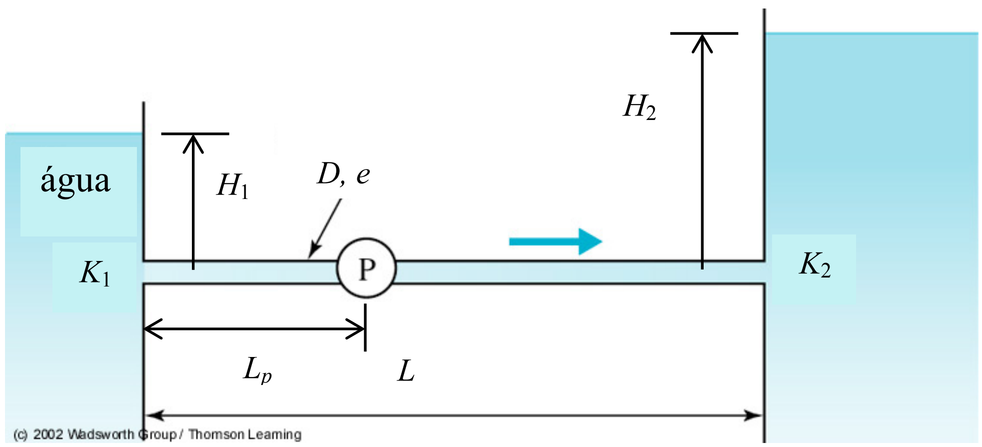
LABORATÓRIO E APLICAÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 2332)
NOÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 2333)
Gabarito Terceira Prova - 2015

1. (3 pontos) No sistema da figura, a bomba deve elevar água de um tanque grande com altura H_1 a outro tanque de altura $H_2 > H_1$ (ambos os tanques abertos à pressão atmosférica p_a) com uma vazão volumétrica Q através de um tubo horizontal de diâmetro D, comprimento total L e rugosidade e. Supor conhecidas a massa específica ρ e viscosidade cinemática ν do fluido.

a) Calcular a altura de energia da bomba H_P, considerando a perda distribuída no conduto e as perdas singulares K_1 na entrada do tanque da esquerda e K_2 na descarga no tanque da direita.

b) A medida que a localização da bomba se afasta do tanque 1, a pressão na sucção na bomba diminui, podendo atingir a condição de pressão de vapor local (cavitação). Calcular a maior distância L_p do reservatório da esquerda a que a bomba pode ser colocada, de maneira que para comprimentos menores a pressão absoluta na sucção na bomba resulte maior que a pressão de vapor p_v.



Conservação da energia: $H_{E1} + H_{maq} = H_{E2} + \sum h_{perdas}$; $H_E = \dfrac{p}{\rho g} + \dfrac{V^2}{2g} + z$

Perda de carga singular: $h_S = K_S \dfrac{V^2}{2g}$; Perda de carga distribuída: $h_d = f \dfrac{L}{D}\dfrac{V^2}{2g}$

Solução:

a) Tomando a pressão atmosférica como referência (zero de pressão), aplicamos a conservação de energia entre as elevações 1 e 2:

$$H_1 + H_P = H_2 + (f\frac{L}{D} + K_1 + K_2)\frac{Q^2}{2g\,A^2}$$

onde H_P é a altura de energia introduzida pela bomba e $A = \pi \dfrac{D^2}{4}$ é a área de passagem. Assim, resulta:

$$H_P = H_2 - H_1 + (f\frac{L}{D} + K_e + K_s)\frac{Q^2}{2g\,A^2}$$

O fator de atrito é calculado com a vazão conhecida e as propriedades do fluido:

$$f = f\left(Re_D, \frac{e}{D}\right) \qquad ; \qquad Re_D = \frac{V\,D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi\,\nu\,D}$$

b) Para calcular a distância L_p aplicamos a conservação da energia entre a elevação 1 e a sucção na bomba para a condição limite; em 1 consideramos altura de pressão e energia potencial, enquanto na sucção consideramos altura de pressão e de energia cinética:

$$\frac{p_a}{\rho g}+H_1=\frac{p_v}{\rho g}+\frac{Q^2}{2gA^2}+(f\frac{L_p}{D}+K_1)\frac{Q^2}{2gA^2}=\frac{p_v}{\rho g}+(1+f\frac{L_p}{D}+K_1)\frac{Q^2}{2gA^2}$$

Vemos que, como o lado direito resulta constante, o lado direito também resultará, isto é, a medida que o comprimento L_p aumenta, p_v deve diminuir. Daqui resulta:

$$L_p=\frac{D}{f}\left[\frac{2gA^2}{Q^2}\left(\frac{p_a-p_v}{\rho g}+H_1\right)-(1+K_1)\right]$$

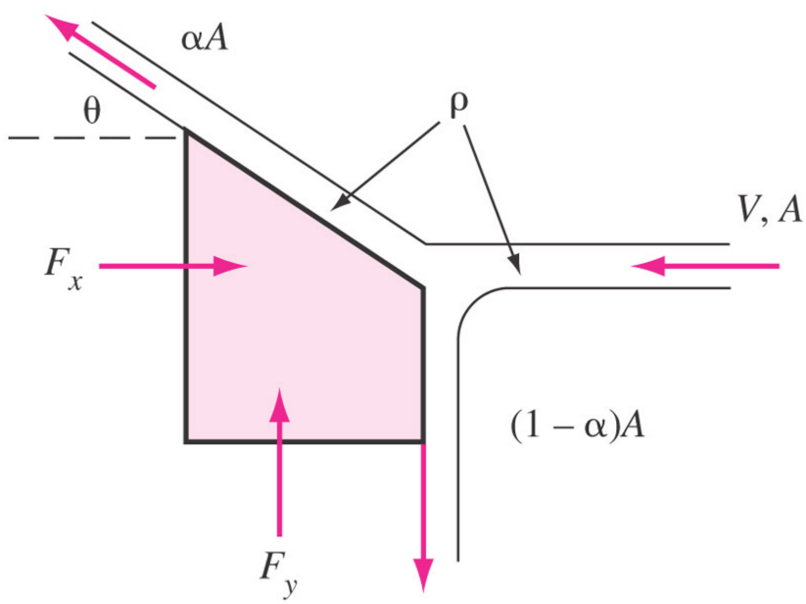
2. (3,5 pontos) Um jato líquido de massa específica ρ, velocidade V e área A atinge um bloco e se divide em dois jatos, como na figura. O jato superior sai com uma ângulo θ com a horizontal, enquanto o jato inferior sai na direção vertical para baixo. Desprezando as forças volumétricas e as perdas e considerando pressão atmosférica fora do jato:

a) Definir um volume de controle para aplicar as leis de conservação.
b) Demonstrar que o módulo das velocidades dos jatos é V constante e que o jato superior e inferior têm respectivamente áreas αA e $(1-\alpha)A$, com $0\le\alpha\le1$.
c) Calcular as forças F_x e F_y necessárias para suportar o bloco contra as variações da quantidade de movimento do fluido.

Bernoulli: $p+\frac{1}{2}\rho V^2+\rho g z=cte$

Conservação da massa: $0=\int_{VC}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\upsilon+\int_{SC}\rho\,(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}})dA=\frac{d}{dt}\int_{VC}\rho\,d\upsilon+\int_{SC}\rho\,(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}})dA$

Conservação do momento: $\sum\boldsymbol{F}_{ext}=\int_{VC}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{V})d\upsilon+\int_{SC}\rho\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}})dA=\frac{d}{dt}\int_{VC}\rho\boldsymbol{V}\,d\upsilon+\int_{SC}\rho\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}})dA$



Solução:

a) Definimos o volume de controle fixo do jato mais o bloco.
b) Aplicando Bernoulli em linhas de corrente que são defletidas nas duas direções, a pressão na entrada e nas saídas é atmosférica e desprezamos forças volumétricas, de maneira que resulta que o módulo da velocidade é constante V. Aplicando a conservação da massa, sendo 1 a entrada, 2 o jato defletido em θ e 3 o jato defletido na vertical, resulta:

$$V_1 A=V_2 A_2+V_3 A_3$$

Como $V_1 = V_2 = V_3 = V$, resulta $A = A_2 + A_3$, isto é soma das áreas de saída deve ser igual a área de entrada, de maneira que os jatos se dividem em frações da área de entrada αA e $(1-\alpha)A$, onde $\alpha = \dfrac{A_2}{A}$.

c) Aplicando a conservação do momento linear no volume de controle:

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = -\dot{m}\boldsymbol{V}_1 + \alpha\,\dot{m}\boldsymbol{V}_2 + (1-\alpha)\dot{m}\boldsymbol{V}_3$$

onde $\dot{m} = \rho V A$. As velocidades e forças resultam:

$\boldsymbol{V}_1 = -V\,\breve{x}$

$\boldsymbol{V}_2 = -V\cos\theta\,\breve{x} + V\sin\theta\,\breve{y}$

$\boldsymbol{V}_3 = -V\breve{y}$

$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = F_x\,\breve{x} + F_y\,\breve{y}$

Substituindo, resulta:

$F_x = \dot{m}V - \alpha\,\dot{m}V\cos\theta = \rho V^2 A(1-\alpha\cos\theta)$

$F_y = \alpha\,\dot{m}V\sin\theta - (1-\alpha)\dot{m}V = \rho V^2 A[\alpha(1+\sin\theta)-1]$

3. (3,5 pontos) Um barco fluvial de peso P como o da figura é suportado por um hidrofólio retangular com razão de aspecto AR e arqueamento (cambagem) com ângulo de sustentação nula β. O barco navega em um fluido de massa específica ρ a uma velocidade U com um ângulo de ataque α. Nestas condições:

a) Calcular o comprimento da corda c.

b) Calcular a potência requerida W se coeficiente de arrasto para o aerofólio infinito é $C_{D\infty}$.

c) Se para aumentar a velocidade do barco o motor aumenta a potência a um valor $W' > W$ e se o barco tem um controle de ajuste do ângulo de ataque, escrever as relações que permitiriam calcular a nova velocidade U' e o novo ângulo de ataque α', mantendo o peso e supondo desprezível a variação de $C_{D\infty}$ com o ângulo de ataque. O que acontece como o novo coeficiente de sustentação C_L'? O novo ângulo de ataque deve ser maior ou menor que o original? Justificar.

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A_p};\ C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A_p};\ C_L = \frac{2\pi\,\text{sen}(\alpha+\beta)}{1+\dfrac{2}{AR}};\ C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi AR}$$

$$AR = \frac{b}{c}\ ;\ A_p = b\,c\ ;\ W = D U_\infty$$

Solução:

a) Sabendo que a sustentação deve ser igual ao peso e escrevendo a área planar em função da corda, $A_p = AR\,c^2$ temos:

$$C_L = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho U^2 AR\, c^2} = \frac{2\pi\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}{1+\frac{2}{AR}} \quad\Rightarrow\quad c = \left[\frac{P\left(1+\frac{2}{AR}\right)}{\pi\rho U^2 AR\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}\right]^{1/2}$$

b) O coeficiente de sustentação (conhecido) resulta $C_L = \frac{2\pi\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}{1+\frac{2}{AR}}$; daqui a potência resulta:

$$\dot{W} = DU = \frac{1}{2}\rho U^3 A_p\left(C_{D\infty} + \frac{C_L^{\,2}}{\pi AR}\right)$$

Substituindo $A_p = AR\,c^2 = AR\frac{P\left(1+\frac{2}{AR}\right)}{\pi\rho U^2 AR\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{P\left(1+\frac{2}{AR}\right)}{\pi\rho U^2\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}$ na relação anterior, resulta:

$$W = DU = \frac{1}{2}\rho U^3\frac{P\left(1+\frac{2}{AR}\right)}{\pi\rho U^2\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}\left(C_{D\infty}+\frac{C_L^{\,2}}{\pi AR}\right) = \frac{U P\left(1+\frac{2}{AR}\right)}{2\pi\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}\left(C_{D\infty}+\frac{C_L^{\,2}}{\pi AR}\right)$$

$$W = \frac{U P\left(1+\frac{2}{AR}\right)}{2\pi\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}\left(C_{D\infty}+\frac{C_L^{\,2}}{\pi AR}\right)$$

c) A nova velocidade U' resultará da solução da relação anterior avaliada na nova condição:

$$W' = \frac{U' P\left(1+\frac{2}{AR}\right)}{2\pi\,\mathrm{sen}(\alpha'+\beta)}\left(C_{D\infty}+\frac{C_L'^{\,2}}{\pi AR}\right)$$

onde $C_L' = \frac{2\pi\,\mathrm{sen}(\alpha'+\beta)}{1+\frac{2}{AR}}$. Da expressão da corda (constante) para as condições original e nova, resulta:

$$\frac{P\left(1+\frac{2}{AR}\right)}{\pi\rho U^2 AR\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{P\left(1+\frac{2}{AR}\right)}{\pi\rho U'^2 AR\,\mathrm{sen}(\alpha'+\beta)} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{U'}{U}\right)^2 = \frac{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}{\mathrm{sen}(\alpha'+\beta)}$$

.

Eliminando $\mathrm{sen}(\alpha'+\beta)$ das relações anteriores é possivel obter uma única equação para U'. Como $U' > U$ e o peso permanece constante, $C_L' < C_L$, $C_D' < C_D$ e $\alpha' < \alpha$. Com a nova velocidade, os novos valores resultam:

$$C_L' = \frac{2P}{\rho U'^2 A_p} = C_L\left(\frac{U}{U'}\right)^2$$

Substituindo, obtemos:

$$W' = \frac{U'^3 P\left(1+\frac{2}{AR}\right)}{2\pi\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta) U^2}\left[C_{D\infty} + \left(\frac{U}{U'}\right)^4\frac{C_L^{\,2}}{\pi AR}\right]$$

$$W' = \frac{C_{D\infty} P\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)\left(1+\frac{2}{AR}\right)}{2\pi\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta) U^2} U'^3 + \frac{P U^2\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)\left(1+\frac{2}{AR}\right)}{2\pi\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}\frac{C_L^{\,2}}{\pi AR}\frac{1}{U'}$$

Obtida a velocidade U', o novo ângulo de ataque resulta:

$$\alpha' = \arcsin\left[\frac{C'_L\left(1+\dfrac{2}{AR}\right)}{2\pi}\right] - \beta = \arcsin\left[\frac{C_L\left(\dfrac{U}{U'}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{AR}\right)}{2\pi}\right] - \beta$$

IMPORTANTE:

- Escrever de maneira legível.
- Anteceder as expressões matemáticas com um raciocínio ou com uma explicação do que vai ser feito. NÃO SERÃO ACEITAS EXPRESSÕES MATEMÁTICAS SEM UM RACIOCÍNIO!