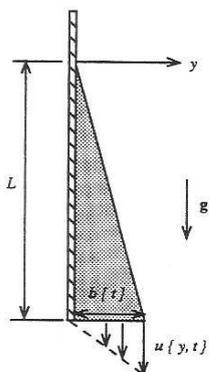


Prova Substitutiva de PME3332 – 13/12/2017

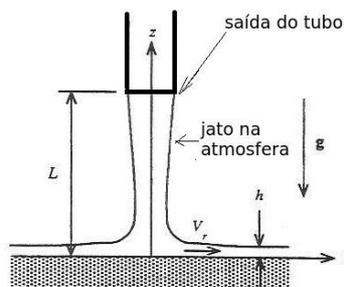
**1ª Questão (2,5 pontos):** Uma placa fina é mergulhada em um líquido muito viscoso até uma profundidade  $L$ , e então retirada. O líquido que aderiu à placa começa a escorrer, formando o perfil de velocidades da figura. A largura  $b(t)$  da camada de líquido na extremidade inferior da placa diminui com o tempo à medida que o líquido escorre, mas a camada de líquido aderida à placa mantém a forma triangular. O perfil de velocidades na extremidade inferior é linear, dado por:

$$u(y) = \frac{Uy}{b(t)} \text{ onde } U \text{ é constante. Se o valor inicial de } b \text{ para } t = 0 \text{ é } b_0, \text{ obtenha a expressão de } b(t).$$

Dado:  $\frac{\partial m_{VC}}{\partial t} + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$



Problema 1



Problema 2

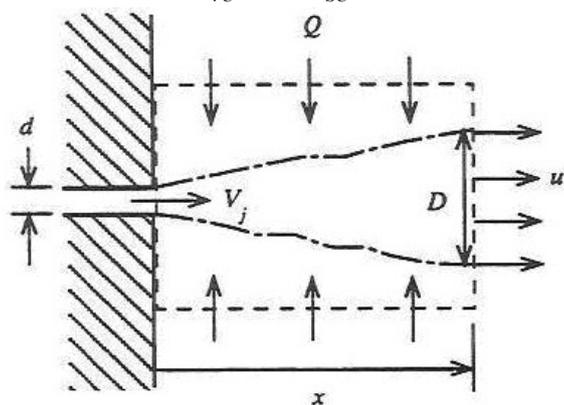
**2ª Questão (2,5 pontos):** Água desce com velocidade constante e uniforme um tubo vertical descendo na atmosfera em direção a uma placa plana localizada a uma distância  $L$  abaixo da saída do tubo. A vazão de água é  $Q$  e a área do tubo é  $A$ .

Sobre a placa o jato de água se distribui num escoamento horizontal radial, formando uma camada  $h(r)$ . O perfil de velocidades desse escoamento pode ser considerado uniforme, dado por  $V_r(r)$ . Considerando  $h \ll L$ , obtenha expressões para  $h(r)$  e  $V_r(r)$ .

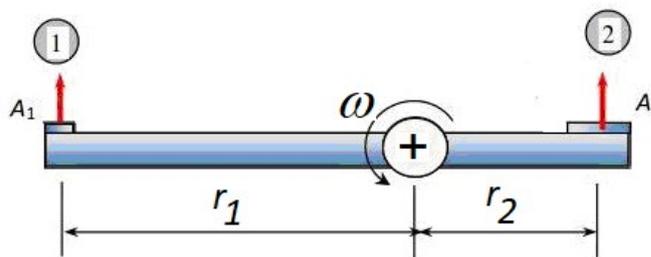
Dado:  $\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante}$

**3ª Questão (2,5 pontos):** Um jato axissimétrico de ar é ejetado na atmosfera com velocidade  $V_j$  a partir de um tubo de diâmetro  $d$  embutido em uma parede. Considere que o jato possui uma velocidade uniforme  $u$  ao longo de sua seção transversal de diâmetro  $D$ . O diâmetro do jato aumenta linearmente com  $x$  de acordo com a relação  $D = d + Kx$ , onde  $K$  é uma constante. O jato arrasta e incorpora ar circundante, que esco radialmente na direção do jato. Considerando escoamento permanente, incompressível, sem atrito viscoso, sem forças gravitacionais e que todo o jato está imerso na pressão atmosférica: (a) obtenha a expressão da velocidade  $u$  como função de  $x$ ,  $V_j$ ,  $d$  e  $K$ ; e (b) Obtenha a expressão da vazão volumétrica  $Q(x)$  de ar atmosférico incorporado pelo jato entre a parede e a posição  $x$  genérica como função de  $x$ ,  $V_j$ ,  $d$  e  $K$ .

Dados:  $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$        $\frac{\partial m_{VC}}{\partial t} + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$



Problema 3



Problema 4

**4ª Questão (2,5 pontos):** Uma vazão  $Q$  de água se distribui igualmente entre os dois lados do dispositivo da figura, de comprimentos  $r_1$  e  $r_2$  e áreas de saída para a atmosfera  $A_1$  e  $A_2$  diferentes. Considere regime permanente e escoamento incompressível. Considerando o atrito no eixo nulo e desprezando efeitos gravitacionais, obtenha a expressão da rotação  $\omega$  como função de  $Q$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $A_1$  e  $A_2$ .

Dado:  $\sum \vec{M}_{ext} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{r} \wedge \vec{v} dV + \int_{SC} \vec{r} \wedge \vec{v} \rho \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n} dS$

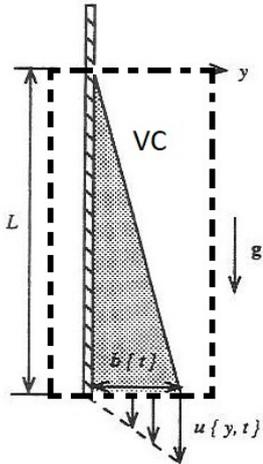
$$\sum \vec{M}_{ext} = \int_{VC} \vec{r} \wedge \vec{a}_a \rho dV + \int_{VC} \vec{r} \wedge \vec{a}_c \rho dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{r} \wedge \vec{v}_{rel} dV + \int_{SC} \vec{r} \wedge \vec{v} \rho \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n} dS$$

## GABARITO

**1ª Questão:** A massa do volume de controle, se considerarmos uma altura  $h$  ortogonal ao plano da figura, é:

$$m_{VC} = \frac{1}{2} b(t) L h$$

Se considerarmos um VC como na figura:



Teremos, pela equação da continuidade:

$$\frac{d m_{VC}}{dt} + \int_{SC} \rho \bar{v} \cdot \bar{n} dS = \frac{1}{2} L h \frac{db}{dt} + \int_0^b \frac{U y}{b} h dy = 0$$

Isso resulta:

$$\frac{1}{2} L h \frac{db}{dt} + \frac{U}{b} h \frac{b^2}{2} = 0$$

Logo:

$$\frac{1}{b} db = -\frac{U}{L} dt$$

Integrando:

$$\ln b = -\frac{U}{L} t + const$$

Mas, para  $t = 0$ ,  $b = b_o$ , logo:

$$const = \ln b_o$$

Assim:

$$\ln\left(\frac{b}{b_o}\right) = -\frac{U}{L} t$$

Que resulta:

$$b = b_o e^{-\frac{U}{L} t}$$

**2ª Questão:** Se aplicarmos a equação de Bernoulli a uma linha de corrente junto à superfície externa do jato, onde a pressão é atmosférica:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p_{atm}}{\rho} + gL = \frac{V_r^2}{2} + \frac{p_{atm}}{\rho} + gh$$

Onde  $V = \frac{Q}{A}$  é a velocidade do jato na saída do tubo e  $V_r = \frac{Q}{2\pi r h}$  é a velocidade radial.

Temos então:

$$V_r^2 = V^2 + 2g(L - h)$$

Como  $h \ll L$ :

$$V_r^2 = V^2 + 2gL$$

Logo:

$$V_r = \sqrt{\frac{Q^2}{A^2} + 2gL}$$

E temos  $h$  dado por:

$$h = \frac{Q}{2\pi r V_r}$$

Com  $V_r$  dado pela equação anterior.

**3ª Questão:** Aplicando a equação da quantidade de movimento e lembrando que, se o jato está todo na pressão atmosférica e não há atritos e efeitos gravitacionais, a somatória das forças externas é nula:

$$\sum_0 \vec{F}_{ext} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \vec{v} d\forall + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \rho u^2 \frac{\pi D^2}{4} - \rho V_j^2 \frac{\rho d^2}{4} = 0$$

Logo,

$$u = V_j \frac{d}{D}$$

Ou

$$u = V_j \frac{d}{d + Kx}$$

Aplicando a equação da continuidade:

$$Q + V_j \frac{\pi d^2}{4} = u \frac{\pi D^2}{4}$$

Substituindo as expressões para  $u$  e  $D$ :

$$Q + V_j \frac{\pi d^2}{4} = V_j \frac{d}{d + Kx} \frac{\pi (d + Kx)^2}{4}$$

Resulta:

$$Q = V_j \frac{\pi d K x}{4}$$

**4ª Questão (2,5 pontos):** Se o atrito no eixo é nulo e os jatos saem para a atmosfera, os momentos dos fluxos de quantidade de movimento dos jatos tem que se equilibrar. Assim, considerando um volume de controle rotativo ao redor do dispositivo e trabalhando com velocidades absolutas:

$$\sum_0 \vec{M}_{ext} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{r} \wedge \vec{v} dV + \int_{SC} \vec{r} \wedge \vec{v} \rho \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \int_{A_1} \vec{r} \wedge \vec{v} \rho \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n} dS + \int_{A_2} \vec{r} \wedge \vec{v} \rho \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n} dS = 0$$

A velocidade relativa em ambas as seções de saída é dada por  $Q/(2A)$ . Nas velocidades absolutas devemos levar em conta o sentido de rotação. Assim:

$$\int_{A_1} r_1 \vec{e}_r \wedge \left( -\frac{Q}{2A_1} + \omega r_1 \right) \vec{e}_\theta \rho \underbrace{\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}}_{+\frac{Q}{2A_1}} dS + \int_{A_2} r_2 \vec{e}_r \wedge \left( \frac{Q}{2A_2} + \omega r_2 \right) \vec{e}_\theta \rho \underbrace{\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}}_{+\frac{Q}{2A_2}} dS = 0$$

Isso resulta:

$$\left( -\frac{Q}{2A_1} r_1 + \omega r_1^2 \right) \frac{\rho Q}{2} + \left( \frac{Q}{2A_2} r_2 + \omega r_2^2 \right) \frac{\rho Q}{2} = 0$$

Logo:

$$\omega (r_1^2 + r_2^2) = \frac{Q}{2} \left( \frac{r_1}{A_1} - \frac{r_2}{A_2} \right)$$

Que resulta:

$$\omega = \frac{Q}{2(r_1^2 + r_2^2)} \left( \frac{r_1}{A_1} - \frac{r_2}{A_2} \right)$$

Solução usando movimento relativo:

A aceleração de arrastamento é:

$$\vec{a}_a = -\omega^2 r \vec{e}_r$$

Logo, como a aceleração de arrastamento é radial,  $\vec{r} \wedge \vec{a}_a = 0$

A aceleração de Coriolis é:

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{rel} = 2 \omega \vec{e}_z \wedge \frac{Q}{2A} \vec{e}_r = \frac{\omega Q}{A} \vec{e}_\theta$$

Assim, como os momentos externos são nulos (não temos atrito no eixo), o regime é permanente e a aceleração de arrastamento não exerce torque, temos:

$$\int_{\forall C} \rho \vec{r} \wedge \vec{a}_c dV + \int_{SC} \vec{r} \wedge \vec{v}_{rel} \rho \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Isso resulta:

$$\int_0^{r_1} r \vec{e}_r \wedge \frac{\omega Q}{A} \vec{e}_\theta \rho A dr + \int_0^{r_2} r \vec{e}_r \wedge \frac{\omega Q}{A} \vec{e}_\theta \rho A dr + \int_{A_1} r_1 \vec{e}_r \wedge \left( -\frac{Q}{2A_1} \right) \vec{e}_\theta \rho \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n} dS + \int_{A_2} r_2 \vec{e}_r \wedge \frac{Q}{2A_2} \vec{e}_\theta \rho \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Que resulta:

$$\rho \omega Q \frac{r_1^2}{2} \vec{e}_z + \rho \omega Q \frac{r_2^2}{2} \vec{e}_z - \rho \frac{Q r_1}{2A_1} \frac{Q}{2} \vec{e}_z + \rho \frac{Q r_2}{2A_2} \frac{Q}{2} \vec{e}_z = 0$$

Ou seja:

$$\omega (r_1^2 + r_2^2) - \frac{Q}{2} \left( \frac{r_1}{A_1} - \frac{r_2}{A_2} \right) = 0$$

Que resulta, como no caso anterior usando velocidades absolutas:

$$\boxed{\omega = \frac{Q}{2(r_1^2 + r_2^2)} \left( \frac{r_1}{A_1} - \frac{r_2}{A_2} \right)}$$