MECÂNICA DOS FLUIDOS: NOÇÕES, LABORATÓRIO E APLICAÇÕES
(PME 3332)
Gabarito Terceira Prova - 2016

1. (3,0 pontos) Um oleoduto consiste em N conjuntos em série cada um deles formado por uma bomba propulsora (*booster*) e um trecho de tubulação longo. Cada bomba fornece uma altura de energia ao fluido em função da vazão volumétrica com uma curva característica $H_i = H_i(Q)$, enquanto cada trecho tem comprimento, diâmetro e rugosidade respectivamente L_i, D_i e e_i ($i = 1,\ldots,N$). A tubulação conecta dois grandes tanques com superfícies livres com a mesma cota e pressão. Considerar que as perdas singulares são desprezíveis frente às distribuidas e que o fluido tem massa específica ρ e viscosidade dinâmica μ. Nestas condições, determinar uma expressão analítica que permita calcular a vazão de descarga Q. Que dificuldades surgem para calcular explicitamente a vazão? Descrever o procedimento de cálculo, sem resultados numéricos.

Conservação da energia: $H_{E1} + H_{maq} = H_{E2} + \sum h_{perdas}$; $H_E = \dfrac{p}{\rho g} + \dfrac{V^2}{2g} + z$

Perda de carga singular: $h_S = K_S \dfrac{V^2}{2g}$; Perda de carga distribuída: $h_d = f \dfrac{L}{D}\dfrac{V^2}{2g}$

Fator de atrito: $f = f\left(Re_D, \dfrac{e}{D}\right)$, $Re_D = \dfrac{\rho V D}{\mu}$

Solução:
Aplicando a equação de energia entre as superfícies dos tanques e desprezando as perdas singulares, resulta:

$$H_{E1} - \sum f_i \frac{L_i}{D_i}\frac{V_i^2}{2g} + \sum H_i = H_{E2}$$

$$V_i = \frac{Q}{A_i} = \frac{4Q}{\pi D_i^2}$$

$$f_i = f(Re_{Di}, \frac{e_i}{D_i})$$

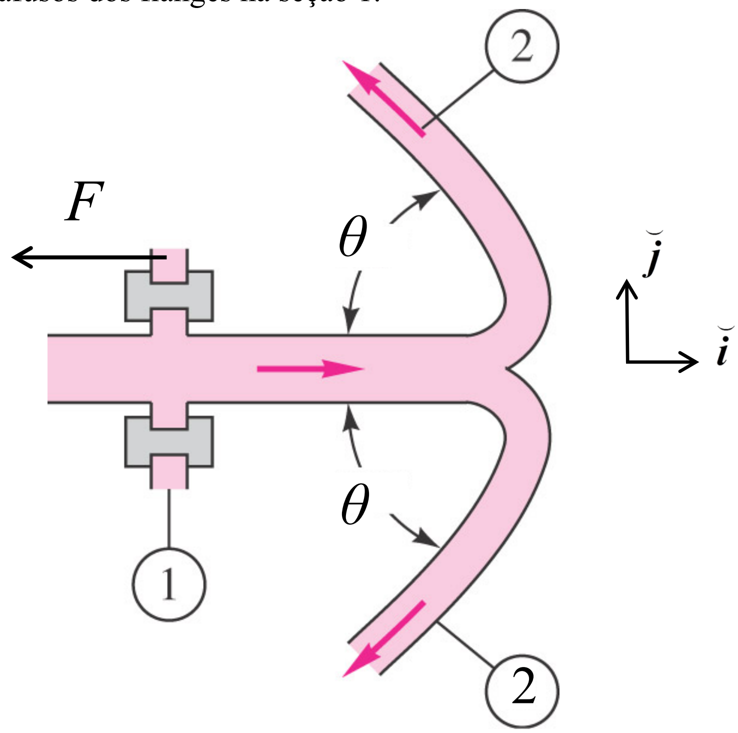
$$Re_{Di} = \frac{\rho V_i D_i}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi \mu D_i}$$

Como as alturas de energia são iguais, a vazão volumétrica resulta:

$$\frac{8Q^2}{\pi^2 g}\sum f_i \frac{L_i}{D_i^5} = \sum H_i \quad \Rightarrow \quad Q = \pi\left(\frac{g\sum H_i}{8\sum f_i \dfrac{L_i}{D_i^5}}\right)^{1/2}$$

As dificuldades são que as alturas das bombas e os fatores e atrito são funções da vazão. O procedimento de cálculo é iterativo e pode ser o seguinte: chutar um valor de Q, calcular f_i e H_i e recalcular Q da expressão anterior até convergência.

2. (3,5 pontos) Um jato de líquido de massa específica ρ descarrega para a atmosfera através do bocal divisor de ângulo θ, como mostrado na figura. As áreas das seções de entrada e saída são respectivamente A_1 e A_2, enquanto a pressão manométrica do fluido no flange é p_{1m}. Nestas condições, escolha um volume de controle adequado e calcule a força F sobre os parafusos dos flanges na seção 1.



Lei de conservação da massa e momento linear em forma integral:

$$0 = \int_{\upsilon} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\upsilon + \int_A \rho \left(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA = \frac{d}{dt}\int_{\upsilon} \rho\, d\upsilon + \int_A \rho \left(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA$$

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \boldsymbol{V}\right) d\upsilon + \int_{SC} \rho \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \boldsymbol{V}\, d\upsilon + \int_{SC} \rho \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA$$

Solução:
Adotamos um volume de controle fixo que inclui o fluido e as paredes do duto com o flange; desta maneira, a força F é externa e podemos considerar as pressões manométricas para o cálculo da força de pressão.
Da lei de conservação da massa, temos $\int_A \left(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA = 0$. Se Q é a vazão volumétrica na seção de passagem no flange, então resulta $Q = 2Q_2$ ou $Q_2 = \frac{1}{2}Q$. Resulta também $V_1 = \frac{Q}{A_1}$ e $V_2 = \frac{Q}{A_2}$.
Da lei de conservação do momento linear, resulta:

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \int_{SC} \rho \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA = \rho\left(-Q\boldsymbol{V}_1 + Q_2 \boldsymbol{V}_{2sup} + Q_2 \boldsymbol{V}_{2inf}\right) = \rho\left[-Q\boldsymbol{V}_1 + \frac{1}{2}Q\left(\boldsymbol{V}_{2sup} + \boldsymbol{V}_{2inf}\right)\right]$$

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \rho Q\left[-\boldsymbol{V}_1 + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{V}_{2sup} + \boldsymbol{V}_{2inf}\right)\right]$$

Os vectores velocidade resultam:

$$\boldsymbol{V}_1 = V_1 \breve{\boldsymbol{i}} = \frac{Q}{A_1}\breve{\boldsymbol{i}}$$

$$\boldsymbol{V}_{2sup} = -V_2 \cos\theta \breve{\boldsymbol{i}} + V_2 \sin\theta \breve{\boldsymbol{j}} = \frac{Q}{2A_2}\left(-\cos\theta \breve{\boldsymbol{i}} + \sin\theta \breve{\boldsymbol{j}}\right)$$

$$\boldsymbol{V}_{2inf} = -V_2 \cos\theta \breve{\boldsymbol{i}} - V_2 \sin\theta \breve{\boldsymbol{j}} = \frac{Q}{2A_2}\left(-\cos\theta \breve{\boldsymbol{i}} - \sin\theta \breve{\boldsymbol{j}}\right)$$

onde os versores $\breve{\boldsymbol{i}}$ e $\breve{\boldsymbol{j}}$ são mostrados na figura. Substituindo, a componente em y do fluxo de momento se anula, resultando:

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \rho Q^2\left(-\frac{1}{A_1} - \frac{1}{2A_2}\cos\theta\right)\breve{\boldsymbol{i}} = -\rho\frac{Q^2}{A_1}\left(1 + \frac{1}{2}\beta\cos\theta\right)\breve{\boldsymbol{i}} \text{ , onde } \beta = \frac{A_1}{A_2}.$$

Como $\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \left(-F + p_{1m} A_1\right)\breve{\boldsymbol{i}}$, obtemos finalmente:

$$-F + p_{1m} A_1 = -\rho\frac{Q^2}{A_1}\left(1 + \frac{1}{2}\beta\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow F = p_{1m} A_1 + \rho\frac{Q^2}{A_1}\left(1 + \frac{1}{2}\beta\cos\theta\right) = p_{1m} A_1 + \rho V_1^2 A_1\left(1 + \frac{1}{2}\beta\cos\theta\right)$$

Comentário: Notar que si desprezamos as perdas entre o flange e a saída (não especificado no exercício), podemos relacionar a pressão manométrica com as velocidades utilizando Bernoulli na linha de corrente entre o flange e a saída, resultando:

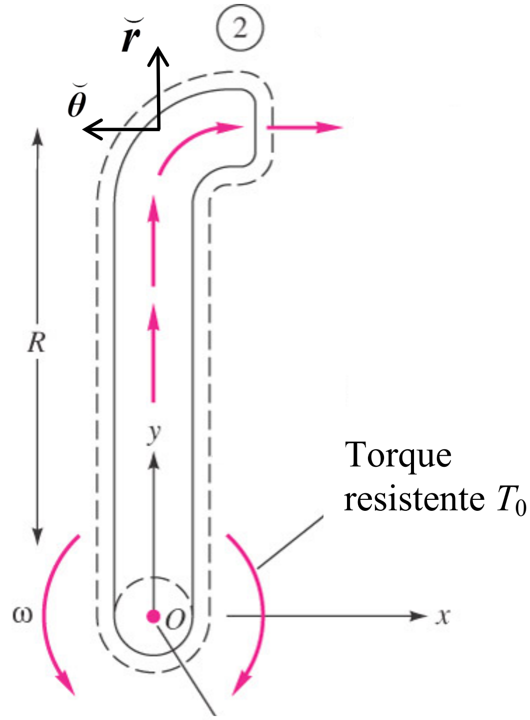
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \Rightarrow p_{1m} = -\frac{1}{2}\rho V_1^2\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2\right]$$

Como, da equação de continuidade, $V_2 A_2 = \frac{1}{2}V_1 A_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2}\beta$, resulta finalmente:

$$p_{1m} = -\frac{1}{2}\rho V_1^2\left[1 - \frac{1}{4}\beta^2\right]$$

Se considerássemos perdas, deveria ser $p_{1m} > -\frac{1}{2}\rho V_1^2\left[1 - \frac{1}{4}\beta^2\right]$.

3. (3,5 pontos) A figura mostra o braço de um irrigador de gramados, visto de cima. O braço, de raio R, gira em torno da origem com velocidade angular constante anti-horária ω. A vazão volumétrica na entrada do braço na origem é Q e o escoamento é incompressível. A área de passagem do irrigador A é constante. Existe um torque resistente proporcional à velocidade angular $T_0 = C\omega$ (onde C é uma constante) na origem, devido ao atrito no mancal. Notar que os torques são positivos quando rotam em sentido anti-horário. Nestas condições, definir um volume de controle conveniente e determinar a velocidade angular de rotação.



Lei de conservação do momento angular em forma integral:

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext} = \int_{VC} \boldsymbol{r} \times \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{V}) d\upsilon + \int_{SC} \rho \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}}) dA = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}\, d\upsilon + \int_{SC} \rho \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}) dA$$

Solução:
Adotamos um volume de controle solidário ao braço do irrigador, rotando com ele. Desta maneira, só temos termo de fluxo nas saídas e entradas do volume de controle. Medimos as velocidades em um sistema absoluto, de maneira que não temos que lidar com forças não inerciais. A lei de conservação do momento angular utilizada é:

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext} = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}\, d\upsilon + \int_{SC} \rho \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}) dA$$

Embora a integral no volume não é zero, ela não varia com o tempo, de maneira que sua derivada se anula (só seria importante se estivessemos analisando o transiente). O termo de fluxo é diferente de zero na saída do braço. Tomando coordenadas polares no plano de rotação (ver figura) consistentes com rotação positiva anti-horária, temos na saída do braço:

$$\boldsymbol{V}_r = -\frac{Q}{A}\breve{\boldsymbol{\theta}} \;\; ; \;\; \breve{\boldsymbol{n}} = -\breve{\boldsymbol{\theta}} \;\; ; \;\; \boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}} = \frac{Q}{A}$$

$$\boldsymbol{V} = \left(-\frac{Q}{A} + \omega R\right)\breve{\boldsymbol{\theta}} \quad ; \quad \boldsymbol{r} = R\breve{\boldsymbol{r}} \quad ; \quad \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V} = R\left(-\frac{Q}{A} + \omega R\right)\breve{\boldsymbol{r}} \times \breve{\boldsymbol{\theta}} = R\left(-\frac{Q}{A} + \omega R\right)\breve{\boldsymbol{k}}$$

onde $\breve{\boldsymbol{k}}$ é o versor normal (saindo do papel). Substituindo, obtemos:

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext} = \rho \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}) A = \rho R Q\left(-\frac{Q}{A} + \omega R\right)\breve{\boldsymbol{k}}$$

Como $\sum \boldsymbol{M}_{ext} = -T_0\,\breve{\boldsymbol{k}} = -C\,\omega\,\breve{\boldsymbol{k}}$, resulta finalmente:

$$-C\,\omega = \rho\,R\,Q\left(-\frac{Q}{A} + \omega\,R\right) \Rightarrow \left(-\rho\,R^2\,Q - C\right)\omega = -\frac{\rho\,R\,Q^2}{A}$$

$$\omega = \frac{\rho\,R\,Q^2}{A\left(\rho\,R^2\,Q + C\right)} = \frac{Q}{A\,R}\left(1 + \frac{C}{\rho\,R^2\,Q}\right)^{-1}$$

Notar que para $C \to 0$, $\omega \to \dfrac{Q}{A\,R}$ (rotação sem torque resistente), enquanto que para $C \to \infty$, $\omega \to 0$ (irrigador segurado).