

Circuitos Em Regime Permanente Senoidal

Prof Lourenço Matakas Jr 2002

- Conteúdo:
- fasores
 - definição de reatância e impedância
 - potencia em CA
 - extensão para tensões e correntes deformada (usando série de Fourier)

A- REGIME SENOIDAL

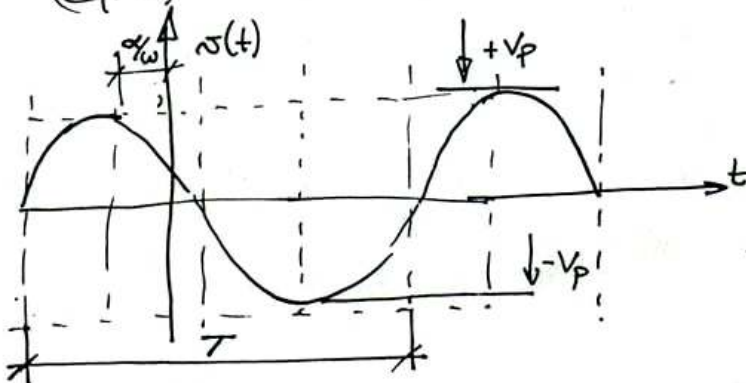
1. FASOR

Uma grandeza senoidal (tensão ou corrente) é representada matematicamente pela equação:

$$v(t) = V_p \cos(\omega t + \alpha) \quad (1)$$

$$i(t) = I_p \cos(\omega t + \beta) \quad (2)$$

A partir deste ponto toda explicação será feita utilizando-se a equação da tensão. A função representada pela (eq. 1) é mostrada abaixo:



$$T = \frac{1}{f} \text{ (segundo)}$$

$$\omega = 2\pi f \text{ (rd/s)}$$

V_p = valor de pico de $v(t)$

* α = ângulo de fase (rd)

(NÃO ESQUEÇA)

exemplo: dar o gráfico cotado de $v(t) = 50 \cos(377t)$
(volts)

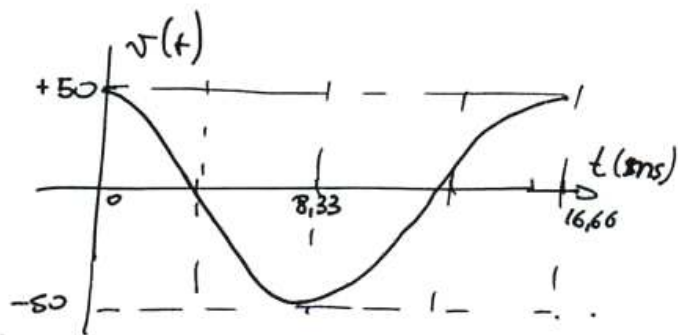
$$V_p = 50V$$

$$\omega = 377 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{377}{2\pi} = 60 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{60} = 16,666 \text{ ms}$$

$$\therefore \alpha = 0$$



A partir deste ponto utilizaremos as leis de Kirchoff e de Ohm, em circuitos onde as tensões e correntes são descritas pelas equações 1 e 2. O leitor já deve estar desesperado, imaginando-se multiplicando e somando funções trigonométricas.

Este trabalho pode ser bastante minimizado se utilizarmos o conceito de FASOR.

Notamos que:

- em uma rede linear, todas as tensões e correntes tem a mesma frequência, tornando-se desnecessário "carregar" a variável " ω " durante o equacionamento;
- as únicas variáveis que sofrem alteração considerável são o valor de pico V_p e o ângulo de fase (α, β)
- será justificado ao longo desta disciplina, que o valor eficaz " V " associado à tensão " $v(t)$ " é mais útil do

que o valor de pico V_p . Para uma tensão senoidal será provado que " $V = V_p/\sqrt{2}$ ".

Além disso os voltímetros e amperímetros CA estão calibrados em valores eficazes.

As considerações acima mostram que o par " V, α " é suficiente para caracterizar uma grandeza senoidal.

Assim, conhecendo-se V e α , obtem-se facilmente $v(t)$:

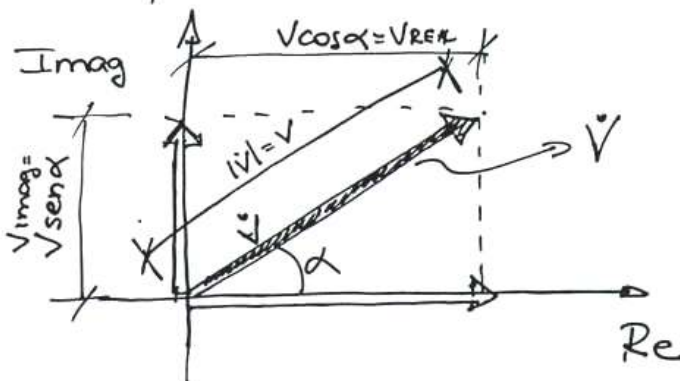
$$v(t) = \underbrace{V \cdot \sqrt{2}}_{V_p} \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad (3)$$

O par " V, α " pode ser associado a um número complexo $\dot{V} = V \angle \alpha$, na forma polar, na forma cartesiana tem-se:

$\dot{V} = V \cos \alpha + j \cdot V \sin \alpha = V_{\text{real}} + j V_{\text{imag}}$
e na forma exponencial:

$$\dot{V} = V e^{j\alpha} \quad (5)$$

Graficamente, tem-se:



"V" é o módulo, ou amplitude, do número complexo \dot{V} . Da figura acima

obtem-se :

$$|\dot{V}| = V = \sqrt{V_{\text{imag}}^2 + V_{\text{real}}^2} \quad \text{eq(4)}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{V_{\text{imag}}}{V} \quad ; \quad \text{tg } \alpha = \frac{V_{\text{imag}}}{V_{\text{real}}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{V_{\text{real}}}{V}$$

O FASOR é apenas uma representação simplificada de uma grandeza senoidal. No próximo item veremos como ela pode ser utilizada na resolução de circuitos em regime senoidal.

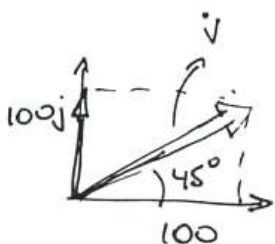
exemplo 2: Representar a tensão $v(t)$ do exemplo 1 na forma fasorial

$$v(t) = 50 \cos(377t) \quad (\text{volts})$$

$$\dot{V} = \frac{50}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \cong \frac{50}{\sqrt{2}} + 0j \cong \frac{50}{\sqrt{2}} e^{j0} = \frac{50}{\sqrt{2}} \quad (\text{volts})$$

exemplo 3: Representar o fasor $\dot{V} = 100 + 100j$ (volts) na forma de equação: ($f = 60 \text{ Hz}$), $\omega = 377 \text{ rad/s}$)

$$\dot{V} = 100 + 100j = \sqrt{100^2 + 100^2} \angle \arccos \frac{100}{\sqrt{100^2 + 100^2}}$$



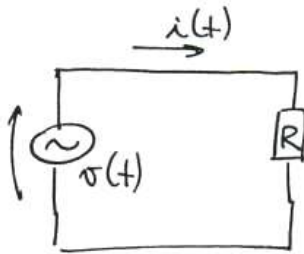
$$= 141 \angle 45^\circ \quad (\text{Volts})$$

α em radianos

$$v(t) = 141 \sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4) \quad (\text{V})$$

② RESISTOR, INDUTOR e CAPACITOR SOB REGIME SENOIDAL

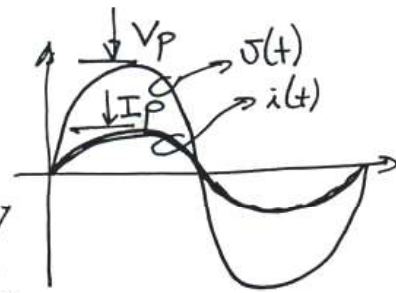
②.1 RESISTOR



Aplica-se ao resistor uma tensão senoidal $v(t)$. Para um resistor linear vale a lei de OHM a cada instante. Assim:

$$\begin{aligned} & \parallel v(t) = V_p \cos(\omega t + \alpha) \text{ (Volts)} && \text{(eq.5)} \\ & \parallel i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_p \cos(\omega t + \alpha)}{R} = I_p \cos(\omega t + \alpha) \text{ (A)} \end{aligned}$$

Os gráficos de $v(t)$ e $i(t)$ são esboçados ao lado.



A tensão tem amplitude V e a corrente tem amplitude I .

Ambas tem a mesma fase, ou seja " α ".

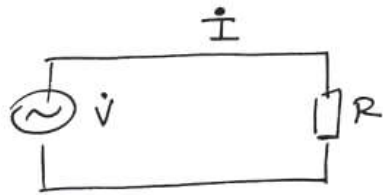
Faremos agora a representação de $v(t)$ e $i(t)$ na forma fasorial:

$$v(t) \longrightarrow \dot{V} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \angle \alpha = V \angle \alpha \quad (6)$$

$$i(t) \longrightarrow \dot{I} = \frac{V_p}{\sqrt{2} R} \angle \alpha = I \angle \alpha = \boxed{\frac{\dot{V}}{R} = \dot{I}} \quad (7)$$

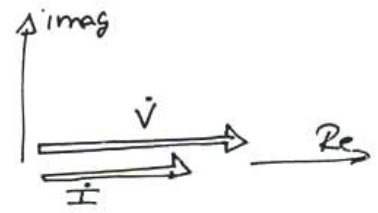
A eq.7 mostra que a lei de OHM vale pl a representação fasorial. Pode-se provar que as leis de KIRCHOF também valem.

Assim, o circuito acima pode ser representado em termos de fasores:



$$\dot{i} = \frac{\dot{v}}{R}$$

(\dot{v} e \dot{i} em fase)



* A partir deste ponto solicita-se ao aluno
 * que seja rigoroso ao referir-se a tensões
 * ou correntes, deixando claro se refere-se
 à forma de onda ($v(t), i(t)$), ao valor
 de pico (V_p, I_p), ao valor eficaz (V, I),
 ou ao fasor (\dot{V}, \dot{I}).

exemplo 4. Calcular $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $i(t)$

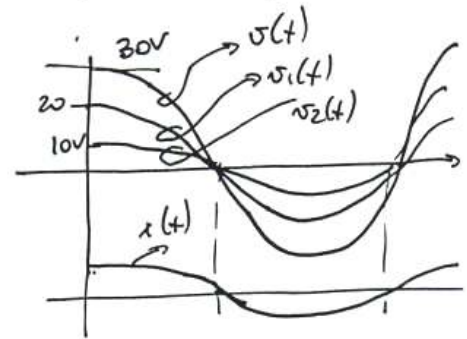
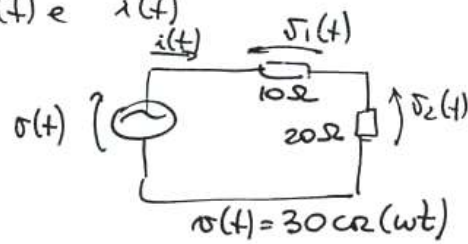
- solução A: (c/ equações)

$$i(t) = \frac{v(t)}{10+20} = \frac{30 \cos(\omega t)}{30}$$

$$i(t) = 1 \cos(\omega t) \text{ (A)}$$

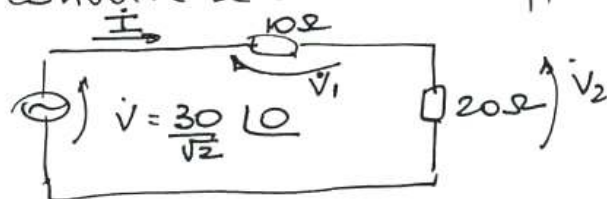
$$v_1(t) = 10 \cdot i(t) = 10 \cos(\omega t) \text{ (V)}$$

$$v_2(t) = 20 \cdot i(t) = 20 \cos(\omega t) \text{ (V)}$$



- solução B: (c/ fasores)

- converter-se o circuito p/ a forma fasorial

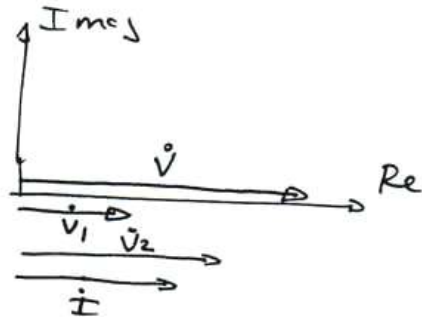


$$- \bar{I} = \frac{\bar{V}}{R_{\text{equivalente}}} = \frac{30 \angle 0}{30} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \quad (\text{A})$$

$$- \bar{V}_1 = 10 \cdot \bar{I} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \quad (\text{V})$$

$$- \bar{V}_2 = 20 \bar{I} = \frac{20}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \quad (\text{V})$$

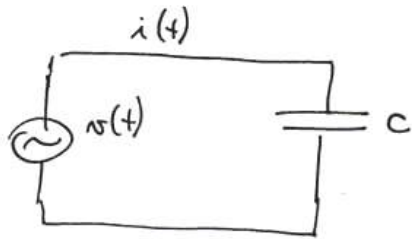
- representando os fatores



Neste ponto, se quisermos os valores em função do tempo (equações ou forma de onda), obtemos facilmente $v(t)$, $i(t)$, $v_1(t)$ e $v_2(t)$ a partir de \bar{V} , \bar{I} , \bar{I}_1 , \bar{I}_2 , conforme exemplos 2 e 3.

Para este exemplo (al resistores) não há muita vantagem em se empregar a forma fasorial. Veremos a seguir, que para os circuitos envolvendo capacitores e indutores a superioridade do tratamento fasorial.

2.2 CAPACITOR



$$v(t) = V_p \cos(\omega t + \alpha) \text{ (Volts)}$$

→ Qual é a relação entre a corrente e a tensão no capacitor?

Sabe-se que a carga elétrica (em Coulombs) armazenado em um capacitor é proporcional à tensão aplicada u , ou seja:

$$Q = C \cdot u$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 coulomb Farad Volts

Para C fixo, se variarmos u de Δu , em um intervalo de tempo Δt , teremos uma variação ΔQ na carga, ou seja

$$\Delta Q = C \Delta u \xrightarrow{\div \Delta t} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = C \frac{\Delta u}{\Delta t} \xrightarrow{\frac{\Delta t \rightarrow 0}}{}$$

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = i(t) = C \frac{du(t)}{dt}} \quad (8)$$

A eq. 8 descreve a relação entre $i(t)$ e $v(t)$ em um capacitor linear.

→ CALCULANDO $i(t)$

Utilizando a eq. 8:

$$\begin{aligned}i(t) &= C \frac{d v(t)}{dt} = C \frac{d (V_p \cos(\omega t + \alpha))}{dt} \\&= C V_p \frac{d (\cos(\omega t + \alpha))}{dt} = C V_p (\omega \cdot (-\sin(\omega t + \alpha))) = \\&= \omega C \cdot V_p (-\sin(\omega t + \alpha)) \quad (9)\end{aligned}$$

porém: $\| -\sin(x) = \cos(x + \pi/2) \quad (10)$
* PROVAR

Reescrevendo (9):

$$i(t) = \frac{V_p}{\frac{1}{\omega C}} \cos(\omega t + \pi/2) \quad (11)$$

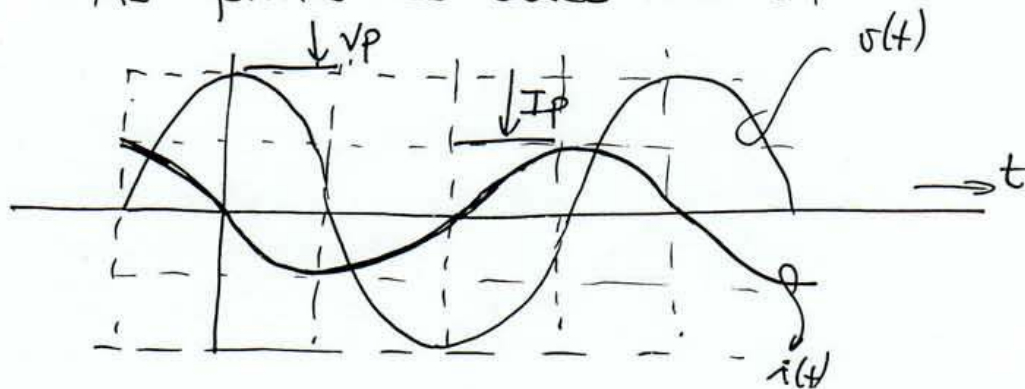
A parcela " $\frac{1}{\omega C}$ " tem dimensão de resistência (Ω) e será chamada de reatância capacitiva " $X_C = \frac{1}{\omega C}$ ".

Reescrevendo 11, chega-se à solução.

$$i(t) = \frac{V_p}{X_C} \cos(\omega t + \pi/2 + \alpha) = I_p \cos(\omega t + \pi/2 + \alpha) \quad (12)$$

Analisando-se a eq. 12 conclui-se que a corrente terá valor de pico " $I_p = \frac{V_p}{X_C}$ " e está adiantada de 90° a relação à tensão $v(t)$.

As formas de onda são: ($p/\alpha=0$)



→ ANÁLISE UTILIZANDO FASORES

$$v(t) \longrightarrow \dot{V} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \angle \alpha = \frac{V}{\sqrt{2}} \angle \alpha$$

$$i(t) \xrightarrow{\text{da eq. 12}} \dot{I} = \frac{\frac{V_p}{X_c}}{\sqrt{2}} \angle 90^\circ + \alpha = \frac{V}{X_c} \angle 90^\circ + \alpha$$

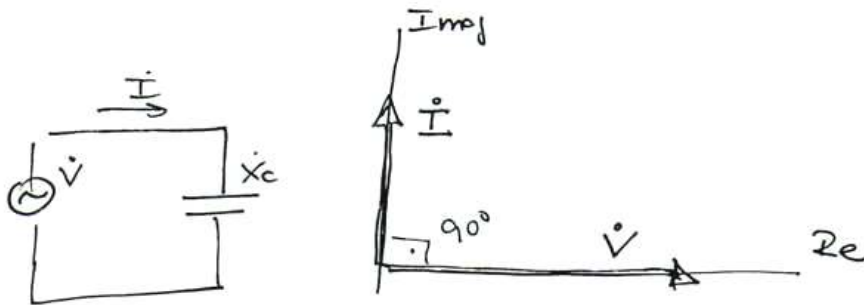
$$\dot{I} = \frac{V \angle \alpha \cdot 1 \angle 90^\circ}{\frac{1}{\omega C}} \quad (13)$$

mas $1 \angle 90^\circ = j$ e $V \angle \alpha = \dot{V}$

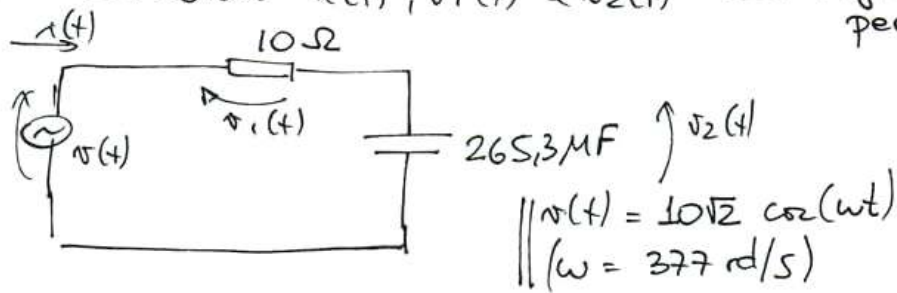
$$\dot{I} = \frac{\dot{V} j}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{\dot{V}}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{\dot{V}}{\dot{X}_c} = \dot{I} \quad (14)$$

Define-se $\dot{X}_c = \frac{1}{j\omega C}$ como reatância complexa,
e obtém-se a expressão 14, na forma da
lei de Ohm.

Da eq. 13 notamos que $\dot{V} = V \angle \alpha$
 e $\dot{I} = \frac{V}{X_c} \angle (90^\circ + \alpha)$, ou seja, o fasor
 da corrente está 90° adiantado da
 relação à da tensão. Mostra-se
 abaixo o diagrama de fasores
 p/ $\alpha = 0^\circ$, e o circuito na representação complexa.



exemplo 5: calcular $i(t)$, $v_1(t)$ e $v_2(t)$ em regime permanente.



→ solução A. no domínio do tempo:

$$\left. \begin{aligned}
 v(t) &= v_1(t) + v_2(t) \quad (15) \\
 v_1(t) &= R \cdot i(t) \quad (16) \\
 i(t) &= C \frac{dv_2(t)}{dt} \quad (17)
 \end{aligned} \right\} v(t) = R \cdot C \frac{dv_2}{dt} + v_2(t) \quad (18)$$

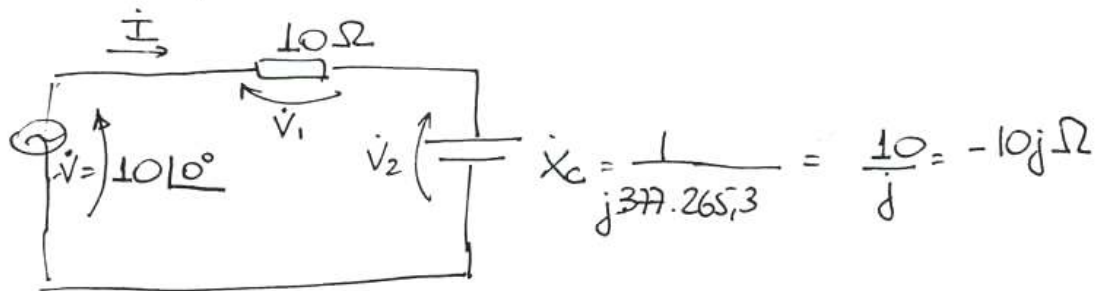
Resolvendo-se a equação diferencial
 acima obtêm-se $v_2(t)$. Com a eq. 17
 obtêm-se $i(t)$ e c/ a eq. 16 obtêm-se $v_1(t)$

A solução também pode ser obtida via transformada de LAPLACE.

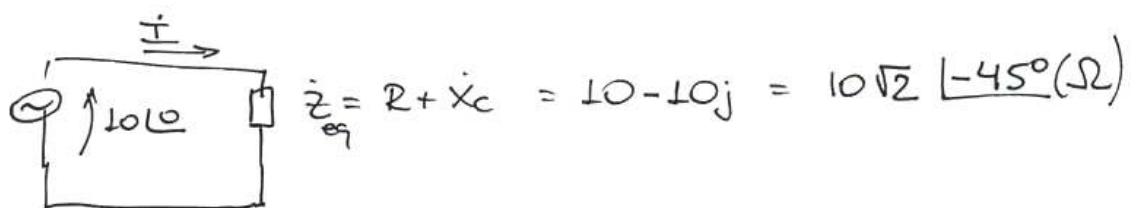
Fica claro neste exemplo simples, com apenas dois componentes, a dificuldade de se obterem $i(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$, por esta abordagem.

→ solução B: utilizando-se fatores

- converta-se o circuito p/ a forma complexa.



- calcule-se a impedância equivalente



- calcule-se \dot{I} .

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z_{eq}} = \frac{10\angle 0^\circ}{10\sqrt{2} \angle -45^\circ} = 0,7071 \angle 45^\circ (A)$$

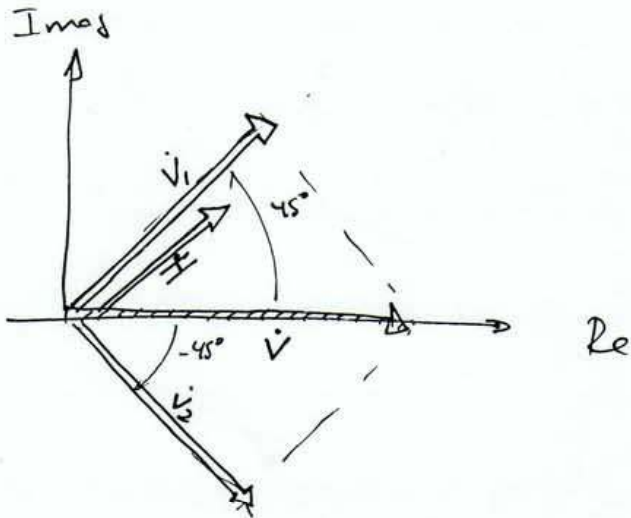
- calcule-se \dot{V}_1

$$\dot{V}_1 = R \cdot \dot{I} = 10 \cdot 0,7071 \angle 45^\circ = 7,071 \angle 45^\circ (V)$$

- calculo de \dot{v}_2 :

$$\begin{aligned}\dot{v}_2 &= X_C \cdot \dot{I} = -10j \cdot 0,7071 \angle 45^\circ = \\ &= 10 \angle -90^\circ \cdot 0,7071 \angle 45^\circ = \\ &= 7,071 \angle -45^\circ \text{ (V)}\end{aligned}$$

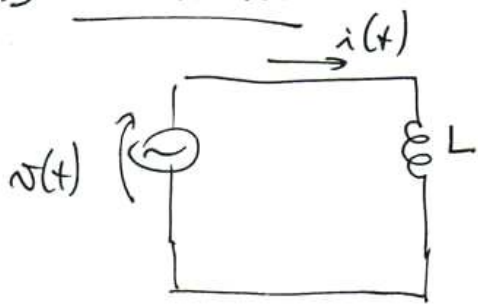
- diagrama de fasores



- P/ a maioria das aplicações em eletrotécnica, os valores de \dot{I} , \dot{v}_1 e \dot{v}_2 já são suficientes. Se $i(t)$, $v_1(t)$ e $v_2(t)$ em regime permanente forem necessários basta rever os exemplos 2 e 3 :

$$\begin{aligned}\dot{I} = 0,7071 \angle 45^\circ &\longrightarrow i(t) = 0,7071 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \pi/4) \text{ A} \\ \dot{v}_1 = 7,071 \angle 45^\circ &\longrightarrow v_1(t) = 7,071 \cdot \cos(\omega t + \pi/4) \text{ V} \\ \dot{v}_2 = 7,071 \angle -45^\circ &\longrightarrow v_2(t) = 7,071 \cos(\omega t - \pi/4) \text{ V}\end{aligned}$$

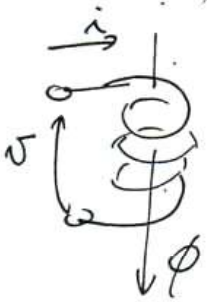
2.3 Indutor



Neste caso, vamos assumir $i(t)$ conhecida e calcular $v(t)$.

$$i(t) = I_p \cos(\omega t + \beta)$$

→ Qual é a relação entre a corrente e a tensão no indutor?



Uma bobina de N espiras, atravessada por uma corrente $i(t)$ gera um fluxo magnético ϕ .

O fluxo concatenado das N espiras é $\Psi = N\phi$. Sabe-se do eletromagnetismo que a indutância é definida por $L = \frac{\Psi}{i} = \frac{N\phi}{i}$.

Assim $\phi = \frac{L}{N} \cdot i$, ou seja o fluxo é proporcional à corrente p/ um indutor linear.

Sabe-se, pela lei de FARADAY, que a tensão induzida em N espiras atravessadas pelo fluxo ϕ é:

$$v(t) = N \frac{d\phi}{dt} = N \frac{d \frac{L}{N} i}{dt} = \frac{L di}{dt} \quad (19)$$

A eq. 19. mostra a relação entre $v(t)$ e $i(t)$ em um indutor.

→ calculando $i(t)$ a partir de $v(t)$

Pela eq. 19: $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$, então:

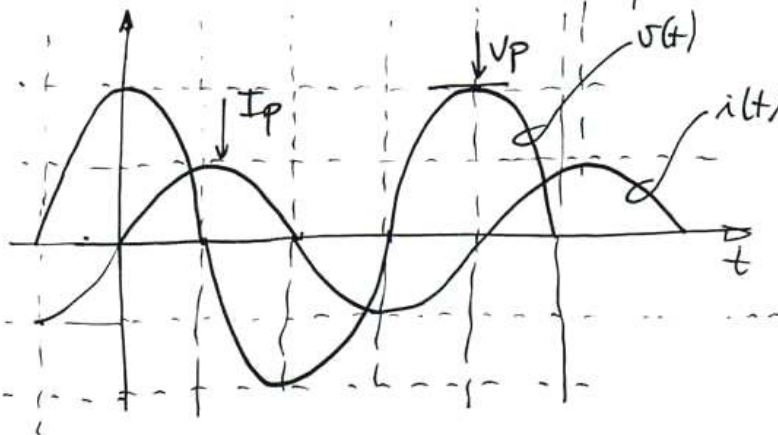
$$L di(t) = v(t) dt \quad \xrightarrow{\text{integrando os dois lados}}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int v(t) dt = \\ &= \frac{1}{L} \int V_p \cos(\omega t + \alpha) dt = \\ &= \frac{V_p}{L} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ mas } * \sin(\omega t + \alpha) &= \cos(\omega t + \alpha - \pi/2) \\ * X_L &= \omega L, \end{aligned}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{V_p}{X_L} \cos(\omega t + \alpha - \pi/2) = I_p \cos(\omega t + \alpha - \pi/2)} \quad (20)$$

A eq. 20 nos mostra que a corrente está atrasada de 90° com relação à tensão e tem valor de pico " $I_p = \frac{V_p}{X_L}$ ". As formas de onda de $v(t)$ e $i(t)$ p/ $\alpha=0$ são:



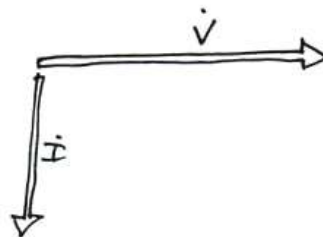
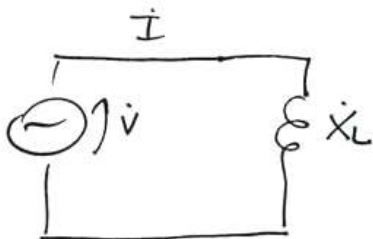
→ ANÁLISE UTILIZANDO FASORES

$$\begin{aligned}
 v(t) &\longrightarrow \dot{V} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \angle \alpha = V \angle \alpha \\
 i(t) &\xrightarrow{\text{da eq. 20}} \dot{I} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \frac{\angle \alpha - 90^\circ}{\omega L} = \frac{V}{\omega L} \angle \alpha - 90^\circ
 \end{aligned} \quad \Bigg\| (21)$$

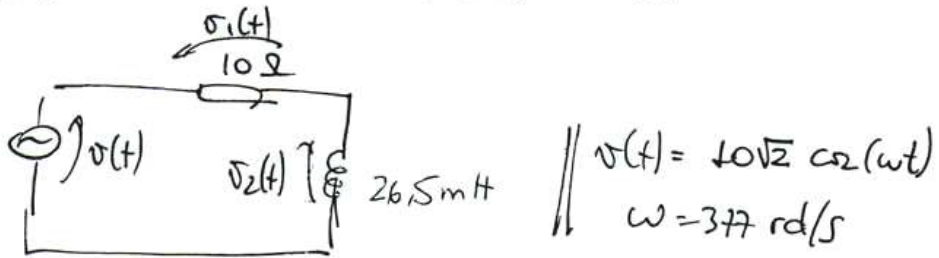
$$\begin{aligned}
 \dot{I} &= \frac{V \angle \alpha}{\omega L} \cdot \angle -90^\circ = \frac{V \angle \alpha (-j)}{\omega L} \\
 &= \frac{V \angle \alpha}{j \omega L} = \boxed{\frac{\dot{V}}{\dot{X}_L} = \dot{I}} \quad (22)
 \end{aligned}$$

Defina-se $\dot{X}_L = j\omega L$ como reactância complexa e obtenha a eq. 22, na forma da lei de OHM.

Da eq. 22 notamos que $\dot{V} = V \angle \alpha$ e $\dot{I} = I \angle \alpha - 90^\circ$, ou seja a corrente está atrasada de 90° w.r.t. a tensão. Mostre-o abaixo no circuito na representação complexa, e o diagrama de fasores q/ $\alpha = 0$



exemplo 6: calcular $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $i(t)$



resposta:

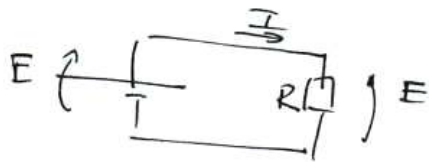
$$i(t) = 1 \cdot \cos(\omega t - \pi/4) \text{ A}$$

$$v_1(t) = 10 \cos(\omega t - \pi/4) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 10 \cos(\omega t + \pi/4) \text{ V.}$$

③ POTÊNCIA EM REGIME SENOIDAL

Em corrente contínua, calcula-se facilmente a potência consumida pela carga por : $P = E \cdot I$



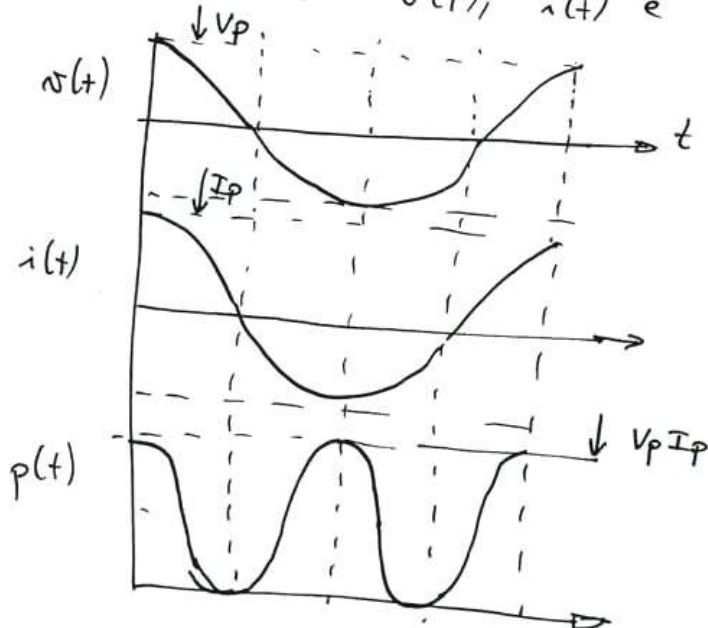
$$= \frac{E^2}{R} = I^2 R$$

Como fica a potência se a tensão for senoidalmente variável?

Vamos supor que $v(t) = V_p \cos(\omega t)$ seja aplicada a um resistor R . A corrente será dada por $i(t) = \frac{V_p}{R} \cos(\omega t)$. E a potência? Podemos calculá-la instantaneamente pela equação $p(t) = v(t) \cdot i(t)$.

$$p(t) = \frac{V_p^2}{R} \cdot \cos^2(\omega t) \quad (w)$$

Plotando $v(t)$, $i(t)$ e $p(t)$:



A potência agora é variável c/ o tempo, assumindo valores entre 0 e $V_p I_p$.

Pelo gráfico percebe-se que a potência $p(t)$ pulsa duas vezes mais que $v(t)$ e $i(t)$, ou seja, se $v(t)$ e $i(t)$ têm frequência f , $p(t)$ tem frequência "2f".

Se esta potência for utilizada p/ por exemplo aquecer a água de um chuveiro, sabe-se que a inércia térmica da água faz com que a temperatura permaneça praticamente constante. Assim, pode-se dizer que a temperatura é dependente do valor médio de $p(t)$. P/ o cas resistivo, mostra-se facilmente que o valor médio de $p(t)$, chamado de potência média ou potência ativa é $P = \frac{V_p I_p}{2}$.

$$\text{Mas: } P = \frac{V_p I_p}{2} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_p}{\sqrt{2}} = V \cdot I$$

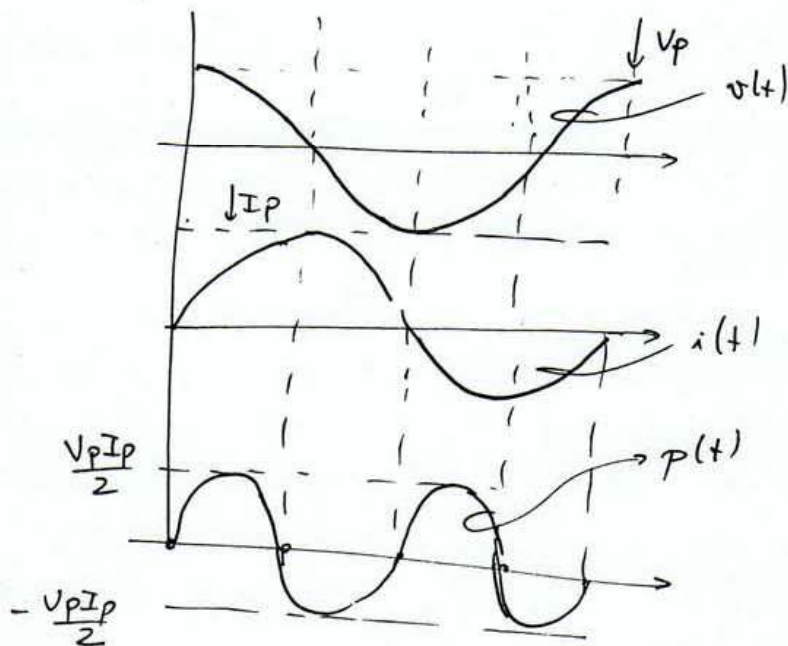
Assim diz-se que a potência dissipada no resistor é o produto dos valores eficazes da tensão e da corrente ($V \cdot I$).

Note-se do gráfico de $p(t)$, que a potência é sempre positiva, ou seja a energia sempre flui do gerador pl a carga.

Vamos verificar como é a potência pl uma carga indutiva. Sabemos que, se $v(t) = V_p \cos(\omega t)$ então:

$$i(t) = \frac{V_p}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2). \text{ Se plotarmos}$$

$v(t)$ e $i(t)$, podemos facilmente esboçar $p(t)$.



Note-se que $p(t)$ pulsa a frequência $2f$, variando entre $-\frac{V_p I_p}{2}$ e $\frac{V_p I_p}{2}$. No semi-ciclo positivo a energia vai do gerador pl a carga e no negativo, volta

para o gerador. Em média, a potência que vai p/ a carga é nula pois as áreas dos semicírculos positivos e negativos são iguais. Assim a potência ativa é nula, apesar de termos a cada instante energia fluindo entre o gerador e a carga. Esta potência, que circula pelo sistema e não gera trabalho (não aquece, não ilumina, não move) é chamado de potência reativa $Q = \frac{V_p I_p}{2} = VI$, Este potência (Q) é indesejável e deve ser adequadamente minimizada.

Sugere-se que o aluno repita o procedimento acima p/ a carga capacitiva, que também consome $P=0$ e $Q=VI$.

Visto as 3 cargas R, L, C pode-se generalizar o cálculo da potência p/ uma carga qualquer, alimentada por uma tensão $v(t) = V_p \cos(\omega t)$, consumindo uma corrente $i(t) = I_p \cos(\omega t - \phi)$.

* Obs: explorando o sinal de $(\omega t - \phi)$

a conveniência do sinal "menor" ficará clara ao longo da dedução da fórmula. Por hora pode-se dizer que p/ carga indutiva tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= j\omega L = \omega L \underline{190} \\ \dot{I} &= \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} = \frac{V_0}{Z \underline{190}} = I \underline{1-90^\circ} \\ \therefore i(t) &= \frac{V_p}{\omega L} \cos(\omega t - 90^\circ) \rightarrow \phi = 90^\circ \\ &\text{isso resultará em } Q > 0 \text{ (convenção)} \end{aligned}$$

p/ capacitiva:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{V_0}{Z \underline{190^\circ}} = I \underline{1+90^\circ} \\ i(t) &= \frac{V_p}{\omega L} \cos(\omega t + 90^\circ) \rightarrow \phi = -90^\circ \\ &\text{isso resultará em } Q < 0 \text{ (convenção)} \end{aligned}$$

Calculando a potência instantânea:

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t) \cdot i(t) = V_p \cos(\omega t) \cdot I_p \cos(\omega t - \phi) \\ &= V_p I_p \cos(\omega t) \cos(\omega t - \phi) \end{aligned}$$

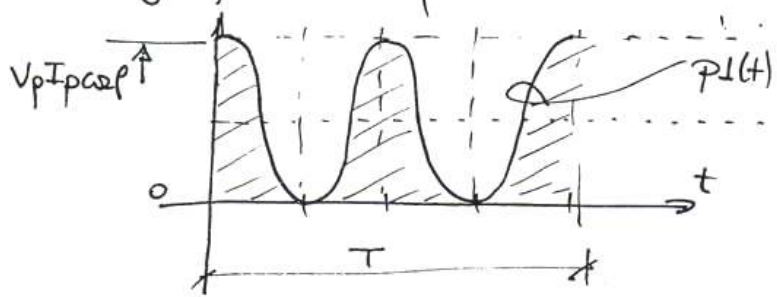
$$\text{mas: } \cos(\omega t - \phi) = \cos(\omega t) \cdot \cos \phi + \sin(\omega t) \cdot \text{sen} \phi$$

$$\begin{aligned} \therefore p(t) &= V_p I_p \cos(\omega t) \cdot [\cos(\omega t) \cdot \cos \phi + \sin(\omega t) \cdot \text{sen} \phi] \\ &= V_p I_p [\cos^2(\omega t) \cos \phi + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \cdot \text{sen} \phi] \end{aligned}$$

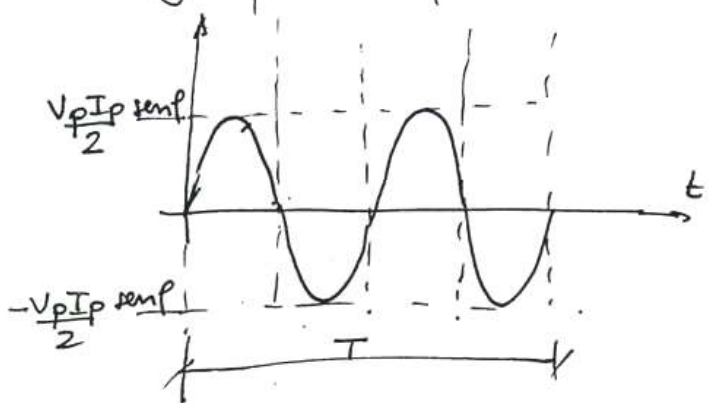
$$\begin{aligned} \text{mas } \left\| \begin{aligned} \cos^2(\omega t) &= \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \\ \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) &= \frac{\text{sen}(2\omega t)}{2} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$p(t) = \underbrace{\frac{V_p I_p \cos \phi}{2} \cdot [1 + \cos(2\omega t)]}_{P_1(t) \text{ PARCELA 1}} + \underbrace{\frac{V_p I_p \sin \phi}{2} \sin(2\omega t)}_{P_2(t) \text{ PARCELA 2}}$$

→ gráfico da parcela 1



→ gráfico da parcela 2



A primeira parcela varia entre " ϕ " e " $V_p I_p \cos \phi$ ", com frequência " 2ω ".
Seu valor médio é dado por:

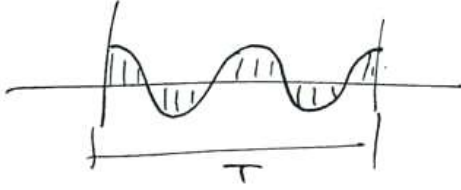
$$P_1 = \frac{\text{Area de } P_1(t) \text{ no período } T}{T}$$

$$= \frac{\int_0^T P_1(t) dt}{T} = \frac{\int_0^T \frac{V_p I_p \cos \phi}{2} [1 + \cos(2\omega t)] dt}{T}$$

$$* P_1 = \frac{V_p I_p \cos \phi}{2T} \left(\int_0^T 1 dt + \int_0^T \cos(2\omega t) dt \right) =$$

mas: $\int_0^T \cos(2\omega t) dt = 0$ (Provar) (condição para a média)

* dica: se plotarmos $\cos(2\omega t)$; conclui-se que sua área é nula



$$\therefore P_1 = \frac{V_p I_p \cos \phi}{2T} \int_0^T 1 dt = \frac{V I \cos \phi}{T} \int_0^T 1 dt = \boxed{V I \cos \phi = P_1}$$

$P_1 = P =$ Potência média ou potência ativa

A segunda parcela varia entre $\left(-\frac{V_p I_p \sin \phi}{2}\right)$ e $\left(+\frac{V_p I_p \sin \phi}{2}\right)$ e também tem frequência dupla. O valor médio de $p_2(t)$ é:

$$P_2 = \frac{\text{Área de } p_2(t)}{T} = \frac{\int_0^T \frac{V_p I_p \sin \phi}{2} \sin(2\omega t) dt}{T}$$

Pelo mesmo motivo que expusemos acima, $P_2 = 0$. (verificar!!)

Assim, a "parcela 2" flui pelo sistema mas não "fica na carga", ou entes, não produz trabalho.

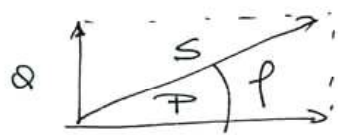
Define-se assim a potência reativa, como $Q = \frac{V_p I_p}{2} \text{ sen } \phi = VI \text{ sen } \phi$, que corresponde ao pico da parcela $p_2(t)$.

Nota-se que:

$$P^2 + Q^2 = V^2 I^2 \cos^2 \phi + V^2 I^2 \text{ sen}^2 \phi = V^2 I^2 (\cos^2 \phi + \text{sen}^2 \phi) = V^2 I^2$$

Vamos denominar a parcela $S = VI$ como sendo a potência aparente.

Assim: $S^2 = P^2 + Q^2$, o que sugere a representação geométrica:

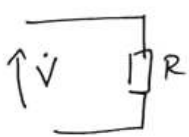


onde P e Q são os lados do triângulo retângulo e S a hipotenusa.

Assim verifica-se que: $P = S \cos \phi = VI \cos \phi$

* Vamos analisar alguns casos relevantes:

a) carga resistiva: $\phi = 0$



$$\begin{aligned} v &= V \cos \omega t \\ i &= I \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= VI \\ Q &= 0 \\ S &= P \end{aligned} \quad \xrightarrow{\begin{matrix} P \\ S \end{matrix}}$$

* $Q=0$, ou seja não existe energia "passeando" pelo sistema, sem gerar trabalho.

A têm disso, para suportar a tensão V , devemos ter um dado número de espiras e ~~uma~~ área transversal do núcleo. Assim, a quantidade de material (ferro e cobre) dependem da corrente I e da tensão V , ou seja, o volume do traço depende de $V \cdot I$, ou de $S = V \cdot I$. Justifique assim o porquê dos traços serem especificados em termos de potência aparente e não da potência ativa.

No caso b, apesar de $P=0$, o traço deverá ser capaz de operar $\propto V \cdot I$. No caso dos cabos, idem.

No dimensionamento dos cabos, apenas importa a potência aparente da carga, pois permite que calculemos a corrente $I = S/V$.

Fica claro, que, em termos de projeto de um sistema elétrico, convém trabalhar com fator de potência unitário. Para fornecer uma potência ativa P , com tensão V a corrente é calculada por $I = \frac{P}{V \cos \phi}$.

A mínima corrente se obtém c/ $\cos \phi = 1$,
 o que implica em menor diâmetro
 de cabos, menor disjuntor e menor
 transformador.

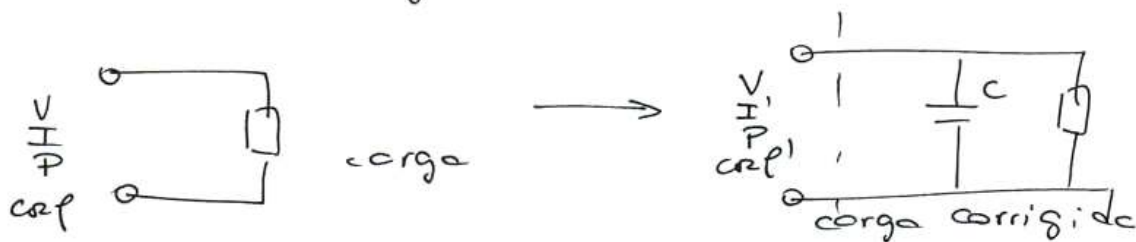
* COMO CORRIGIR O FATOR DE POTÊNCIA?

a) Pensando em termos de corrente

Dada uma carga ^{indutiva} com potência ativa P ,
 tensão V e corrente I :

- seu fator de potência é $\cos \phi = \frac{P}{VI}$ ^{calculado por:}

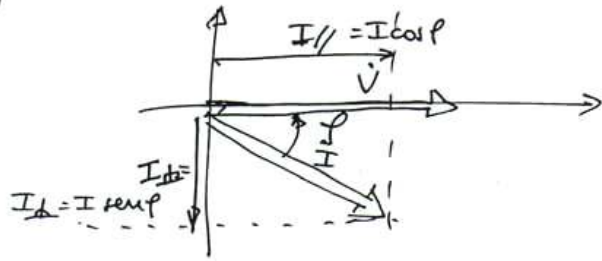
- deseja-se corrigi-lo p/ $\cos \phi' = 1$ c/
 um capacitor em paralelo c/
 a carga;



* A corrente na carga é: $I = I_L$

* A corrente no capacitor é: $I_c = V \omega C \angle +90^\circ$
 $= I_c \angle +90^\circ$

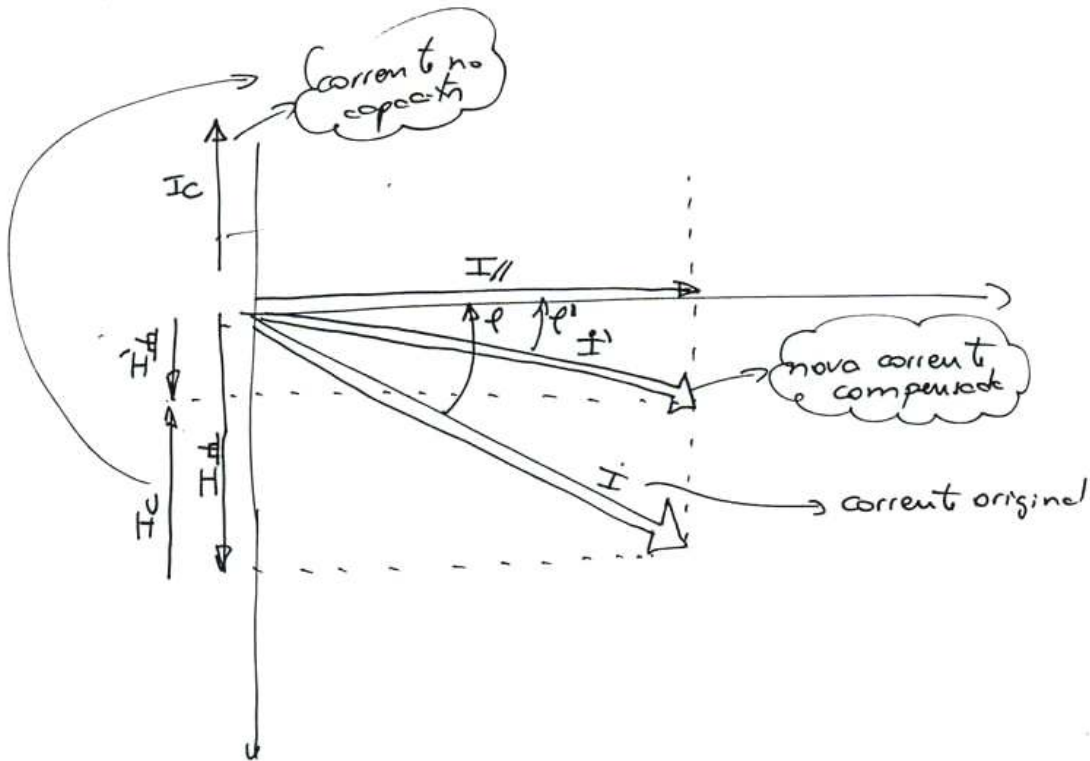
Antes da compensação o diagrama fasorial é:



A corrente I pode ser decomposta em duas partes, $I_{//}$ e I_{\perp} .

A parcela $I_{//}$ é responsável pela potência

ativa, ou seja, energia efetivamente consumida pela carga. A parcela I_{\perp} é responsável pela potência reativa e deve ser minimizada. Como I_{\perp} tem ângulo de -90° , pode ser compensado por um capacitor, que fornece corrente com ângulo de $+90^\circ$.
O diagrama fasorial passa a ser:



Queremos passar de "p" p/ "e"

Assim $I_{th} = I' \text{ sen } \phi'$

mas: $I' = \frac{P}{V \text{ cos } \phi'}$

$$\therefore I_{th} = \frac{P \text{ sen } \phi'}{V \text{ cos } \phi'}$$

→ Com I_{th} e I'_{th} calculo $I_c = I_{th} - I'_{th}$.

→ Com I_c , obtenho C sabendo que

$$I_c = V \omega C$$

$$C = \frac{I_c}{V \omega}$$

b) Pensando em termos de potências

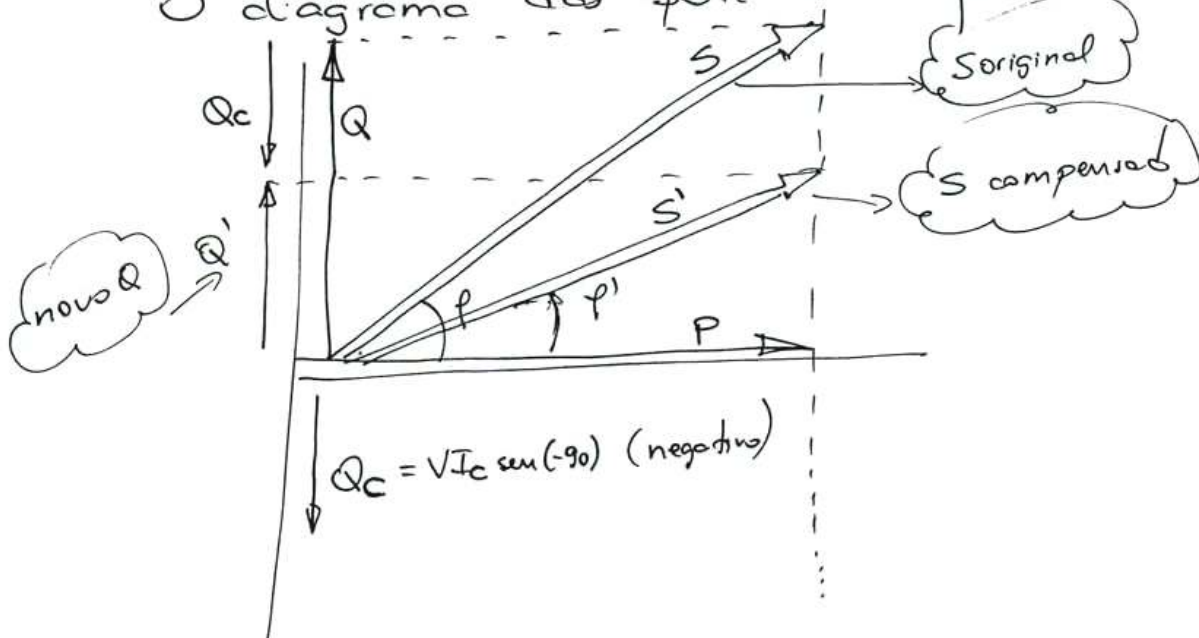
* Uma carga indutiva tem P, I, V

* deseja-se alterar $\text{cos } \phi = \frac{P}{VI}$ p/ $\text{cos } \phi' > \text{cos } \phi$.

Na situação original a carga tem P, I, V, Q, S, P
 Na situação compensada a carga tem P, I', V, Q', S', P'

O diagrama das potências

fica:



Do diagrama acima oSTEM-4:

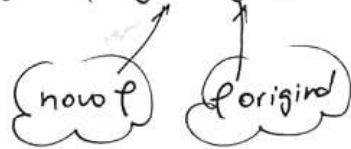
$$\left[\begin{array}{l} \frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \phi \rightarrow Q = P \operatorname{tg} \phi \\ \frac{Q'}{P} = \operatorname{tg} \phi' \rightarrow Q' = P \operatorname{tg} \phi' \end{array} \right.$$

$$Q' = Q + Q_c$$

* não esqueça da convenção de sinais
 $Q > 0$ $P / \phi > 0$ (indutivo)
 $Q < 0$ $P / \phi < 0$ (capacitivo)

∴ A potência de capacitor necessário compensar é de:

$$Q_c = Q' - Q = P \operatorname{tg} \phi' - P \operatorname{tg} \phi = P (\operatorname{tg} \phi' - \operatorname{tg} \phi)$$



mas ϕ capacitivo:

Circuit diagram of a capacitor with voltage V and current I_c .

$$Q_c = V I_c \operatorname{sen}(-90) = -V^2 \omega C$$
$$I_c = V \omega C$$

resultando $Q_c = -V^2 \omega C \rightarrow C = \frac{-Q_c}{V^2 \omega}$

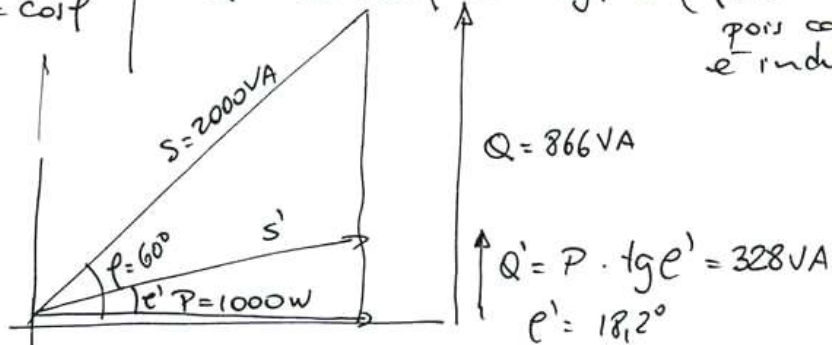
Exemplo: P carga c/ $P = 1000W$, $V = 100V$, $FP = 0,5$ indutivo, compensar o fator de potência de modo que $\cos \phi' = 0,95$. Serão resolvido em termos de potências. Sugere-se que o aluno resolva em termos de corrente.

$$\begin{aligned} P &= 1000 \text{ W} \\ V &= 100 \text{ V} \\ \text{FP} &= 0,5 = \cos \phi \end{aligned}$$

$$S = \frac{P}{\cos \phi} = 2000 \text{ VA}$$

$$Q = S \cdot \sin \phi = P \cdot \tan \phi = 866 \text{ VA} \quad (\phi > 0 \text{ pois carga é indutiva})$$

Q



Tenho $Q = 866 \text{ VA}$, e que possui $Q' = 328 \text{ VA}$
 Devo somar $Q_c = Q' - Q = -537 \text{ VA}$

$$\text{Mas } Q_c = -537 \text{ VA} = -V^2 \omega C = -100^2 \cdot 377 \cdot C$$

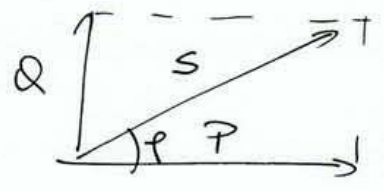
$$\therefore C = 142 \mu\text{F}$$

ou, direto na fórmula

$$Q_c = 1000 (\tan 18,2^\circ - \tan 60^\circ) = -537 \text{ VA}$$

POTÊNCIA COMPLEXA

Na pág. 25 mostrou-se que para uma carga indutivo vale a relação geométrica:



Isso sugere que podemos representar as grandezas na forma complexa como:

$$\dot{S} = P + jQ$$

(* lembrar da convenção do sinal de Q! Q > 0 p/ carga indutivo)

$$\dot{S} = S \angle \phi$$

$$S = VI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Vale também:

$$* \dot{S} = \dot{V} \dot{I}^*$$

onde \dot{I}^* é o complexo conjugado de \dot{I} ,
ou seja, se $\dot{I} = I \angle \alpha$,
 $\dot{I}^* = I \angle -\alpha$

* provando a relação acima:

P/ uma carga genérica $\dot{Z} = Z \angle \phi$,
alimentada c/ tensão $\dot{V} = V \angle \alpha$:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} = \frac{V \angle \alpha}{Z \angle \phi} = \frac{V}{Z} \angle (\alpha - \phi) = I \angle (\alpha - \phi)$$

$$\begin{aligned} \text{Então: } \dot{S} &= \dot{V} \dot{I}^* = V \angle \alpha \cdot (I \angle (\alpha - \phi))^* \\ &= V \angle \alpha \cdot I \angle (\phi - \alpha) = \boxed{VI \angle \phi = \dot{S}} \end{aligned}$$

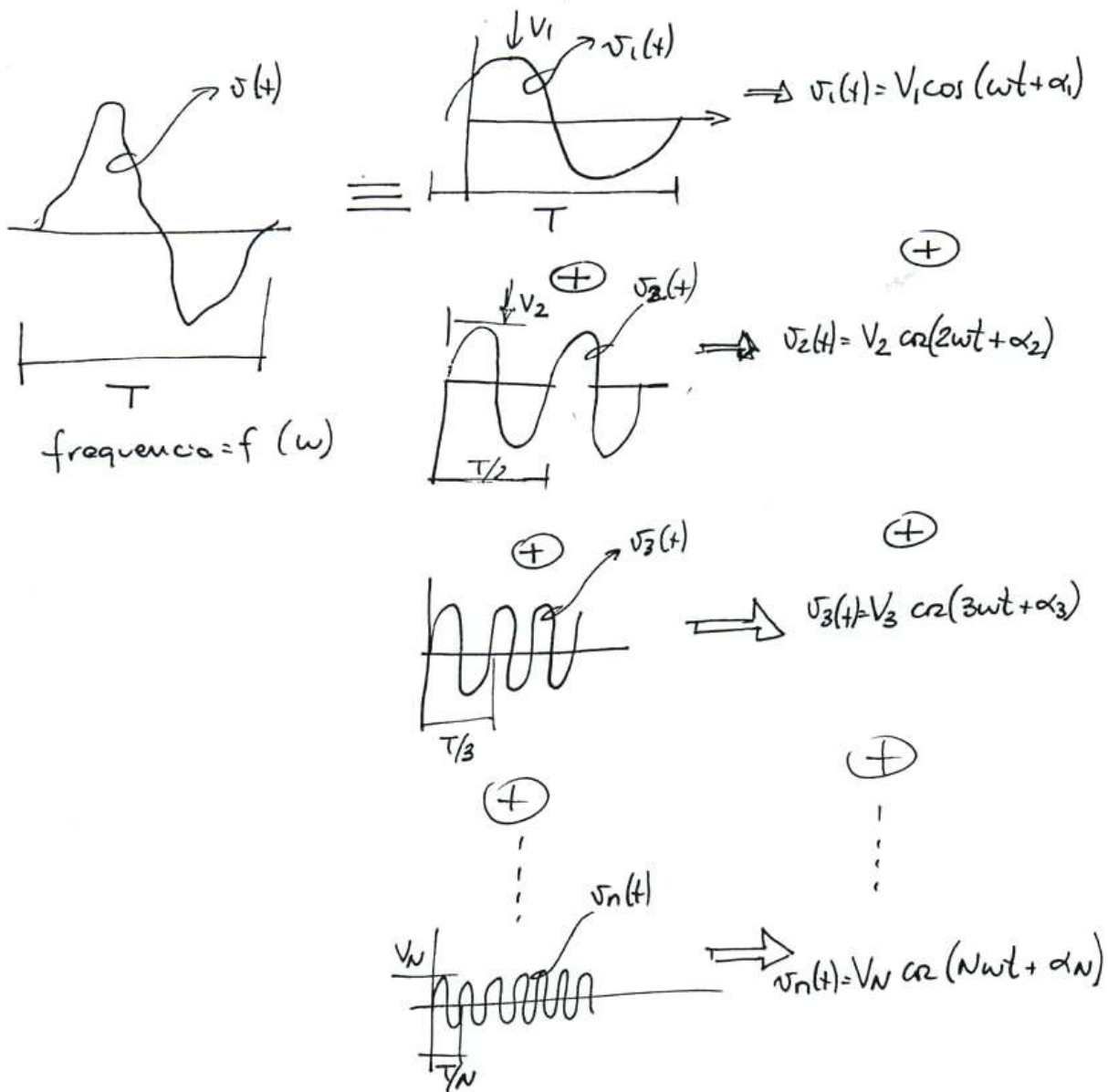
cqd

Verificar que φ é o ângulo de impedância,
como também é o ângulo entre tensão e
corrente ($\alpha - (\alpha - \varphi) = \varphi$) e também o
ângulo do triângulo de potências.

B - REGIME NAO SENOIDAL, REGIME PERMANENTE

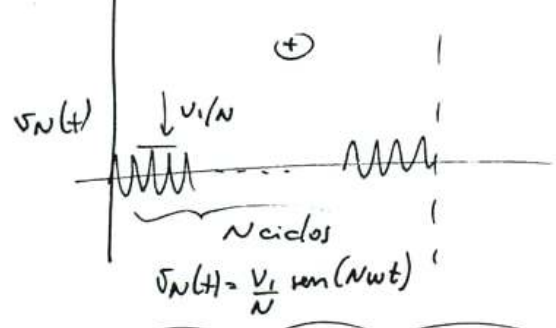
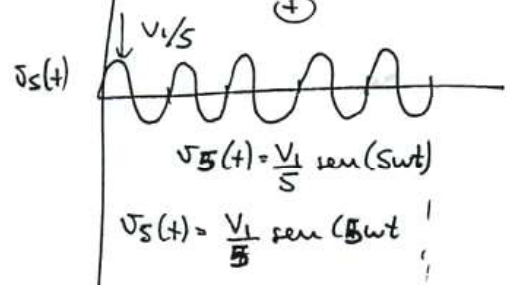
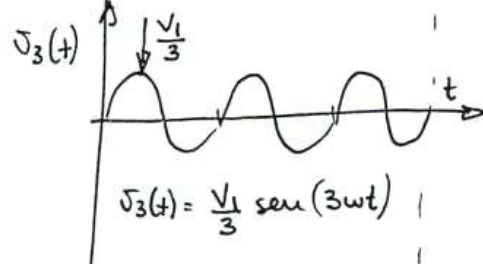
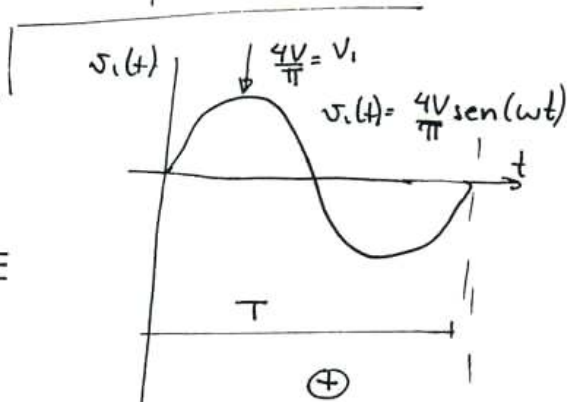
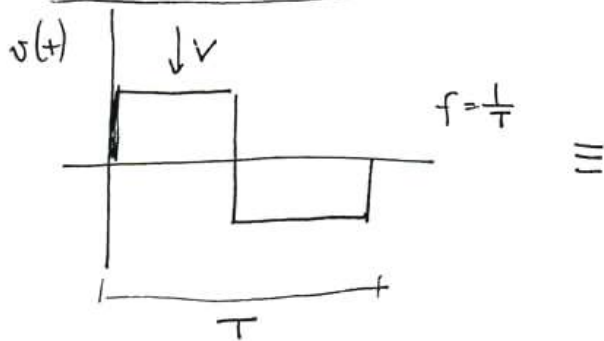
① SÉRIE DE FOURIER

Uma tensão (corrente) não senoidal $v(t)$ $i(t)$ pode ser representada por uma soma infinita de funções senoidais.

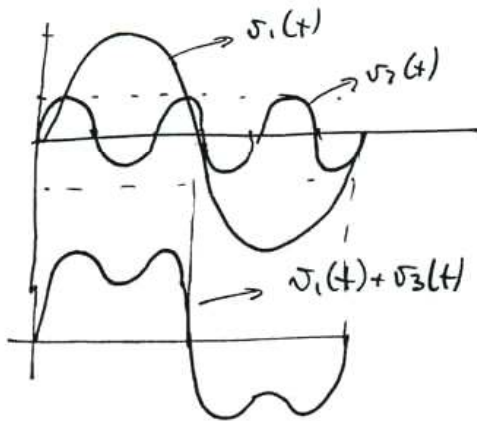


ex: Uma tensão $v(t)$ quadrada pode ser

decomposta como uma soma de senóides!



* Vamos somar inicialmente $v_1(t)$ e $v_3(t)$:



Observe que $v_1 + v_3$ já se assemelha a uma tensão quadrada. Se acrescentarmos $v_5(t)$ teremos:

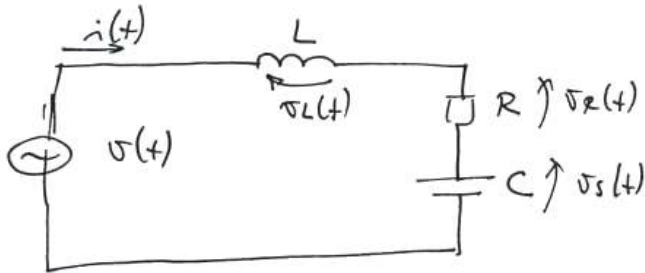


* sugere que o aluno faça as composições, $v_1 + v_3$, $v_1 + v_3 + v_5$, etc p/ verificar a validade das afirmações acima

② APLICAÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER P/O
CÁLCULO DE CIRCUITOS LINEARES
ALIMENTADOS POR FONTES NÃO SENÓIDAS:

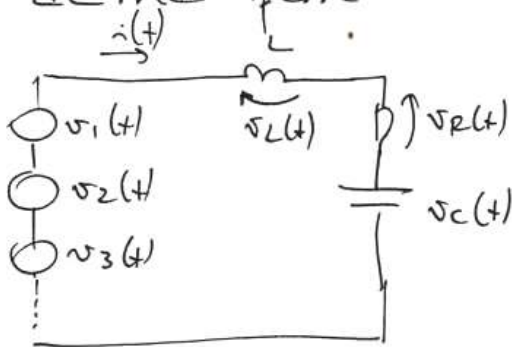
Faremos a análise p/ um circuito simples, de modo que o aluno consiga aplicá-la a circuitos mais complexos.

P/ o circuito RLC abaixo alimentado pela tensão $v(t) = V_1 \cos(\omega t + \theta_1) + V_2 \cos(2\omega t + \theta_2) + V_3 \cos(3\omega t + \theta_3) + V_4 \dots$



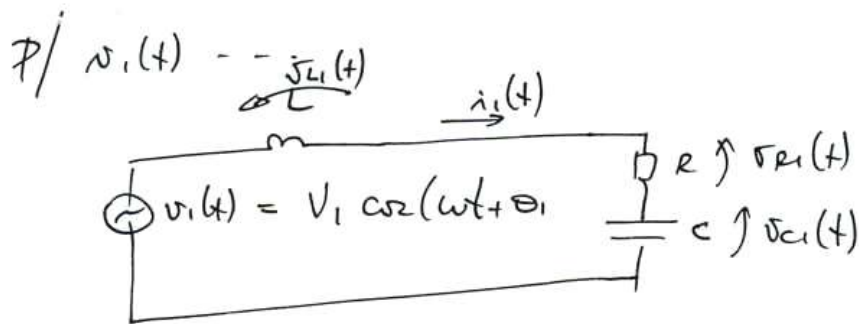
A tensão $v(t)$ pode ser entendido como uma soma de senóides:

$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \dots$. O circuito acima pode ser:

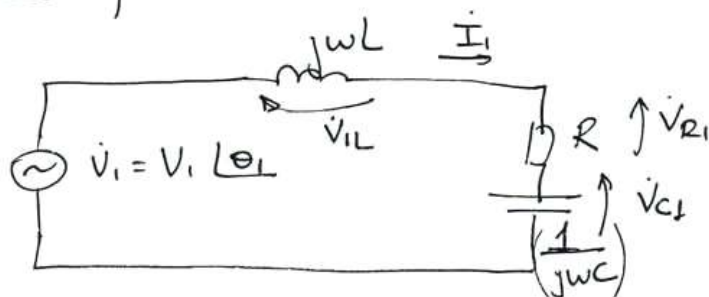


Podemos aplicar o teorema de superposição, que permite que o circuito seja calculado p/ cada uma das

fontes em separado. A resposta à tensão $v(t)$ é obtida somando-se as respostas a cada parcela $v_1(t), v_2(t), \dots$.



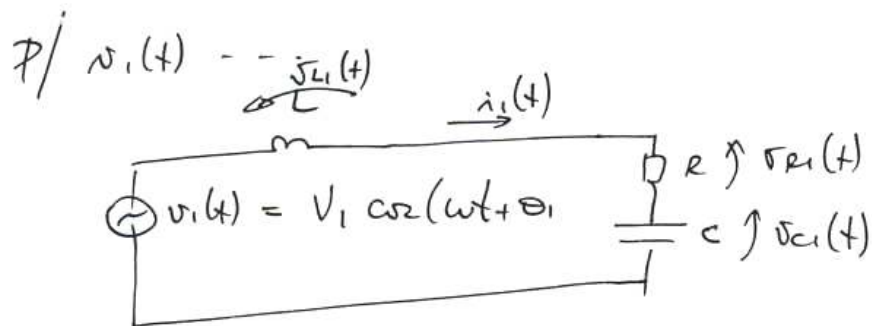
Se sabemos que o circuito pode ser facilmente resolvido e a utilização de fasores.



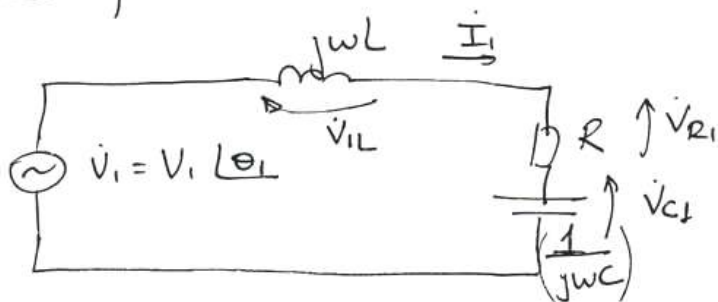
Resolvendo o circuito:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}_1 = (R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) \\ \dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_i}{\dot{Z}_1} \\ \dot{V}_{iL} = \dot{I}_1 \cdot j\omega L \\ \dot{V}_{R1} = \dot{I}_1 \cdot R \\ \dot{V}_{C1} = \dot{I}_1 \cdot \frac{1}{j\omega C} \end{array} \right.$$

A partir de \dot{I}_1 , \dot{V}_{iL} , \dot{V}_{R1} e \dot{V}_{C1} obtemos facilmente os valores instantâneos $i_L(t)$, $v_{iL}(t)$, $v_{R1}(t)$ e $v_{C1}(t)$



Só sabemos que o circuito pode ser facilmente resolvido e a utilização de fasores.



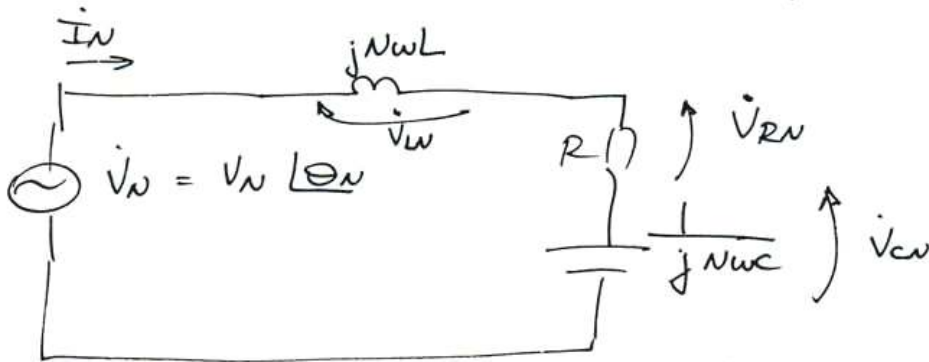
Resolvendo o circuito:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = (R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) \\ \dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1}{\dot{z}_1} \\ \dot{V}_{iL} = \dot{I}_1 \cdot j\omega L \\ \dot{V}_{R1} = \dot{I}_1 \cdot R \\ \dot{V}_{C1} = \dot{I}_1 \cdot \frac{1}{j\omega C} \end{cases}$$

A partir de \dot{I}_1 , \dot{V}_{iL} , \dot{V}_{R1} e \dot{V}_{C1} obtemos facilmente os valores instantâneos

$$i_1(t), v_{iL}(t), v_{R1}(t) \text{ e } v_{C1}(t)$$

Vamos considerar agora o harmônico de ordem "N". Na representação fasorial:



Resolvendo o circuito (p/ frequência $N\omega$)

$$\dot{Z}_N = R + jN\omega L + \frac{1}{jN\omega C}$$

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{V}_N}{\dot{Z}_N}$$

$$\dot{V}_{LN} = \dot{I}_N \cdot jN\omega L$$

$$\dot{V}_{RN} = \dot{I}_N \cdot R$$

$$\dot{V}_{CN} = \dot{I}_N \cdot \frac{1}{j\omega C}$$

A partir de \dot{I}_N , \dot{V}_{LN} , \dot{V}_{RN} e \dot{V}_{CN} , obtêm-se facilmente os valores instantâneos $i_N(t)$, $v_{LN}(t)$, $v_{RN}(t)$ e $v_{CN}(t)$. (p/ frequência $N\omega$)

A resposta p/ o circuito original é:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots + i_N(t)$$

$$v_L(t) = v_{L1}(t) + v_{L2}(t) + \dots$$

$$v_C(t) = v_{C1}(t) + v_{C2}(t) + \dots$$

$$v_R(t) = v_{R1}(t) + v_{R2}(t) + \dots$$

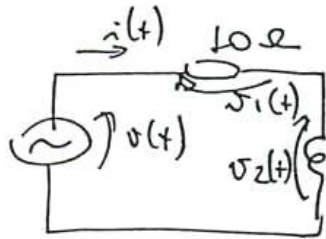
* VALE RESALTAR QUE A RESPOSTA
TEMPORAL (FORMA DE ONDA) é dada
pelo soma das várias respostas
temporais p/ cada frequência.

*** NÃO SE PODEM SOMAR OS FAIORES,
POIS FAJOR É DEFINIDO P/ UMA DADA
FREQUÊNCIA

SM

Leis de fasores, potência, harmônicos
(Resolução)

①



$$L = \frac{10}{2\pi 60} \text{ H}$$

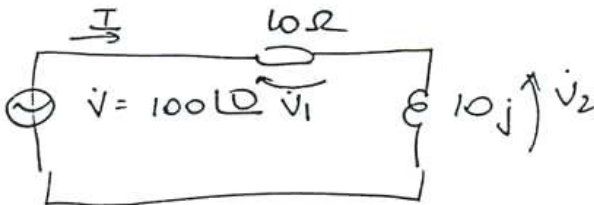
$$v(t) = \begin{cases} \text{tem valor} \\ \text{eficaz de } 100 \text{ V} \\ f = 60 \text{ Hz} \end{cases}$$

Ostendo:

a) a equação de $v(t)$ (considero fase nula).

$$v(t) = 100\sqrt{2} \cos(377t) \text{ (Volts)}$$

b) os fasores correspondentes a $v(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $i(t)$



$$\underline{Z} = 10 + 10j = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ = 14,1 \angle 45^\circ$$

$$\underline{I} = \frac{100 \angle 0}{10\sqrt{2} \angle 45} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = 7,07 \angle -45^\circ$$

$$\underline{V}_1 = R \cdot \underline{I} = 10 \cdot 7,07 \angle -45 = 70,7 \angle -45^\circ$$

$$\underline{V}_2 = \underline{X}_L \cdot \underline{I} = 10j \cdot 7,07 \angle -45 = 70,7 \angle +45^\circ$$

c) as equações de $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $i(t)$

$$v_1(t) = 100 \cos(377t - 45^\circ) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 100 \cos(377t + 45^\circ) \text{ V}$$

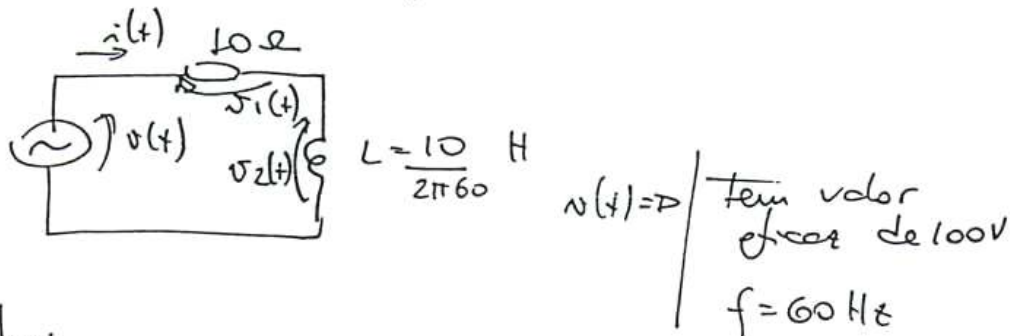
$$i(t) = 10 \cos(377t - 45^\circ) \text{ A}$$

erro do Prof.!
Qual é?

①

Leis de fasores, potência, harmônicos
(Resolução)

①

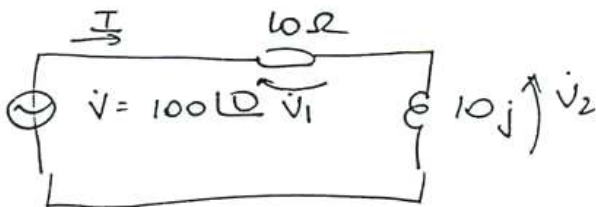


Ostendo:

a) a equação de $v(t)$ (considere fase nula).

$$v(t) = 100\sqrt{2} \cos(377t) \text{ (Volts)}$$

b) os fasores correspondentes a $v(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $i(t)$



$$\underline{Z} = 10 + 10j = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ = 14,1 \angle 45^\circ$$

$$\underline{I} = \frac{100 \angle 0}{10\sqrt{2} \angle 45} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = 7,07 \angle -45^\circ$$

$$\underline{V}_1 = R \cdot \underline{I} = 10 \cdot 7,07 \angle -45 = 70,7 \angle -45^\circ$$

$$\underline{V}_2 = \underline{X}_L \cdot \underline{I} = 10j \cdot 7,07 \angle -45 = 70,7 \angle +45^\circ$$

c) as equações de $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $i(t)$

$$v_1(t) = 100 \cos(377t - 45^\circ) \text{ V}$$

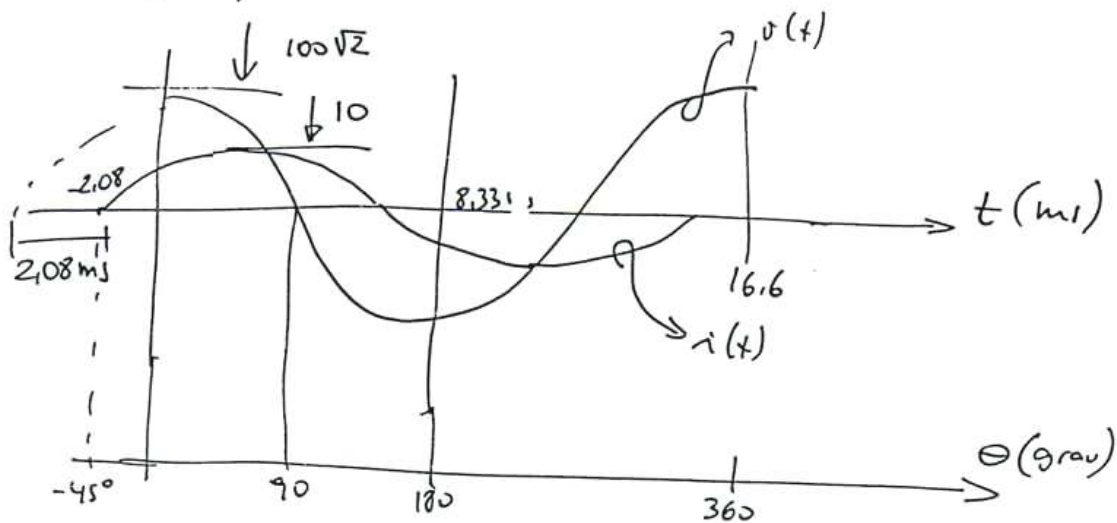
$$v_2(t) = 100 \cos(377t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 10 \cos(377t - 45^\circ) \text{ A}$$

erro do Prof.!
Qual é?

①

d) Os gráficos obtidos de $v(t)$, $i(t)$ e $\theta(t)$



e) calcular as potências ativa, reativa e aparente em R , L e $R+L$

	R (Ω)	L	$R+L$
P (W)	500	0	500
Q (VA)	0	500	500
S (VA)	500	500	707
FP	1	0	0,707

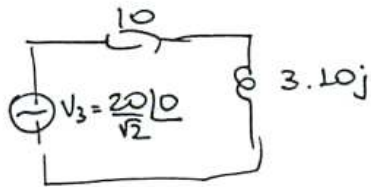
f) Se a tensão $v(t)$ for deformada:
 $v(t) = 141 \cos(\omega t) + 20 \cos(3\omega t) + 10 \cos(5\omega t)$ (V)

calcule a corrente resultante $i(t)$

P/ 60 Hz

$i_1(t) = 10 \cos(377 - 45^\circ)$ A (já calculado)

P/ 180 Hz



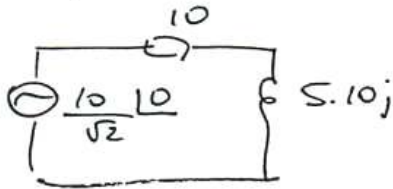
$$i_3 = \frac{\frac{20}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{10 + 30j} =$$

$$I_3 = \frac{14,1 \text{ LD}}{31,62 \angle 71,56^\circ} = 0,446 \angle -71,56^\circ$$

$$\therefore i_3(t) = 0,6306 \cos(3 \times 377t - 71,56^\circ) \text{ A}$$

errado!

p/ 300 Hz



$$I_5 = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}} \text{ LD}}{10 + 50j} = \frac{7,07 \text{ LD}}{51 \angle 78,7^\circ} = 0,139 \angle -78,7^\circ$$

$$\therefore i_5(t) = 0,196 \cos(5 \times 377t - 78,7^\circ) \text{ errado!}$$

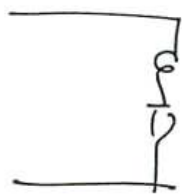
Assim: $i(t) = i_1 + i_3 + i_5 = 10 \cos(377t - 45^\circ) + 0,6306 \cos(3 \times 377t - 71,56^\circ) + 0,196 \cos(5 \times 377t - 78,7^\circ) \text{ A}$

errado!

g) Completar a tabela

harmônica	Componentes de tensão (V _{eff})	Valores percentuais	correntes eficazes	Valores percentuais
1	100	100%	7,07	100%
3	14,1	14,1%	0,446	6,3%
5	7,07	7,07%	0,139	1,97%

- ② P/O ex L s/ harmônicas, calcular o valor do capacitor que corrige o fator de potência p/ $FP=1$



$$Q = 500 \text{ VAR}$$

O capacitor deve fornecer $Q_c = Q = 500 \text{ VAR}$

$$\therefore Q_c = V^2 \omega C$$

$$C = \frac{Q_c}{V^2 \omega} = \frac{500}{100^2 \cdot 377} = 1326 \mu\text{F}$$