- são incompressíveis;
- não possuem viscosidade (não há resistência intrínseca que os impeça de fluir);
- fluidos podem rotacionar, mas suas partículas são irrotacionais.

Ou seja, quando empurramos um fluido com o êmbolo, a força é igualmente transferida para todo o fluido. Caso o contrário, haveria uma compressão. Quando associamos a altura de um líquido com a pressão, estamos intuitivamente usando esta propriedade.

Portanto, líquidos, gases e plasmas são fluidos.

Equação da Continuidade de Massa

Uma implicação importante sobre a incompressibilidade de fluidos é que todo o fluido que entra por uma superfície S_1 será o mesmo que sai por uma outra superfície S_2. Ou seja, toda elemento de massa infinitesimal dm_1 que está entrando no tubo, está imediatamente saindo dele, dm_2. O elemento de volume na superfície 1 será então $dV_1 = A_1 dl_1$, uma vez que neste caso a área não é infinetimal.

Mas qual o valor de dl_1? Lembrando que distância é velocidade por tempo e supondo que conheçamos a velocidade do fluido, então $dl_1 = v_1 dt$, Figura I. Como a massa é densidade vezes volume, temos então que

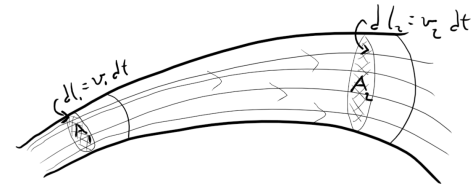


Figure 1:

$$dm_1 = \rho_1 dV_1 = \rho_1 A_1 v_1 dt \tag{1}$$

Mas isso vale na superfície 2 também:

$$dm_2 = \rho_2 dV_2 = \rho_2 A_2 v_2 dt \tag{2}$$

Como estamos supondo que a massa que entra é a mesma que sai, $dm_1 = dm_2$:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \tag{3}$$

Ou seja,

$$\rho A v = constante \tag{4}$$

Observem que na verdade estamos supondo menos do que a incompressibilidade dos fluidos. Estamos apenas supondo que o fluxo que entra numa seção é o mesmo que sai! Logo, se o fluido for compressível, a densidade em cada superfície será diferente, i.e., $\rho_1 \neq \rho_2$! Para que o fluxo seja o mesmo, então velocidade terá que variar para compensar a mudança de densidade.

No caso de um fluido incompressível, $\rho_1 = \rho_2$ e, portanto,

$$Av = constante \tag{5}$$

Equação de Bernoulli

Para um fluido ideal, incompressível, temos a seguinte constante:

$$P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho g v^2 = constante \tag{6}$$

Isso basicamente é a equação da conservação de energia para um fluido ideal. Lembrando da discussão sobre conservação de energia, vamos descobrir quais são os blocos atuantes nesse sistema de fluido ideal.

Consideremos o tubo da Figura II. Vamos supor que estamos pressionando a superfície 1 (ou seja, o fluido se move no sentido $1 \mapsto 2$). Pela conservação de energia temos então que o trabalho realizado pelas forças externas é igual a energia do sistema. Ou seja,

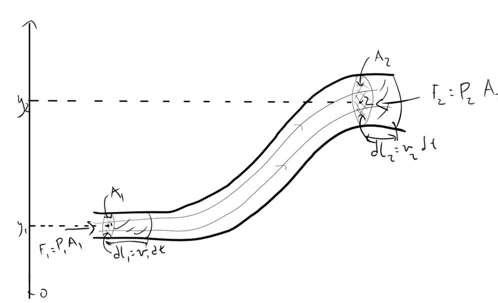


Figure 2:

$$dW^{ext} = dE \tag{7}$$

Quais são as energias do sistema? Temos a energia potencial gravitacional, uma vez que o fluido não está sempre na mesma altura, e a energia cinética, já que o fluido se move com velocidade v.

Lembrando que o trabalho é força vezes deslocamento, na superfície 1 será:

$$dW_1 = F_1 dl_1 \tag{8}$$

Qual a força F_1? Vamos escrever de uma forma mais conveniente. A superfície 1, tem área A_1. Lembrando que a pressão é força por área ($P = F/A$) e relacionando dl_1 com área e volume (como na seção anterior):

$$dW_1 = F_1 dl_1 = P_1 A_1 dl_1 = P_1 dV \tag{9}$$

Na superfície 2 será análogo. Temos que prestar atenção no sinal da força. Supondo que o tubo continue, a superfície S_2 está empurrando uma coluna de líquido, ou seja, a força está no sentido contrário ao movimento. Portanto

$$dW_2 = F_2 dl_2 = P_2 A_2 dl_2 = P_2 dV \tag{10}$$

Assim,

$$\Rightarrow dW^{ext} = dW_1 + dW_2 = (P_1 - P_2)\, dV \tag{11}$$

Agora vamos calcular a variação de energia no tubo. Colocando o referencial no centro da superfície 1, a energia potencial gravitacional em 1 é 0. Já em 2 será (lembre que massa é densidade vezes volume)

$$dE_2^{pot} = -dmg\,(y_2 - y_1) = -\rho g dV\,(y_2 - y_1) \tag{12}$$

Por fim, calculemos a energia cinética:

$$dE_1^{cin} = \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2}\rho dV v_1^2 \tag{13}$$

Para a superfície 2, teremos

$$dE_2^{cin} = \frac{1}{2} dm v_2^2 = \frac{1}{2}\rho dV v_2^2 \tag{14}$$

Pela equação da continuidade de massa, $A_1 v_1 = A_2 v_2$. Como na Figura II $A_2 > A_1$, $\Rightarrow v_1 > v_2$. Logo a variação da energia cinética será

$$dEc^{cin} = \frac{1}{2}\rho dV\,(v_2 - v_1) \tag{15}$$

Juntando todos os elementos da conservação de energia, 7:

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{16}$$

E daí demonstramos a equação de Bernoulli:

$$P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho g v^2 = constante \quad (6)$$

Aplicações da Equação de Bernoulli

Tubo de Venturi

O tubo de Venturi é um equipamento utilizado para se medir a velocidade de escoamento de fluidos, como pode ser observado na Figura III. Um fluido de densidade ρ_f está fluindo por um tubo. Colocamos um tubo conectando os pontos 1 e 2 e parcialmente preenchido com mercúrio, cuja densidade é ρ_{Hg}. Queremos encontrar então a velocidade do fluido, v_1, em termo das densidades, áreas seccionais e altura do tubo.

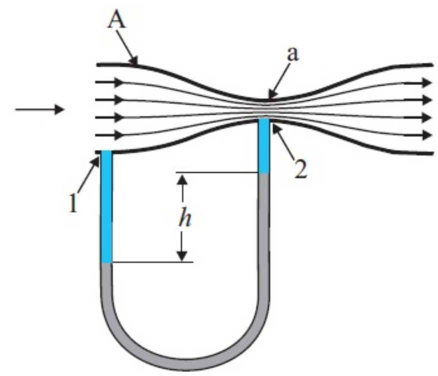


Figure 3:

Os pontos 1 e 2 passam pelo meio do tubo e estão à mesma altura. Usando a equação de Bernoulli para relacionar a pressão e velocidade do fluido nesses pontos, temos:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho_f v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho_f v_2^2 \quad (17)$$

Então a diferença de pressão pode ser reescrita como

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho_f \left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad (18)$$

Agora vamos calcular a pressão na parte mais inferior do tubo com mercúrio, P_b. Temos dois caminhos possíveis, ou pela esquerda, ou pela direita. Como a pressão neste ponto é igual independentemente do caminho escolhido para calculá-la (por continuidade), usemos os dois caminhos possíveis.

Lembrando que estamos considerando fluidos ideais incompressíveis, a variação de pressão num ponto devido a pressão externa se transmitirá para todo o fluido igualmente. Então, temos em P_b a pressão devido ao peso da coluna de mercúrio, a pressão devido ao peso da coluna do fluido e a pressão devido a força externa.

Usando o caminho 1:

$$P_b = P_1 + \rho_f g d_1 + \rho_{Hg} g h_1 \quad (19)$$

Pelo caminho 2:

$$P_b = P_2 + \rho_f g d_2 + \rho_{Hg} g h_2 \quad (20)$$

Igualando as equações 19 e 20

$$P_1 - P_2 = \rho_f \left(d_2 - d_1\right) + \rho_{Hg} \left(h_2 - h_1\right) \quad (21)$$

Observem que da Figura III, $d_1 + h_1 = d_2 + h_2$, então $d_1 - d_2 = h_2 - h_1 = h$. Podemos reescrever então a equação 21 como

$$P_1 - P_2 = \left(\rho_{Hg} - \rho_f\right) gh \tag{22}$$

Substituindo 18 em 22

$$\frac{1}{2}\rho_f \left(v_2^2 - v_1^2\right) = \left(\rho_{Hg} - \rho_f\right) gh \tag{23}$$

Lembrando que pela equação da continuidade de massa $v_2 = (A_1/A_2)\, v_1$, temos finalmente

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\left(\rho_{Hg} - \rho_f\right) gh}{\rho_f \left((A_1/A_2)^2 - 1\right)}} \tag{24}$$

Tubo de Pitot

Um outro equipamento que usa fundamentalmente a mesma ideia do tubo de Venturi é o tubo de Pitot (Figura IV). Ele é construído de tal forma que a velocidade do fluido no qual ele é colocado pode ser calculada em termos da densidade do fluido e do líquido e da diferença de nível nos dois capilares do tubo. Por isso mesmo é usado em aviões já que a velocidade do ar equivale a velocidade do avião.

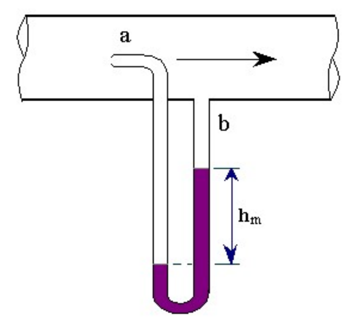


Figure 4:

Vamos considerar a pressão na superfície do líquido no nível mais baixo, p_a. Ela será justamente equivalente a pressão no outro lado. Usando a equação de Bernoulli,

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_b \tag{25}$$

Analogamente, considerando o peso da coluna de líquido dentro do tubo

$$p_a = \rho_l gh + p_b \tag{26}$$

Substituindo 25 em 26, obtemos

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho_l gh \tag{27}$$

Ou,

$$v = \sqrt{\frac{2gh\rho_l}{\rho}} \tag{28}$$

Ou seja, construímos um mecanismo simples para se medir a velocidade de objetos.

Fluidos Reais: Viscosidade

Até o momento trabalhamos com fluidos ideais onde desprezamos a existência de forças resistivas do fluido com a parede do recipiente e do fluido internamente. Disso decorreu a importante propriedade que a pressão se espalha isotropica e uniformemente ao longo do fluido. Se pegarmos duas camadas muito finas do fluido, é razoável modelá-lo como se fossem como duas tiras de borracha, por exemplo. Ao passar um pelo outro, podemos sentir justamente uma força de atrito. Por isso fluidos muito *viscosos* são difíceis de serem mexidos.

De uma maneira mais explícita então, a viscosidade é a propriedade de fluido de resistir à taxa de deformação: uma medida quantitativa da resistência do fluido ao fluxo do movimento.

Em condições ideais, sem atrito, a pressão será dada pela variação da velocidade pela altura

$$\frac{F}{A} = \frac{\Delta v}{\Delta y} \tag{29}$$

Mas lembremos que a força de resistência do ar é usualmente dada por $F_r = -kv$, ou seja adicionamos uma constante de resistência associada a velocidade. Ora, mas o ar é um fluido também. Então associemos uma outra constante de resistência, digamos η à velocidade em 29:

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} \tag{30}$$

η é justamente a constante de viscosidade. Se um fluido obedece esta equação dizemos que é um *fluido Newtoniano*. Forças resistivas nem sempre podem ser descritas por esta igualdade, dada sua complexidade. Este é um modelo válido em primeira ordem para uma ampla gama de casos.

Escoamento Laminar

Se um fluido real apresenta uma variação de velocidade parabólica entre cada camada do fluido, dizemos que o escoamento é laminar, Figura V.

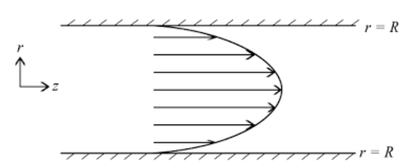


Figure 5:

A variação do fluxo, Q, nas condições de escoamento laminar é dada pela Lei de Poiseuille:

$$Q = vA = \frac{\pi \delta P r^4}{8\eta \Delta L} \tag{31}$$

onde $\Delta P/\Delta L$ é a pressão aplicada por unidade de comprimento e r o raio do tubo.

A derivação desta lei não será feita aqui, mas é fácil. Basta usar a expressão para a viscosidade, 29, e integrar em cima de uma superfície cilíndrica.

Escoamento turbulento

O que acontece se há algum obstáculo afetando a passagem do fluido ou se ele atinge alguma velocidade grande o suficiente (onde não estamos nos preocupando por ora qual o significado de *grande o suficiente*)? Neste caso surgem turbulências no fluido e não podemos usar as hipóteses de escoamento laminar que levaram à dedução da Lei de Poiseuille. Neste caso vamos definir uma grandeza adimensional $\mathfrak{R}$ chamada de *número de Reynolds*:

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta} \qquad (32)$$

onde D é o diâmetro do fluido, $\bar{v}$ a velocidade média e ρ a densidade do fluido.

O escoamento do fluido deixa de ser laminar quando $\mathfrak{R}$ for maior que um valor crítico. Este valor depende da natureza do fluido e do formato do tubo de escoamento. Para se ter uma intuição da ordem de grandeza, para a maioria dos fluidos o escoamento passa a ser circular para $\mathfrak{R} > 10^3$ em um tubo cilíndrico.

Movimento celular

Vamos considerar um célula de diâmetro $D = 10^{-6} m$, velocidade de locomoção de $\bar{v} = 3 \times 10^{-5}\, m/s$ se movemendo no sangue, cuja viscosidade é $\eta \approx 10^{-4}\, kg/(m \cdot s)$ e densidade $\rho \approx 10^3\, kg/m^3$. Temos então que

$$\mathfrak{R} = 3 \times 10^{-5}$$

Logo o escoamento é laminar!

Para se ter uma noção do que isso significa, uma pessoa nadando a $1\, m/s$ numa piscina está num regime de escoamento turbulento ($\mathfrak{R} \sim 10^5$), enquanto que uma pessoa «nadando» numa piscina de mel, nas mesmas condições, estaria num regime de escoamento laminar ($\mathfrak{R} \sim 10$).

Ou seja, uma bactéria se move como nós nadamos numa piscina de mel! Como então ela consegue se locomover?

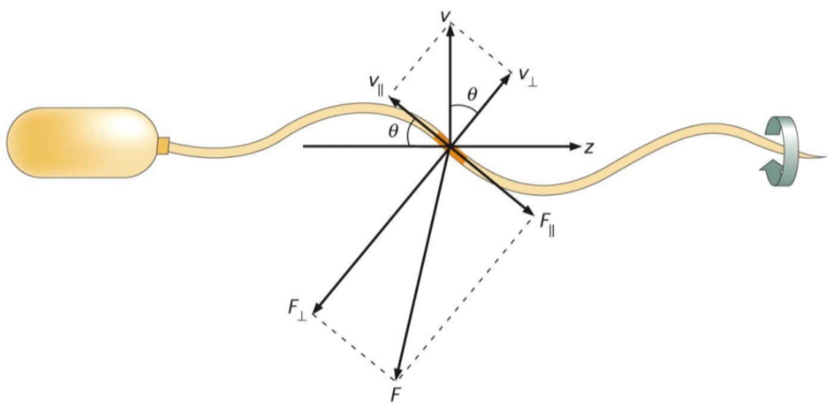
Vamos considerar uma bactéria ciliar se movendo neste fluido. Ela se move com velocidade u e seus cílios com velocidade v relativo a ela. Portanto, como ela está num regime de atrito, a força de resistência é $f_u = \zeta_u u$. Já no caso dos cílios sua velocidade será $f_v = \zeta_v (u - v)$.

Vamos considerar que ela se move a velocidade constante. Portanto, $f_u = f_v$. Daí

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{\zeta_u}{\zeta_u + \zeta_v} v}$$

A distância percorrida pela bactéria será então $\Delta x = u\Delta t$. Vamos calcular quanto a bactéria se move quando o cílio volta a posição original: $\Delta x' = u'\Delta t' = -u\Delta t$, pois se queremos que o cílio volte à posição original, $\Delta t' u' = \Delta t u$ e $u' = -\frac{\zeta_u}{\zeta_u + \zeta_v} v$.

Ou seja, ela não sai do lugar. Como ela se move então?



Vamos considerar um flagelo, como o da Figura VI. Assim,

$$\frac{f_\perp}{f_\parallel} = \frac{\zeta_\perp v_\perp}{\zeta_\parallel v_\parallel} \neq 1$$

Por fim, vamos considerar uma rotação no flagelo de 180 deg. Vemos que nesse caso $f'_\perp = -f_\perp$ e $f'_\parallel = f_\parallel$. A força perpendicular se cancela, mas a paralela se soma! Assim a bactéria consegue se locomover no regime de escoamento laminar. No caso do cílio acontece a mesma coisa, com ele se flexionando para voltar.

Tensão superficial

Uma outra questão interessante relacionada a fluidos e que desempenha um papel importante em diversas situações biológicas é a da tensão supercial. Todos já devem ter observado a superfície de um copo com água. Nela forma uma «película» esférica que suporta o peso de pequenos objetos, tais como mosquitos que pousam na superfície para depositar seus ovos.

Vamos tentar analisar quantitativamente qual o peso suportado nesta superfície. Para suportar o aumento desta superfície, uma força F é necessária. O trabalho realizado por esta força será então $W = F\Delta x$, onde Δx é o comprimento da superfície que é aumentada por uma área $A = w\Delta x$. Estamos aqui considerando um segmento de área tão pequeno que esse pedaço da esfera é basicamente um retângulo. Obtemos que o trabalho por unidade de área é

$$\frac{W}{A} = \frac{F\Delta x}{2\,(w\Delta x)} \tag{33}$$

onde o fator 2 deve-se ao fato de se realizar um trabalho para aumentar a superfície interna **e** externa.

Definimos a tensão superficial como

$$\gamma = \frac{F}{2\Delta x} \tag{34}$$

Claro que esse é um resultado que depende da geometria da superfície. Assumindo que a superfície é uma semi-esfera temos que o comprimento dela é $2\pi r$ e assim $F = \gamma\delta w = 2\pi r\gamma$. Como a superfície está em equilíbrio, isto tem que ser balanceado pela força devido à pressão: $F = \Delta P\pi r^2$, no caso da esfera. Igualando estas duas forças obtemos que

$$\Delta P = 2\frac{\gamma}{r} \tag{35}$$

que também é conhecida como Lei de Laplace para uma membrana esférica.

Capilaridade

Uma aplicação importante da tensão superficial é o comportamento de fluidos em capilares. Este tipo de efeito que permite que termômetros de mercúrio funcionem, pois a coluna de mercúrio subirá uma altura h proporcional a temperatura. Aí basta *calibrarmos* esta altura com uma régua que relacione altura e temperatura e temos um termômetro de mercúrio em operação.

Este efeito apresenta uma série de implicações importantes. É o mecanismo principal de subida de seiva em grandes árvores e de capIlares sanguíneos no corpo humano. No caso das sequóias, que chegam a atingir até 100 m de altura, há um mecanismo mais complexo que inclui a pressão negativa exercida pela transpiração.

Já sabemos qual a força resultante devido a tensão superficial: $F_r = 2\pi r\gamma$. Queremos saber qual a componente vertical (Figura VII) e supondo que esteja em *equilíbrio*, igualar com o peso da coluna de água para sustentar o fluido no capilar. Daí,

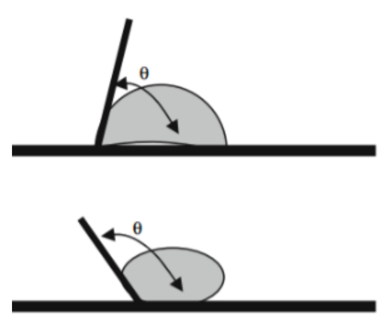


Figure 6:

$$2\pi r\gamma\cos\theta = \underbrace{\rho\pi r^2}_{m} hg$$
$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}} \tag{36}$$

Daí obtemos que para $\cos\theta < 0$ não só o menisco estará invertido, como a altura do capilar está abaixo do nível do recipiente!

Osmose

A osmose é descrita pelo transporte de solvente através de uma membrana semi-permeável de forma a balancear as concentrações de soluto nos dois lados. Sua descrição é dada facilmente através do já discutido para comportamento de fluidos.

Este efeito é de extrema importância na descrição de inúmeros efeitos biológicos como no caso de difusão em hemoglobinas.

Embora não seja complicado, um tratamento mais claro sobre a osmose demandaria o uso de termodinâmica clássica. Podemos usar uma imagem ilustrativa que explica bem a osmose e nos leva coincidentemente à expressão correta.

Algo que é intuitivo, mas que deve ser provado é que o potencial químico da água deve ser o mesmo dos dois lados da membrana. Como consequência a pressão ΔP e o número de moléculas de água devem ser os mesmos. Isso gera uma pressão hidrostática no sentido da solução com soluto.

Como a concentração de soluto pela concentração de solvente na parte do recipiente em que estão misturados é bem pequena, podemos dizer que as moléculas do solvente estão afastadas o suficiente para que se comportem como um «gás», de pressão Π. Assim,

$$\Delta P = \Pi = \underbrace{c}_{\left(\frac{n}{V}\right)} RT \tag{37}$$

Problemas

1. Qual a pressão atmosférica a uma altitude de 5500 ?
2. Bernouilli estabeleceu que $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \textit{constante}$. Em uma canalização onde não ocorre diferença de altura, a água circula de um tubo de diâmetro de $10\,cm$ para outro de diâmetro de $5\,cm$. Dado que o fluxo inicial é de $5\,L/s$, qual a diferença de pressão?
3. Uma garrafa de $1\,L$ é mergulhada, vazia, a uma profundidade de $10\,m$ no mar. Quanto de água irá entrar na garrafa até atingir o equilíbrio?
4. Em um sistema para a determinação da tensão capilar em um tubo com diâmetro de $0,1\,mm$, o líquido subiu $15\,cm$. Qual a tensão superficial? (Determine γ/ρ).

5. Qual deve ser a diferença de temperatura do ar em um balão de $20\,m$ de diâmetro para suportar uma carga de $400\,kg$, a uma altitude de $2\,km$? (Admitir $\rho = 1,2\,g/cm^3$. Lembre que $1\,dm^3 = 1\,L$).
6. Vamos supor que uma nuvem consista de pequenas gotas de água suspensas (uniformemente distribuídas e em repouso). Qual é a aceleração da gota de chuva? (Suponha que quando uma gota bate em outras da nuvem essas outras gotas são adicionadas a gota de chuva. Também suponha que a gota é esférica o tempo todo.) Dica: escreva a expressão da massa em termos da densidade e do raio e ache sua derivada. Escreva também a expressão da variação da massa pela aglutinação de outras gotas.
7. Suponha que há um bloqueio parcial na aorta, que em condições normais bombeia $5\,L/min$. Se o diâmetro da aorta for reduzido em 30%, encontre o quociente de vazão médio que passa nesta aorta com bloqueio. Qual o aumento de pressão necessário para se obter um quociente de vazão normal? (Suponha que a lei de Poiseuille se aplica a este problema.)
8. Artérias saudáveis de pessoas jovens possuem uma tensão de elasticidade máxima de $\sim 500\,N/m$, valor este que dobra com a idade. Encontre a pressão máxima que esta artéria consegue suportar antes de desenvolver um aneurisma e calcule quão maior é esta pressão acima da pressão sistólica normal ($120\,mmHg$). Um aneurisma não pode ocorrer numa artéria saudável, apenas em uma debilitada devido alguma desordem em seu tecido.
9. (Pressão Parcial) O argônio está presente na atmosfera na proporção de $0,93\%$, em volume. Pergunta-se:
   (b) Qual a sua abundância em termos de massa, por m^3?
   (c) Esta proporção varia com a altitude?
10. (Efeito Estufa) A composição da atmosfera, em volume, é de: N : $78,09\,\%$, O : $20,95\,\%$, Ar : $0,93\,\%$, $CO_2 = 0,03\%$. Qual a pressão parcial do CO_2, em N/m^2?
11. (Bernouilli) Um avião de $10^4\,kg$ de massa voa em altitude de $1/2\,atm$. Qual deve ser a superfície das asas para sustentação, sabendo que a sua velocidade é de $900\,km/h$ e que a velocidade na parte superior é 10% maior? (tomar $\rho = 0,65\,g/cm^3$)
12. (Osmose) Qual a pressão osmótica do Na^+ na água do mar? (Tomar $30\,g/L$ de $NaCl$, $T = 300\,K$)
13. A densidade de água do mar é $1,03\,g/cm^3$ e a do gelo é $0,92\,g/cm^3$. Que proporção do iceberg está submerso?