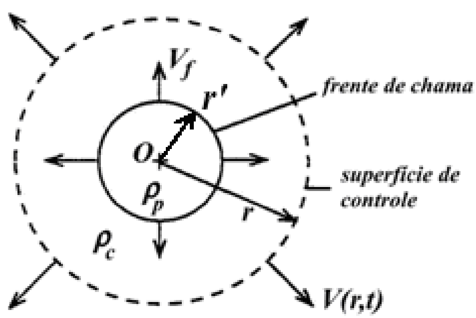
Prova Substitutiva de PME3332 - 08/12/20016

1)(3,0 pontos) Devido a uma fagulha, uma mistura combustível estacionária sofre ignição no ponto O no instante t = 0, dando início a uma frente de chama esférica que passa a se movimentar na direção radial com velocidade constante V_f. A mistura combustível possui uma massa específica constante ρ_c e é convertida pela passagem da frente de chama em produtos de combustão com uma massa específica ρ_p muito menor. A expansão da frente de chama empurra a mistura combustível radialmente, enquanto os produtos da combustão permanecem estacionários. Assim, se $r' = V_f \times t$ é a posição da frente de chama, a mistura combustível fora da frente de chama, numa posição qualquer $r > r'$, move-se radialmente com velocidade $V(r,t)$.

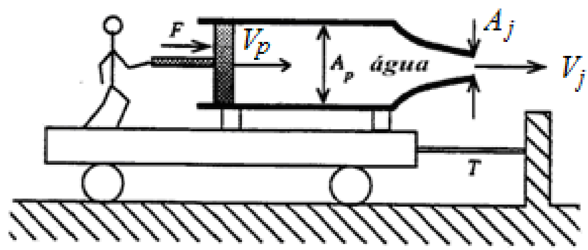
Escolhendo um volume de controle esférico fixo de raio r ao redor da frente de chama, de modo que $r > r'$, obtenha uma expressão para a velocidade $V(r,t)$ da mistura combustível em função de ρ_c, ρ_p, V_f, r e t.

$$\frac{\partial m_{\forall C}}{\partial t} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \; dS = 0$$

Volume de uma esfera: $\forall(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ Superfície de uma esfera: $S(r) = 4\pi r^2$



Problema 1

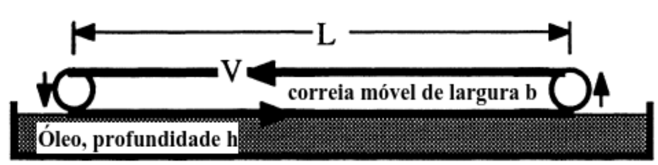


Problema 2

2)(5,0 pontos) Um cilindro equipado com um pistão de área A_p e cheio de água de massa específica ρ está montado sobre um carro como mostrado na figura. Um homem de pé sobre o carro exerce uma força F no pistão, empurrando-o com velocidade V_p e ejetando um jato de água de velocidade V_j na atmosfera através do bocal, cuja saída tem área A_j. Uma corda impede o carro de entrar em movimento. Obtenha expressões para a velocidade V_j do jato e para a tensão T na corda em função de ρ, F, A_j e A_p. Despreze efeitos gravitacionais e atrito no pistão.

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const (desprezando gravidade e atrito)} \qquad \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{V} \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS$$

3)(2,0 pontos) Uma correia de largura b move-se com velocidade constante V e passa sobre a superfície de um reservatório de profundidade h contendo óleo com viscosidade dinâmica μ, arrastando o óleo ao longo de um comprimento L. Considerando perfil linear de velocidades no óleo e desprezando resistência do ar na correia, obtenha uma expressão para a potência W necessária para manter a correia em funcionamento como função de b, V, h, μ e L.



Problema 3

Gabarito

1)A massa contida no volume de controle é:

$$m_{\forall C}=\rho_c \frac{4}{3}\pi\, r^3-\rho_c \frac{4}{3}\pi\, r'^3+\rho_p \frac{4}{3}\pi\, r'^3=\frac{4}{3}\pi\left[\rho_c\, r^3-\left(\rho_c-\rho_p\right)\left(V_f\, t\right)^3\right]$$

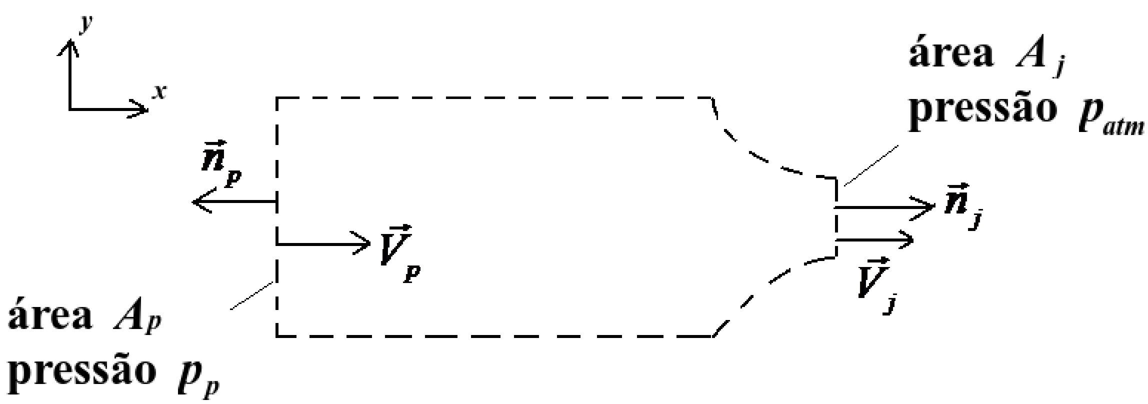
Assim, da equação da continuidade:

$$\underbrace{\frac{\partial m_{\forall C}}{\partial t}}_{-\frac{4}{3}\pi\left(\rho_c-\rho_p\right)\times 3\,\left(V_f\, t\right)^2\times V_f}+\underbrace{\int_{SC}\rho \vec{V}\cdot\vec{n}\; dS}_{\rho_c\; V\times 4\pi\, r^2}=0$$

Assim:

$$\boxed{V=\left(1-\frac{\rho_p}{\rho_c}\right)\frac{V_f^{\;3}\, t^2}{r^2}}$$

2)Usando um volume de controle fixo cuja superfície de controle passa pela seção logo à jusante do pistão e pela abertura do bocal por onde sai o jato:



A equação da energia resulta:

$$\frac{V_p^{\;2}}{2}+\frac{p_p}{\rho}=\frac{V_j^{\;2}}{2}+\frac{p_{atm}}{\rho}\quad \text{(I)}$$

Da continuidade:

$$V_j\, A_j=V_p\, A_p\quad \text{(II)}$$

Por outro lado, se trabalhamos com pressões efetivas ($p_{atm}=0$)e não há atrito no pistão, como este se move com velocidade constante, a pressão p_p é dada por:

$$p_p=\frac{F}{A_p}\quad \text{(III)}$$

De (II) e (III) em (I):

$$\frac{V_j^{\,2}}{2} = \frac{\left(A_j / A_p\right)^2 V_j^{\,2}}{2} + \frac{F}{\rho\, A_p}$$

Que resulta:

$$\boxed{V_j = \left[\frac{2F}{\rho\, A_p \left(1 - A_j^{\,2} / A_p^{\,2}\right)}\right]^{1/2}} \quad \text{(IV)}$$

Aplicando a equação da quantidade de movimento ao mesmo volume de controle:

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \vec{V}\, d\forall}_{0} + \int_{A_p} \rho \underbrace{\vec{V}}_{V_p \vec{e}_x} \underbrace{\vec{V} \cdot \vec{n}}_{-V_p} dS + \int_{A_j} \rho \underbrace{\vec{V}}_{V_j \vec{e}_x} \underbrace{\vec{V} \cdot \vec{n}}_{+V_j} dS$$

Assim:

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = \rho \left(V_j^{\,2} A_j - V_p^{\,2} A_p\right) \vec{e}_x$$

Aplicando nesta última equação o resultado da equação (II):

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = \rho V_j^{\,2} A_j \left(1 - A_j / A_p\right) \vec{e}_x$$

Substituindo agora o resultado da equação (IV):

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = \rho \frac{2F}{\rho\, A_p \left(1 + A_j / A_p\right)\left(1 - A_j / A_p\right)} A_j \left(1 - A_j / A_p\right) \vec{e}_x$$

Isso resulta:

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = 2F \frac{A_j}{A_j + A_p} \vec{e}_x$$

Finalmente, na ausência de forças gravitacionais e usando pressões efetivas, as forças externas são dadas pela soma da força de contato exercida sobre o fluido pela parede do cilindro com a força de pressão na área A_p:

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = 2F \frac{A_j}{A_j + A_p} \vec{e}_x = -\, p_p\, A_p\, \vec{n}_p + \vec{F}_{\substack{\text{parede} \\ \text{do cilindro} \\ \text{sobre o fluido}}}$$

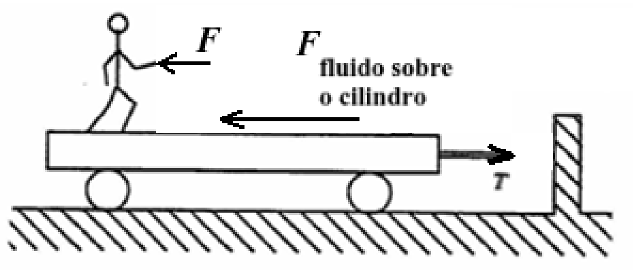
Como $\vec{n}_p = -\vec{e}_x$, temos que a força exercida pela parede do cilindro sobre o fluido é:

$$\vec{F}_{\substack{\text{parede} \\ \text{do cilindro} \\ \text{sobre o fluido}}} = \left(2F \frac{A_j}{A_j + A_p} - p_p\, A_p\right) \vec{e}_x$$

Substituindo o resultado da equação (III):

$$\vec{F}_{\substack{\text{parede}\\ \text{do cilindro}\\ \text{sobre o fluido}}} = F\left(2\frac{A_j}{A_j + A_p} - 1\right)\vec{e}_x$$

O negativo dessa força será transmitido ao carro pelos apoios do cilindro, e se somará à tração na corda e à força F que, pelo princípio da ação e reação, o pistão exerce no homem:



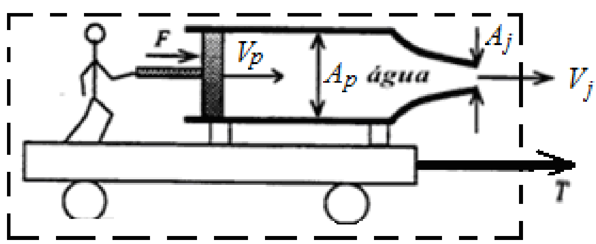
Assim:

$$T - F - F\left(2\frac{A_j}{A_j + A_p} - 1\right) = 0$$

Resultando:

$$\boxed{T = F\frac{2A_j}{A_j + A_p}}$$

Outra forma de chegar nesse resultado consiste em usar um volume de controle que engloba todo o cilindro e cuja superfície de controle passa através da corda:



Nesse caso agora, a única força externa é a tensão da corda, e não temos outras forças de contato na superfície de contorno. O único fluxo de quantidade de movimento (momento linear) atravessando a superfície de controle é o do jato, mas temos que levar em conta o termo transiente de variação do momento linear do volume de controle devido ao esvaziamento do cilindro. Uma massa por unidade de tempo $\rho V_p A_p$ deixa o volume de controle carregando uma velocidade $V_p\,\vec{e}_x$. Assim:

$$\underbrace{\sum \vec{F}_{\text{externas}}}_{T\vec{e}_x} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{V}\, d\forall}_{-\rho V_p^2 A_p \vec{e}_x} + \underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V}\,\vec{V}\cdot\vec{n}\, dS}_{\rho V_j^2 A_j \vec{e}_x}$$

Isso resulta:

$$T = \rho V_j^2 A_j - \rho V_p^2 A_p$$

Substituindo (II):

$$T = \rho V_j^{\,2} A_j - \rho \left(\frac{V_j A_j}{A_p} \right)^2 A_p = \rho V_j^{\,2} A_j \frac{A_p - A_j}{A_p}$$

Substituindo o resultado da equação (IV):

$$T = \rho \frac{2F\,A_p}{\left(A_p + A_j\right)\left(A_p - A_j\right)} A_j \frac{A_p - A_j}{A_p}$$

Que, finalmente, resulta:

$$\boxed{T = \frac{2F\,A_j}{\left(A_p + A_j\right)}}$$

3) A tensão tangencial na correia, supondo perfil linear de velocidades, será:

$$\tau = \mu \frac{V}{h}$$

A força tangencial será essa tensão multiplicada pala área de contato *bL*, e a potência será a força multiplicada pela velocidade. Assim:

$$\boxed{W = \mu \frac{V^2}{h} bL}$$