Exercício 1 Momento angular orbital

a) Descreva o análogo clássico do operador de momento angular orbital $\mathbb{L}$. Qual o papel físico das projeções deste operador?

b) Por que o operador $\mathbb{L}^2$ é necessário para a descrição da evolução temporal de uma partícula livre?

c) Quais são as relações de comutação entre os operadores de projeção do momento angular?

d) Por que não é possível diagonalizar simultaneamente todas as projeções $\mathbb{L}_k$? $(k = x, y, z)$

e) Qual o papel dos operadores $\mathbb{L}^{\pm}$?

f) Qual é a ação do operador $\mathbb{L}^{\pm}$ sobre os vetores $|lm\rangle$? Há modificação para o número quântico l?

g) Calcule $\mathbb{L}^{+}|lm\rangle$ para um dado valor inteiro de l.

h) Calcule o espectro de energia dos seguintes hamiltoniano:

$$\mathbb{H} = \omega_z \mathbb{L}_z. \tag{1}$$

$$\mathbb{H} = \omega_y \mathbb{L}_y. \tag{2}$$

$$\mathbb{H} = (\omega_2/\hbar)\mathbb{L}^2 + \omega_z \mathbb{L}_z. \tag{3}$$

$$\mathbb{H} = (\omega_2/\hbar)\mathbb{L}^2 + \omega_x \mathbb{L}_x. \tag{4}$$

$$\mathbb{H} = \omega_x \mathbb{L}_x + \omega_z \mathbb{L}_z + (\omega_2/\hbar)\mathbb{L}^2. \tag{5}$$

i) Escreva explicitamente $Y_0^0(\theta,\varphi)$, $Y_1^1(\theta,\varphi)$, $Y_1^0(\theta,\varphi)$ e $Y_1^{-1}(\theta,\varphi)$.

j) Calcule $\langle l'm'|\mathbb{L}_z|lm\rangle$ e $\langle \theta,\varphi|\mathbb{L}_z|lm\rangle$. Repita os mesmos cálculos com os operadores $\mathbb{L}^{\pm}$.

Exercício 2 Spin

a) Qual o papel físico do operador de spin $\mathbb{S}$?

b) Por que o experimento de Stern-Gerlach utiliza um feixe de nêutrons para demonstrar a existência do spin?

c) O que são férmions e bósons?

d) Férmions seguem o princípio de exclusão de Pauli. Este princípio (também chamado de teorema da estatística do spin) diz que dois férmions não podem possuir simultaneamente o mesmo conjunto de números quânticos. Por exemplo, se considerarmos apenas dois números quânticos – spin e posição – dois elétrons com spin $m_z = +1/2$ não podem ser localizados simultaneamente na mesma posição; por outro lado, elétrons com spins opostos localizados na mesma posição forma um estado perfeitamente aceitável.

Suponha que as autoenergias de um sistema eletrônico sejam muito bem descritas por $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ com $n = 0, 1, \ldots$. Quantos números quânticos são necessários para descrever um estado de dois elétrons não interagentes desse sistema? Quais estados possuem energia $E = \hbar\omega(2 + 1/2)$?

e) Quais são as relações de comutação entre os operadores de projeção do spin?

f) Por que não é possível diagonalizar simultaneamente todas as projeções $\mathbb{S}_k$? $(k = x, y, z)$

g) Qual o papel dos operadores $\mathbb{S}^{\pm}$?

h) Quais são as ações dos operadores $\mathbb{S}^{\pm}$ sobre os vetores $|sm_z\rangle$? Eles alteram o número quântico s?

i) Calcule $\mathbb{S}^{+}|sm_z\rangle$ para um dado valor de s.

j) Calcule o espectro de energia dos seguintes hamiltoniano:

$$\mathbb{H} = \omega_z \mathbb{S}_z. \tag{6}$$

$$\mathbb{H} = \omega_y \mathbb{S}_y. \tag{7}$$

$$\mathbb{H} = (\omega_2/\hbar)\mathbb{S}^2 + \omega_z \mathbb{S}_z. \tag{8}$$

$$\mathbb{H} = (\omega_2/\hbar)\mathbb{S}^2 + \omega_x \mathbb{S}_x. \tag{9}$$

$$\mathbb{H} = \omega_x \mathbb{S}_x + \omega_z \mathbb{S}_z + (\omega_2/\hbar)\mathbb{S}^2. \tag{10}$$

k) Calcule $\langle s' m_z' | \mathbb{S}_x | s m_z \rangle$ e $\langle 1/2, m_x | 1/2, m_z \rangle$, onde $|1/2, m_x\rangle$ é o autovetor de $\mathbb{S}_x$ para $s = 1/2$.

Exercício 3 Momento angular $\mathbb{J} = \mathbb{L} + \mathbb{S}$

a) Qual o papel físico do operador $\mathbb{J}$?

b) Quais são as relações de comutação entre os operadores de projeção do momento angular?

c) Por que não é possível diagonalizar simultaneamente todas as projeções $\mathbb{J}_k$? $(k = x, y, z)$

d) Qual o papel dos operadores $\mathbb{J}^{\pm}$?

e) Quais são as ações dos operadores $\mathbb{J}^{\pm}$ sobre os vetores $|jm\rangle$? Eles alteram o número quântico j?

f) Calcule $\mathbb{J}^{+}|jm\rangle$ para um dado valor de j.

g) Calcule o espectro de energia dos seguintes hamiltoniano:

$$\mathbb{H} = \omega_z \mathbb{J}_z. \tag{11}$$

$$\mathbb{H} = \omega_y \mathbb{J}_y. \tag{12}$$

$$\mathbb{H} = (\omega_2/\hbar)\mathbb{J}^2 + \omega_z \mathbb{J}_z. \tag{13}$$

$$\mathbb{H} = (\omega_2/\hbar)\mathbb{J}^2 + \omega_x \mathbb{J}_x. \tag{14}$$

$$\mathbb{H} = \omega_x \mathbb{J}_x + \omega_z \mathbb{J}_z + (\omega_2/\hbar)\mathbb{J}^2. \tag{15}$$

Exercício 4 Potenciais centrais

a) O que são potenciais centrais? Exemplifique.

b) Que consequências físicas decorrem da energia potencial ser central, seja o sistema clássico ou quântico?

c) Justifique a relevância do operador $\mathbb{J}$ para sistemas com potencial central.

d) Escreva a equação de Schrödinger, na base das posições, para um potencial central arbitrário $V(r)$ e ignore o grau de liberdade de spin. Faça a separação de variáveis e mostre a equação diferencial que a função de onda radial deve satisfazer.

Exercício 5 Átomo H

a) Descreva as principais características do átomo H.

b) Escreva as autoenergias do átomo (em repouso). Faça uso ou do raio de Bohr ou da constante de Rydberg.

c) Por que as autoenergias são negativas?

d) As autoenergias dependem de quantos números quânticos? E se o spin eletrônico for incluído?

e) Qual a energia necessária para ionizar um H cujo elétron encontra-se no nível fundamental?

f) Se um gás de H é aquecido (ou transmissão de qualquer outro tipo de energia, como a eletromagnética) somente alguns comprimentos de onda são observados. Por quê? Explique a ilustração abaixo.

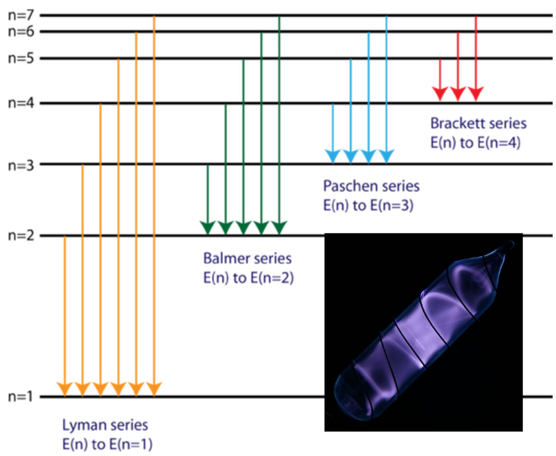

Figura 1. Gás H_2 a baixa pressão submetido a uma diferença de potencial. O mesmo efeito pode ser obtido se o gás for aquecido.

g) Escreva a equação de Schrödinger na base das posições para o átomo de H. Para a parte radial da função de onda, considere uma função exponencial, $\psi_0(r) = \text{cte} \times \exp(-r/a_0)$. Determine a energia correspondente.

h) Escreva a relação entre os números quânticos do átomo de H.

i) Baseado no seu conhecimento dos harmônicos esféricos e átomo de H, explique a ilustração abaixo. Observação: nesta figura apenas a projeção z foi considerada.

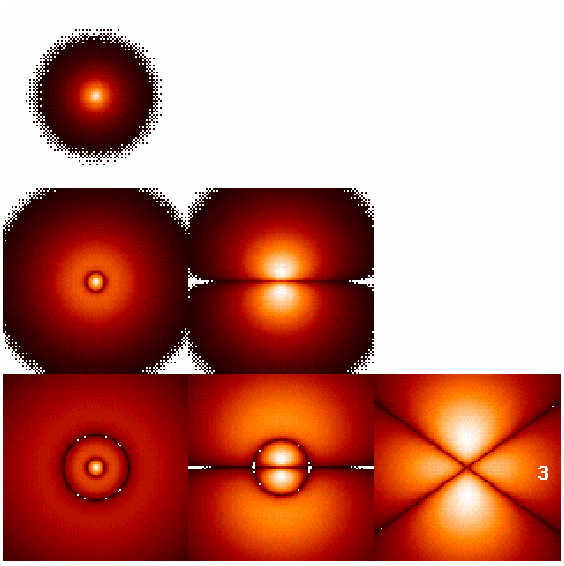

Figura 2. Como você descreveria este caption?

j) Considerando o princípio de Pauli, quantos elétrons podem ocupar um dado estado do átomo de H?

k) Um átomo hidrogenoide é aquele onde as interações elétron-elétron são muito pequenas frente a interação elétron-núcleo, de modo que seu espectro é aproximadamente o mesmo do átomo de H. Suponha que um átomo possui 8 elétrons. Quais níveis estarão ocupados? Verifique se sua resposta é condizente com o diagrama de Pauling (aquele do ensino médio que, muito provavelmente, você esqueceu).

l) Se o elétron do átomo de H possui spin, a energia do sistema é alterada quando sujeita a um campo magnético constante $\vec{B} = B_0\hat{z}$. A interação adicional é

$$\mathbb{H}_{\text{int}} = -\mu B_0 \mathbb{S}_z. \tag{16}$$

Mostre que este termo quebra a degenerescência da energia para um dado n. Este é o chamado efeito Zeeman. Calcule as novas autoenergias e autovetores.

Exercício 6 Oscilador harmônico

a) Comente sobre os regimes físicos que podem descrever um oscilador harmônico na teoria quântica.

b) Escreva o hamiltoniano de um oscilador quântico 3D.

c) Calcule as autoenergias e autoestados para o caso descrito no item anterior.

d) Qual a interpretação física dos autoestados do oscilador quântico?

e) Para cada direção espacial, determine os operadores de criação e destruição.

f) Qual o papel físico dos operadores do item acima?

g) Qual a relação de comutação entre os operadores de criação e destruição? Considere todas as possíveis direções.

h) Calcule $\langle n_1', n_2', n_3' | \mathbb{x}^2 | n_1, n_2, n_3 \rangle$.

i) Se o estado inicial de um oscilador é conhecido, $|\psi(t_0)\rangle = |1,1,0\rangle$, qual a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|1,2,0\rangle$ no instante $t = t_0 + dx$ com $\mathbb{H} = \lambda \mathbb{y}$?