

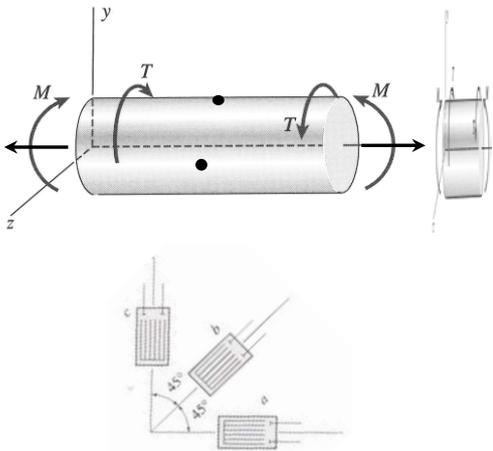


PME3211 – Mecânica dos Sólidos II – Segunda Prova – 18/10/2017

Duração: 100 minutos

Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

1ª Questão (4,0 pontos)



A barra cilíndrica da figura tem comprimento L e diâmetro d . Nos pontos $A(L/2, 0, d/2)$ e $B(L/2, d/2, 0)$ foram coladas rosetas com extensômetros a 45° como a da figura, com o extensômetro a paralelo ao eixo x . Com a aplicação simultânea de um momento fletor M , um momento de torção T e uma força normal N , de valores desconhecidos, as leituras dos extensômetros no ponto A são:

$$\varepsilon_a = 500\mu \quad \varepsilon_b = 438\mu \quad \varepsilon_c = -124\mu$$

e as leituras dos extensômetros no ponto B são:

$$\varepsilon_a = -500\mu \quad \varepsilon_b = 62\mu \quad \varepsilon_c = 124\mu$$

Pede-se determinar os valores de M , T e N .

São dados:

- diâmetro da barra: $d = 4\text{cm}$
- módulo de elasticidade: $E = 200\text{GPa}$
- coeficiente de Poisson: $\nu = 0,25$
- usar $\pi = 3$

Para uma roseta com extensômetros a 45° (adotando um sistema de eixos local em que o eixo x coincide com a direção do extensômetro a e o eixo y coincide com a direção do extensômetro b):

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_c$$

$$\gamma_{xy} = 2 \varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)$$

Para o ponto A :

$$\varepsilon_x = 500\mu$$

$$\varepsilon_y = -124\mu$$

$$\gamma_{xy} = (2 * 438 - (500 - 124))\mu = 500\mu$$

Para o ponto B :

$$\varepsilon_x = -500\mu$$

$$\varepsilon_y = 124\mu$$

$$\gamma_{xy} = (2 * 62 - (-500 + 124))\mu = 500\mu$$

(1,0)

i) Cálculo de N :

Como a roseta A está na linha neutra, a deformação ε_x é devida apenas à força normal. Assim:

$$N = \sigma_x A = EA\varepsilon_x; \quad A = 12\text{cm}^2 \Rightarrow N = 120\text{kN}$$

(1,0)



ii) Cálculo de M :

Para a roseta em B , a deformação da direção x é a soma da deformação devida à força normal (500μ) com a deformação devida à flexão. Assim, a deformação devida à flexão será:

$$\varepsilon_x = -1000\mu$$

Como:

$$\sigma_x = -\frac{Md}{2I}; \quad \sigma_x = E\varepsilon_x; \quad I = \frac{\pi d^4}{64} = 12\text{cm}^4 \Rightarrow M = 1200\text{Nm} \quad (1,0)$$

iii) Cálculo de T :

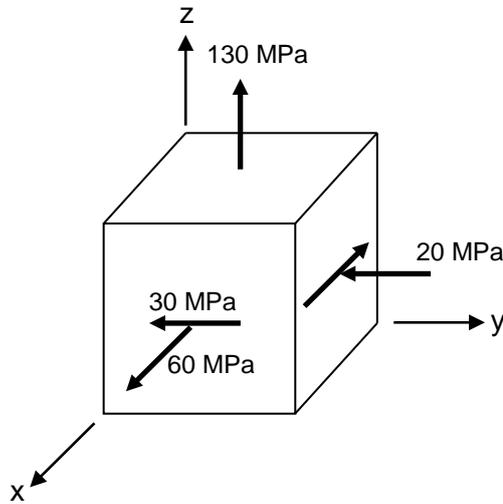
Para o cálculo de T pode ser usada tanto a distorção medida em A quanto em B (elas devem ser iguais):

Como:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \tau_{xy} = \frac{Td}{2I_p}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80\text{GPa}; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} = 24\text{cm}^4 \Rightarrow T = 480\text{Nm} \quad (1,0)$$



2ª Questão (2,5 pontos)



A figura ao lado representa o estado tensional em um ponto crítico P de uma dada estrutura. Pedem-se:

- Determinar a matriz do tensor das tensões no ponto P escrito na base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ e calcular as tensões principais no ponto;
- Considerando que o material tenha comportamento dúctil, com tensão de escoamento $\sigma_e = 560$ MPa, determine o coeficiente de segurança com relação à falha do material. Justifique!
- Considerando, numa outra hipótese, que o material tenha comportamento frágil, com tensões limites de ruptura a tração e a compressão iguais ($f_t = f_c = 325$ MPa), determine o novo coeficiente de segurança com relação à falha do material. Justifique!

Solução:

a) A matriz do tensor na base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fica (tensões em MPa):

(0,5)

$$[T]_b = \begin{bmatrix} 60 & -30 & 0 \\ -30 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 130 \end{bmatrix}$$

As tensões principais no ponto são obtidas a partir de:

$$\det([T] - \sigma[I]) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} 60 - \sigma & -30 & 0 \\ -30 & -20 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 130 - \sigma \end{bmatrix} = 0$$

Levando à equação característica:

$$(130 - \sigma) \cdot (\sigma^2 - 40\sigma - 2100) = 0$$

Cujas raízes são:

$$\sigma_1 = 130 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 70 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -30 \text{ MPa}$$

(0,5)

b) Para materiais com comportamento frágil, os critérios de Tresca (máxima tensão de cisalhamento) e de von Mises (máxima energia de distorção) fornecem bons resultados (resultados experimentais corroboram os resultados teóricos). Optando pelo critério de Tresca (por ser mais conservativo e, portanto, a favor da segurança), teremos:

$$CS = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{560}{160} = 3,5$$

(0,5)

Já pelo critério de von Mises (se fosse o critério escolhido):

$$CS = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq,VM}} = \frac{\sigma_e}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}} = \frac{560}{140} = 4$$

c). Para materiais com comportamento frágil, o critério de Rankine (máxima tensão normal) fornece bons resultados.

Como as tensões de ruptura a tração e compressão são iguais, teremos:

$$CS = \frac{f_t}{\max\{|\sigma_1|, |\sigma_3|\}} = \frac{325}{130} = 2,5$$

(0,5)

Justificativa: (0,5)



3ª Questão (3,5 pontos)

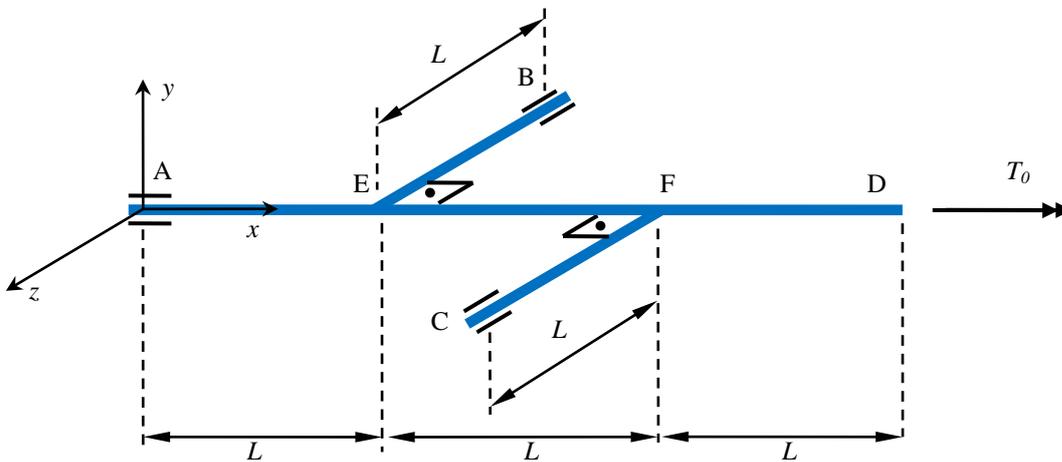
A estrutura indicada na figura abaixo é formada por barras de seção transversal circular cheia sendo dados: EI , GJ , GA e seu fator de forma f_c . Todas as barras estão dispostas no plano horizontal xz e todas as ligações entre elas são rígidas, sendo seus comprimentos: $m(AD) = 3L$ e $m(BE) = m(CF) = L$. Os únicos vínculos, nos pontos A, B e C, são constituídos por anéis que podem fornecer (no máximo) duas componentes de força em direções ortogonais ao eixo da barra em que se encontram. O único esforço aplicado à estrutura é um momento de torção de magnitude T_0 (ponto de aplicação no ponto D). Pede-se:

a) O diagrama de corpo livre final da estrutura com todos os esforços vinculares (em função de T_0) indicados e os diagramas de esforços solicitantes (V , M , e T) finais;

Obs: a.1) No caso do diagrama de V , apresente os valores das forças cortantes em módulo apenas;
a.2) Os itens (b) e (c) a seguir só serão considerados se o item (a) estiver correto;

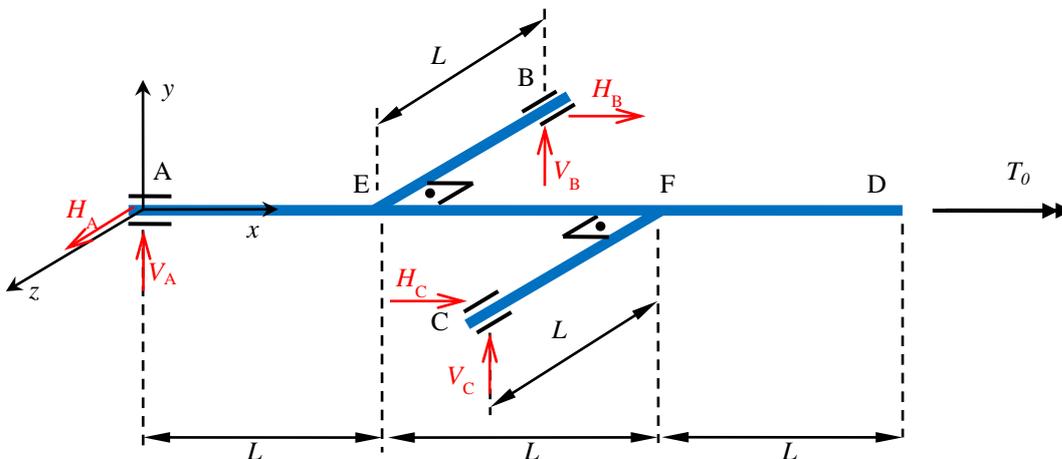
b) As parcelas de energia complementar devidas às forças cortantes (U_V^*), aos momentos fletores (U_M^*) e aos momentos de torção (U_T^*);

c) O ângulo de giro da seção D.



Solução:

a) O diagrama de corpo livre da estrutura, com as reações vinculares a serem determinadas, fica:



Do equilíbrio de forças nas três direções, temos:

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_B + H_C = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_A + V_B + V_C = 0$$



$$\sum F_z = 0 \Leftrightarrow H_A = 0$$

Do equilíbrio de momentos (tomando A como pólo) em relação aos três eixos, temos:

$$\sum M_{A,x} = 0 \Leftrightarrow T_0 + V_B \cdot L - V_C \cdot L = 0$$

$$\sum M_{A,y} = 0 \Leftrightarrow H_C \cdot L - H_B \cdot L = 0$$

$$\sum M_{A,z} = 0 \Leftrightarrow V_B \cdot L + V_C \cdot 2L = 0$$

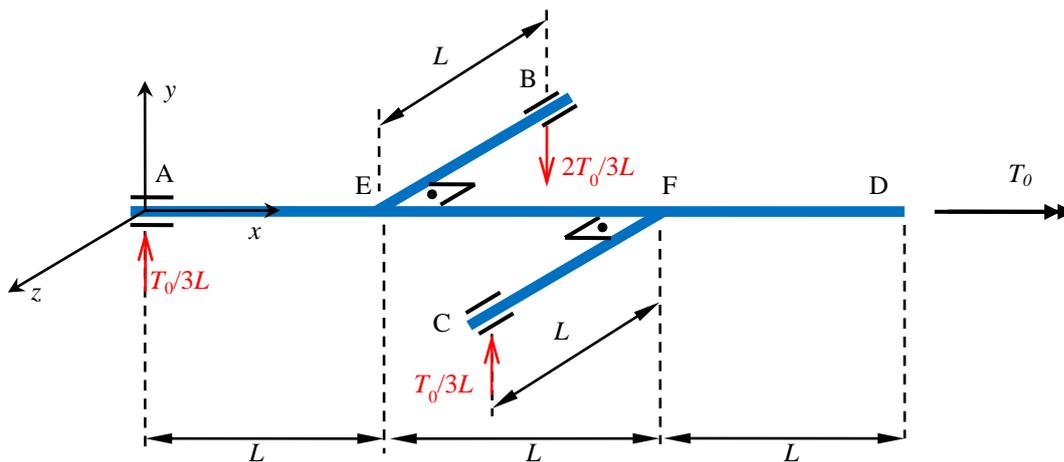
Da solução do sistema linear de equações, resultam:

$$H_A = H_B = H_C = 0$$

E

$$V_A = \frac{T_0}{3L}, \quad V_B = -\frac{2T_0}{3L}, \quad V_C = \frac{T_0}{3L}$$

Assim, o diagrama de corpo livre final fica:



E os diagramas de esforços solicitantes ficam:

Diagrama de Forças Cortantes (V):

(0,5)

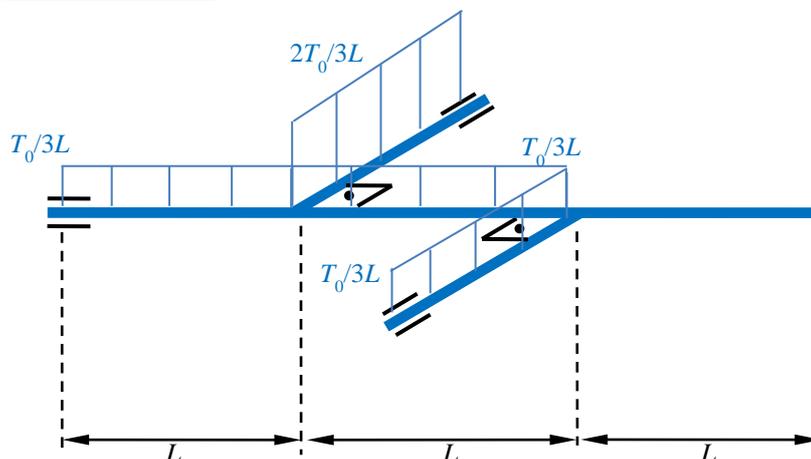




Diagrama de Momentos Fletores (M):

(0,5)

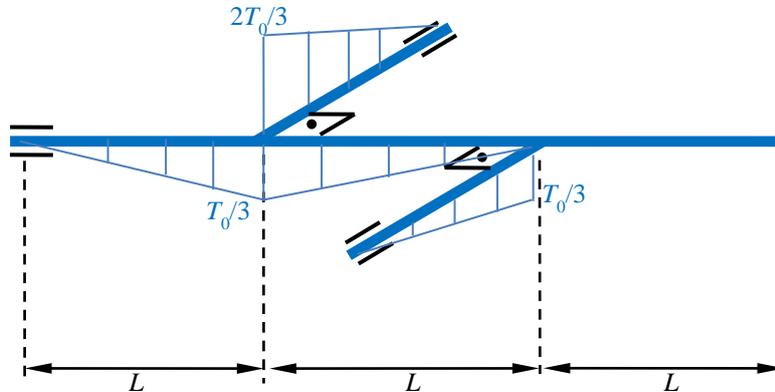
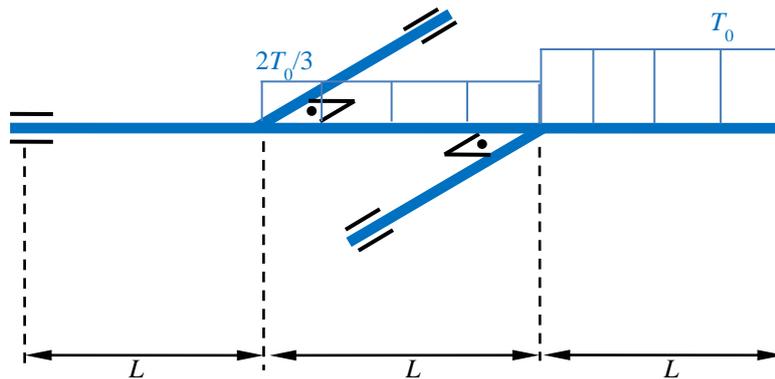


Diagrama de Momentos Torçores (T):

(0,5)



b) As parcelas de energia complementar devidas às forças cortantes (U_V^*), aos momentos fletores (U_M^*) e aos momentos de torção (U_T^*) ficam dadas por:

(1,5)

$$U_V^* = \sum \int_0^l \frac{f_c V_i^2}{2GA} ds = \frac{3f_c}{2GA} \int_0^l \left(\frac{T_0}{3L}\right)^2 ds + \frac{f_c}{2GA} \int_0^l \left(\frac{2T_0}{3L}\right)^2 ds = \frac{7}{18} \frac{f_c T_0^2}{GAL}$$

$$U_M^* = \sum \int_0^l \frac{M_i^2}{2EI} ds = \frac{3}{2EI} \int_0^l \left(\frac{T_0 s}{3L}\right)^2 ds + \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(\frac{2T_0 s}{3L}\right)^2 ds = \frac{7}{54} \frac{T_0^2 L}{EI}$$

$$U_T^* = \sum \int_0^l \frac{T_i^2}{2GJ} ds = \frac{1}{2GJ} \int_0^l (T_0)^2 ds + \frac{1}{2GJ} \int_0^l \left(\frac{2T_0}{3}\right)^2 ds = \frac{13}{18} \frac{T_0^2 L}{GJ}$$

c) Pelo Princípio do Trabalho e Energia resulta para materiais com comportamento elástico-linear e isótopos:

$$U = U^* = W^* = W \Leftrightarrow \frac{T_0 \cdot \theta_D}{2} = \frac{7}{18} \frac{f_c T_0^2}{GAL} + \frac{7}{54} \frac{T_0^2 L}{EI} + \frac{13}{18} \frac{T_0^2 L}{GJ}$$

Levando a:

$$\theta_D = \left(\frac{7}{9} \frac{f_c}{GAL} + \frac{7}{27} \frac{L}{EI} + \frac{13}{9} \frac{L}{GJ} \right) T_0$$

(0,5)