

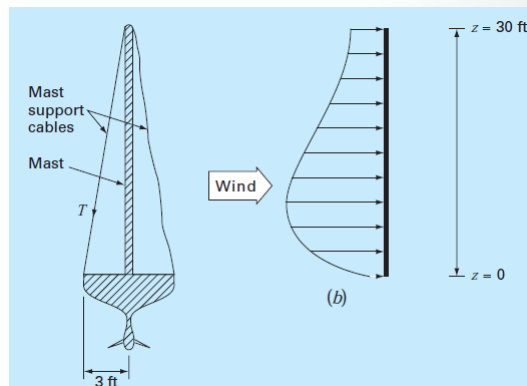
Modelagem em Engenharia C & A

Aula 12- Integração Numérica

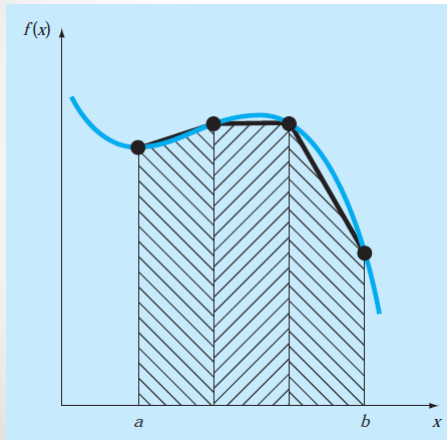
Integração de Funções

- Muito utilizada em engenharia de forma geral

$$d = \frac{\int_0^{30} z f(z) dz}{\int_0^{30} f(z) dz}$$



Regra do Trapézio



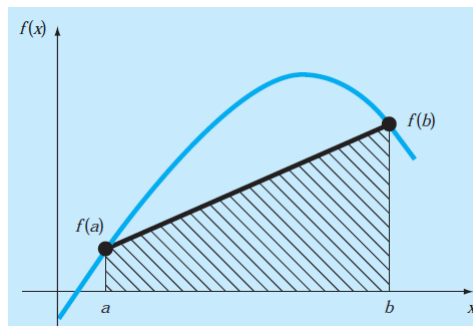
$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_1(x) dx$$

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

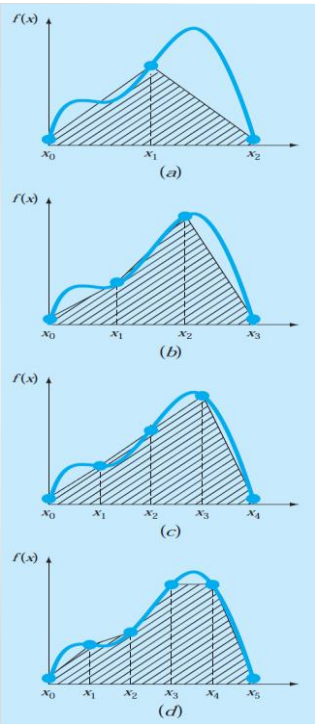
$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Resultado - Erro



$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b - a)^3$$



Multiplos trapézios

$$h = \frac{b - a}{n}$$

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) \, dx$$

$$I = h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

$$I = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Fórmula de recorrência

Problema

$$I = \underbrace{(b - a)}_{\text{Width}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{\text{Average height}}$$

- Calcular o volume do hidrograma sintético dado pela fórmula abaixo com duração total de 5 horas:

$$E_t = -\frac{(b - a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i)$$

$$Q(t) = Q_{base} + (Q_{pico} - Q_{base}) \left[\frac{t}{T_p} \exp \left(1 - \frac{t}{T_p} \right) \right]^\beta$$

Qbase	1
Qpico	100
Tempo de Concentração	5
Tempo de Pico	2
Coef Beta	3

- Comparar o resultado para n=5,10 e 50

Rotina VBA

Function Integral (x as range, y as range) as single
Dim i as integer, n as integer

n = x rows count
If n < 3 then exit function
Integral = y(1,1) + y(n,1)

For i = 2 to n-1
Integral = Integral + y(i,1) * 2
Next i

Integral = Integral * (x(n,1) - x(1,1)) / 2 / (n-1)

End Function

Regra de Simpson

Em Análise numérica, a fórmula de **Simpson** também conhecida como **regra de Simpson** é uma forma de se obter uma aproximação da integral definida: A **regra de Simpson** baseia-se em aproximar a integral definida pela área sob arcos de parábola que interpolam a função.

- Substituir a função por polinômios de grau 2!!!

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Width}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}}_{\text{Average height}}$$

- Regra Geral

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Width}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Average height}}$$