



Mecânica de Estruturas de Materiais Compósitos

Notas de aulas:

Prof. Sérgio Frascino Müller de Almeida



1. Definições básicas



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

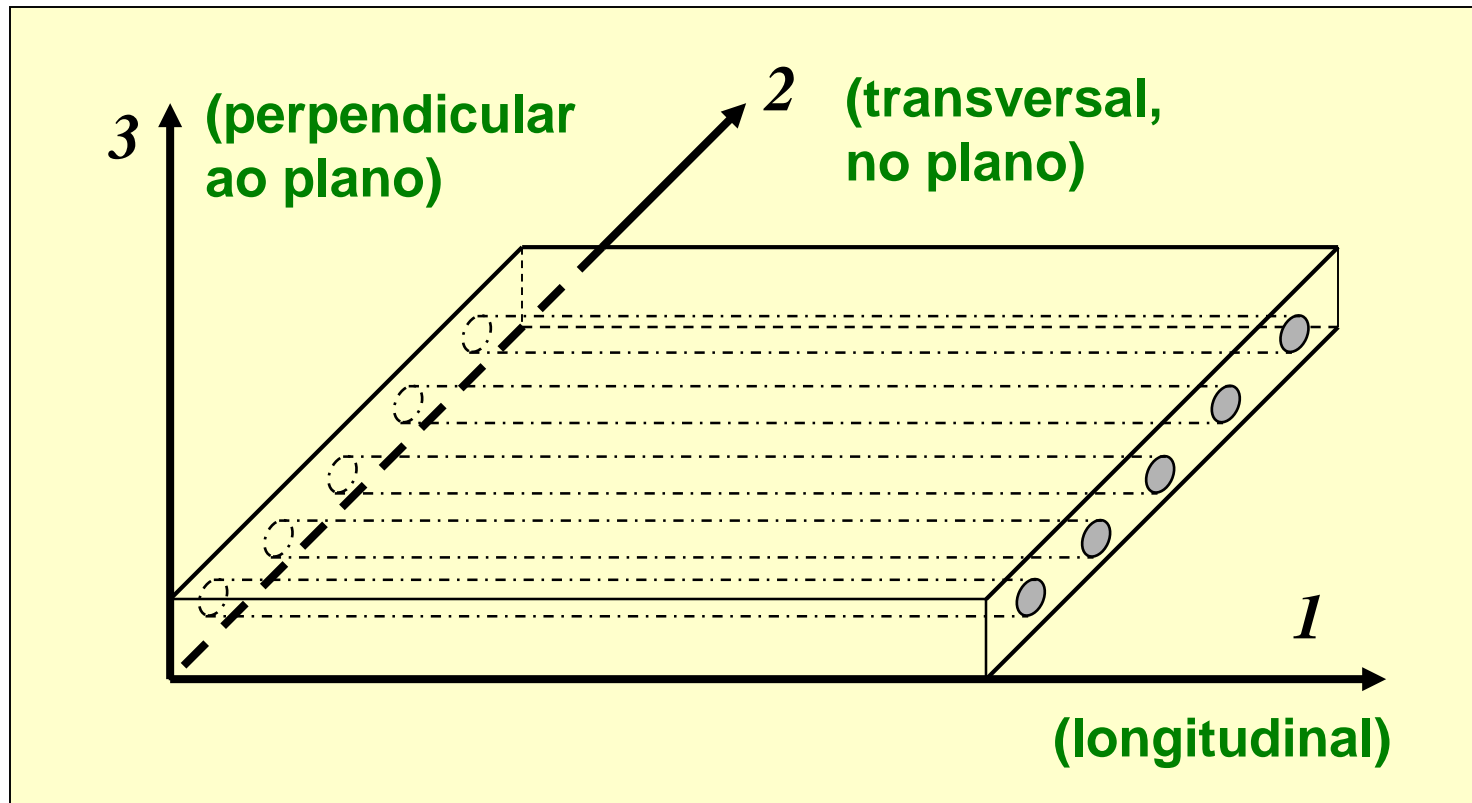
definição - lâmina

- **lâmina** é uma camada de fibras unidirecionais ou tecidas embebidas em uma matriz
- os **eixos principais** do material são:
 1. **direção longitudinal à fibra**
 2. **direção transversal à fibra no plano da lâmina**
 3. **direção perpendicular ao plano da lâmina**



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

sistema de eixos principais de uma lâmina





CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

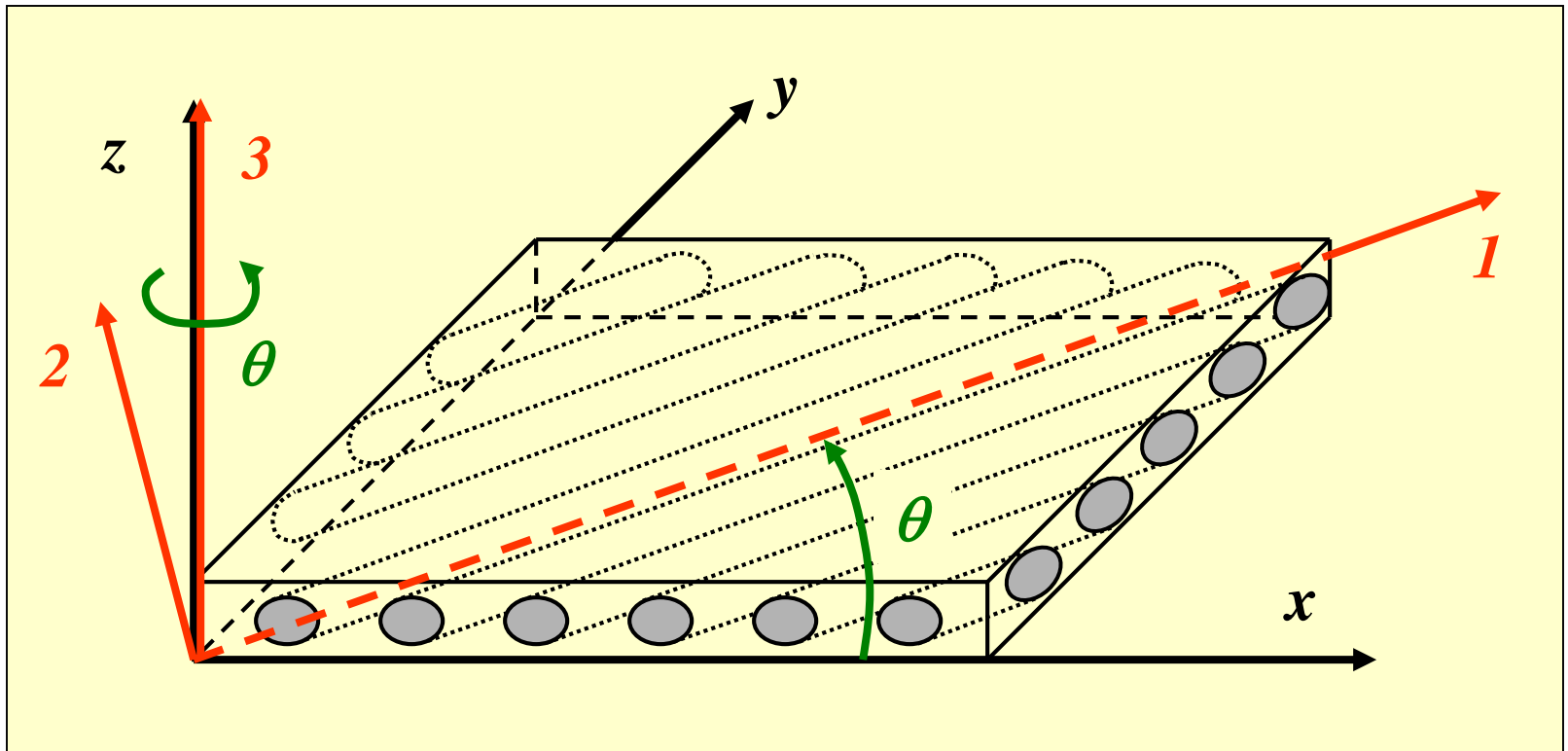
orientação de uma lâmina

- o **ângulo de laminação** de uma lâmina é o ângulo do eixo x do sistema de coordenadas usado até a direção da fibra (ou longitudinal da lâmina)
- o eixo z do sistema de coordenadas deve ser sempre normal ao plano da lâmina
- o ângulo de laminação depende do sistema de coordenadas escolhido



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

orientação de uma lâmina





CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

orientação de uma lâmina

- no caso de lâmina de tecido, há fibras em duas direções ortogonais: a direção do urdume e a direção da trama
- nesse caso, o **ângulo de laminação** da lâmina é o ângulo do eixo x do sistema de coordenadas usado até a direção do urdume (ou trama, conforme convencionalizado)



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

orientação de uma lâmina

- quando se acrescenta 180° no ângulo de laminação, obtém-se a mesma direção das fibras
- exemplo: $\theta_1 = -90^\circ$ e $\theta_2 = 90^\circ$ representam os mesmo ângulo de laminação
- a orientação da lâmina depende do sistema de referência



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

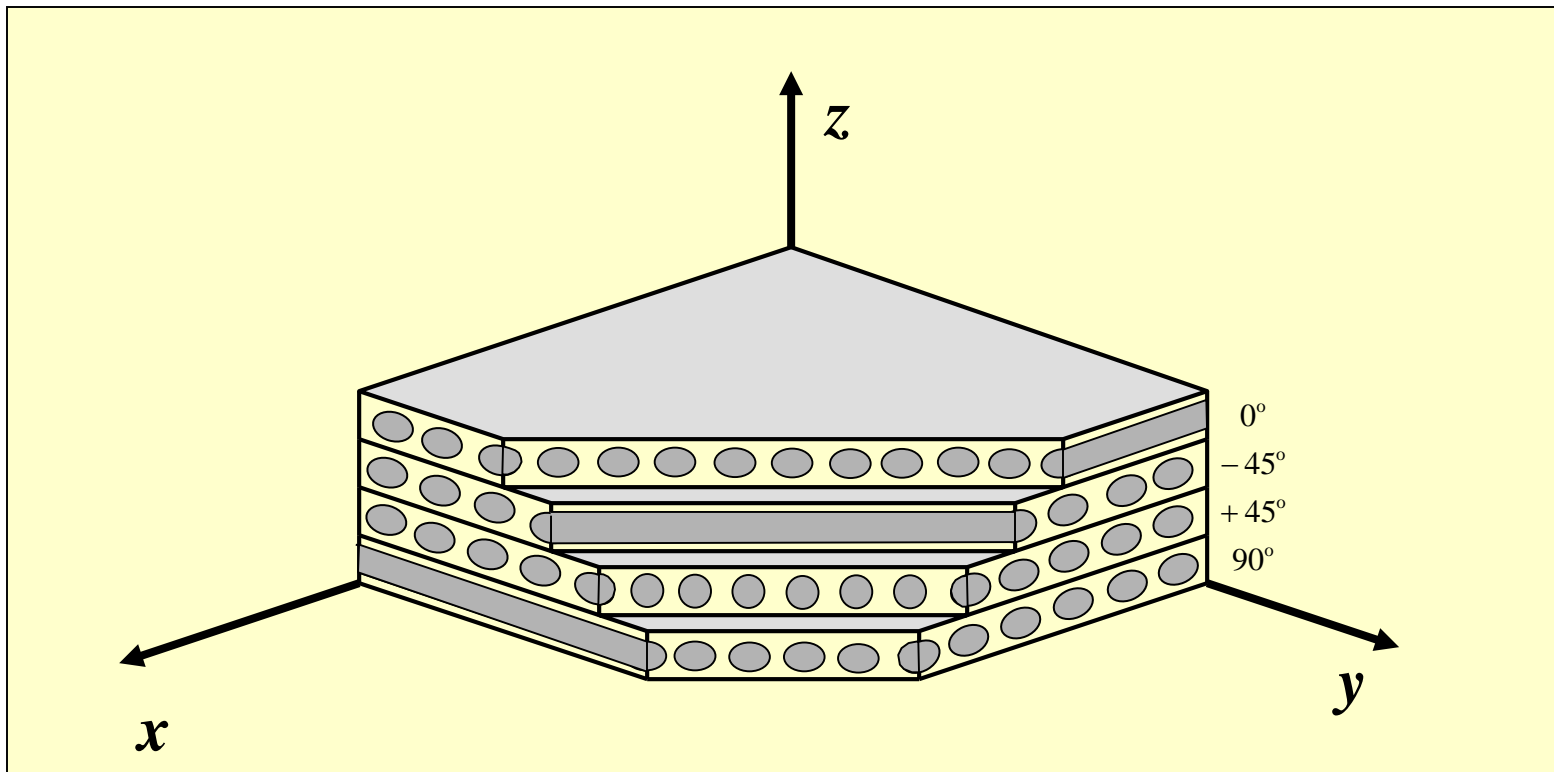
definição - compósitos laminados

- um **laminado** é constituído por duas ou mais **lâminas** empilhadas em orientações arbitrárias
- um laminado pode ser constituído de lâminas de materiais diferentes; nesse caso o laminado é chamado **laminado híbrido**



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

ângulos de laminação - exemplo





CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

descrição de um laminado - notação

- um **laminado** é descrito pelas características de cada lâmina que o compõe
- os dados necessários de cada lâmina são:
 - **material**
 - **espessura**
 - **ângulo de laminação**



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

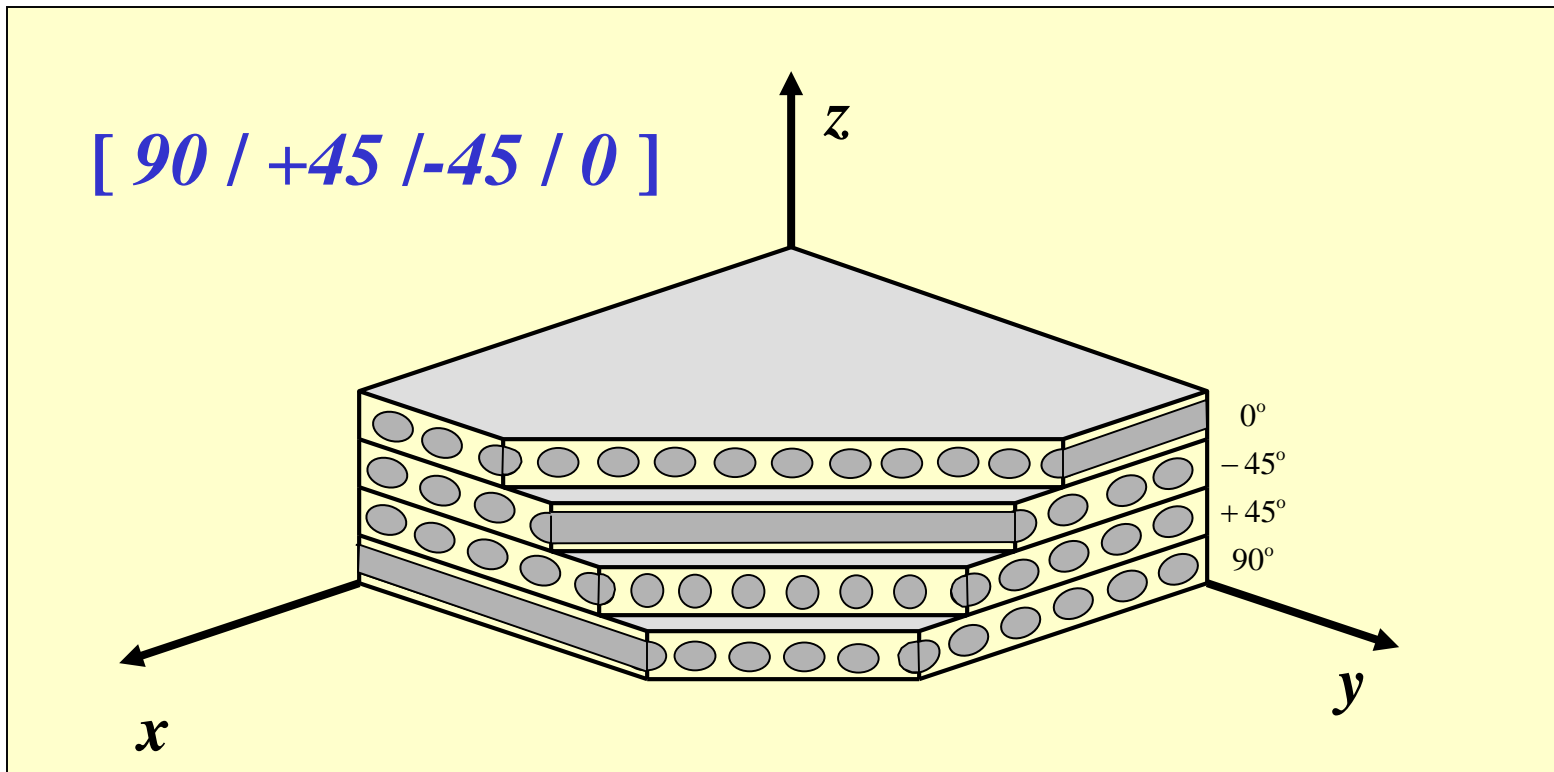
descrição de um laminado - notação

- se todas as camadas forem de mesma espessura e mesmo material, o laminado pode ser descrito pelos ângulos de laminação ordenados do fundo do laminado para o topo
- exemplo: $[90 / +45 / -45 / 0]_T$
- o subscrito “*T*” (de total) em geral é usado para indicar que todo o laminado está sendo descrito



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

descrição de um laminado - notação





CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

descrição de um laminado - notação

- um subscrito “S” pode ser usado para indicar que um laminado é simétrico; nesse caso, apenas metade das camadas precisam ser indicadas:

- exemplo:

$$[0/+45/-45]_S = [0/+45/-45 \ /-45 \ /+45/0]_T$$

$$[0/\pm 45]_S = [0/+45/-45 \ /-45 \ /+45/0]_T$$



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

descrição de um laminado - notação

- uma sobre-barra pode ser usada para indicar a camada do meio de um laminado simétrico com um número ímpar de camadas:

- exemplo:

$$[0/\overline{90}]_s = [0/90/0]_T$$

$$[\pm 45/\overline{0}]_s = [+45/-45/0/-45/+45]_T$$



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

descrição de um laminado - notação

- quando camadas repetidas aparecem, um subscrito com o número de repetições pode ser usado:
- exemplo:

$$[0_2/+45/-45/0_2]_s = [0/0/+45/-45 /0/0/0/0/-45 /+45/0/0]_T$$

$$[\pm 30]_{2s} = [30/-30/+30/-30/-30/+30/-30/30]_T$$



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

descrição de um laminado - notação

- parênteses podem ser usados para agrupar um conjunto de camadas:

- exemplo:

$$[0/(90/0)_2]_s = [0/90/0/90/0/0/90/0/90/0]_T$$

$$[0/(\pm 15)_2/0]_T = [0/\pm 15/\pm 15/0]_T = [0/+15/-15/+15/-15/0]_T$$



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

descrição de um laminado - notação

- se as camadas não forem de mesma espessura e mesmo material, então o ângulo de laminação deve vir acompanhado dessas informações
- um código em sub-escrito ou super-escrito pode ser usado para indicar o material
- exemplo: $[0^K_2/(0/90)^C/\pm 45^C]_T$
onde: C = carbono/epóxi, K = kevlar/epóxi



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

descrição de um laminado - notação

- em geral, a espessura nominal da camada é indicada pelo próprio código que indica o material
- nesse caso, basta indicar o material sendo desnecessário especificar a espessura
- exemplo: uma fita unidirecional de carbono/epóxi de um dado fabricante tem uma espessura nominal de 0,16 mm



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

descrição de um laminado - notação

- a orientação de camadas de tecido pode ser indicada pela direção do urdume ou pelas duas direções quando os ângulos forem $0/90$ ou ± 45
- exemplos:

$$[0^{CT}_2/(0,90)^{CF}]_S = [0^{CT}/0^{CT}/(0,90)^{CF}]_S$$

$$[0^{CT}/(\pm 45)^{CF}]_S = [0^{CT}/(\pm 45)^{CF}]_S$$

onde: **CT** = tape de carbono/epóxi,

CF = tecido de carbono/epóxi



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

descrição de um laminado - notação

- deve-se notar que um mesmo laminado pode ter duas representações diferentes
- exemplo: os laminados $[+45/-45]_s$ e $[-45/+45]_s$ fisicamente são o mesmo laminado; a diferença é apenas a direção do eixo z .



CLASSIFICAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS

descrição de um laminado - notação

- quando se soma um ângulo θ em todas as camadas, obtém-se o mesmo laminado descrito em um outro sistema de referência

- exemplo:

$$[0/+15/-15]_S = [0+60/+15+60/-15+60]_S = [60/+75/45]_S$$

$$[+45/-45]_S = [+45-45/-45-45]_S = [0/-90]_S = [0/90]_S$$

os laminados acima são iguais fisicamente; a única diferença é o sistema de referência



2. Tensões e deformações



2.1 Mudança de coordenadas

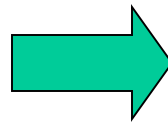


CONCEITOS BÁSICOS

tensor de tensões – notação compacta

os componentes de tensões pode ser representado como uma matriz coluna:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$



CONCEITOS BÁSICOS

tensor de tensões – cisalhamento

os componentes de cisalhamento são freqüentemente indicados pela letra τ , assim os componentes de cisalhamento são indicados por:

$$\sigma_{xy} = \tau_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = \tau_{xz}$$

$$\sigma_{yz} = \tau_{yz}$$



CONCEITOS BÁSICOS

tensor de tensões – tensão plana

- num estado de **tensão plana** os componentes de tensão normais ao plano xy são nulos ($\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_{zz} = 0$)
- o estado de tensão plana é típico de **placas finas**
- os componentes de tensão não nulos são: σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} (isto é, σ_1 , σ_2 e σ_6)



CONCEITOS BÁSICOS

tensor de tensões – mudança de coordenadas

- a representação do tensor de tensões muda quando se muda o sistema de referência
- σ_{ij} representa a tensão na face i ao longo da direção j
- quando o sistema de referência é mudado, as direções mudam e os componentes de tensão conseqüentemente mudam



CONCEITOS BÁSICOS

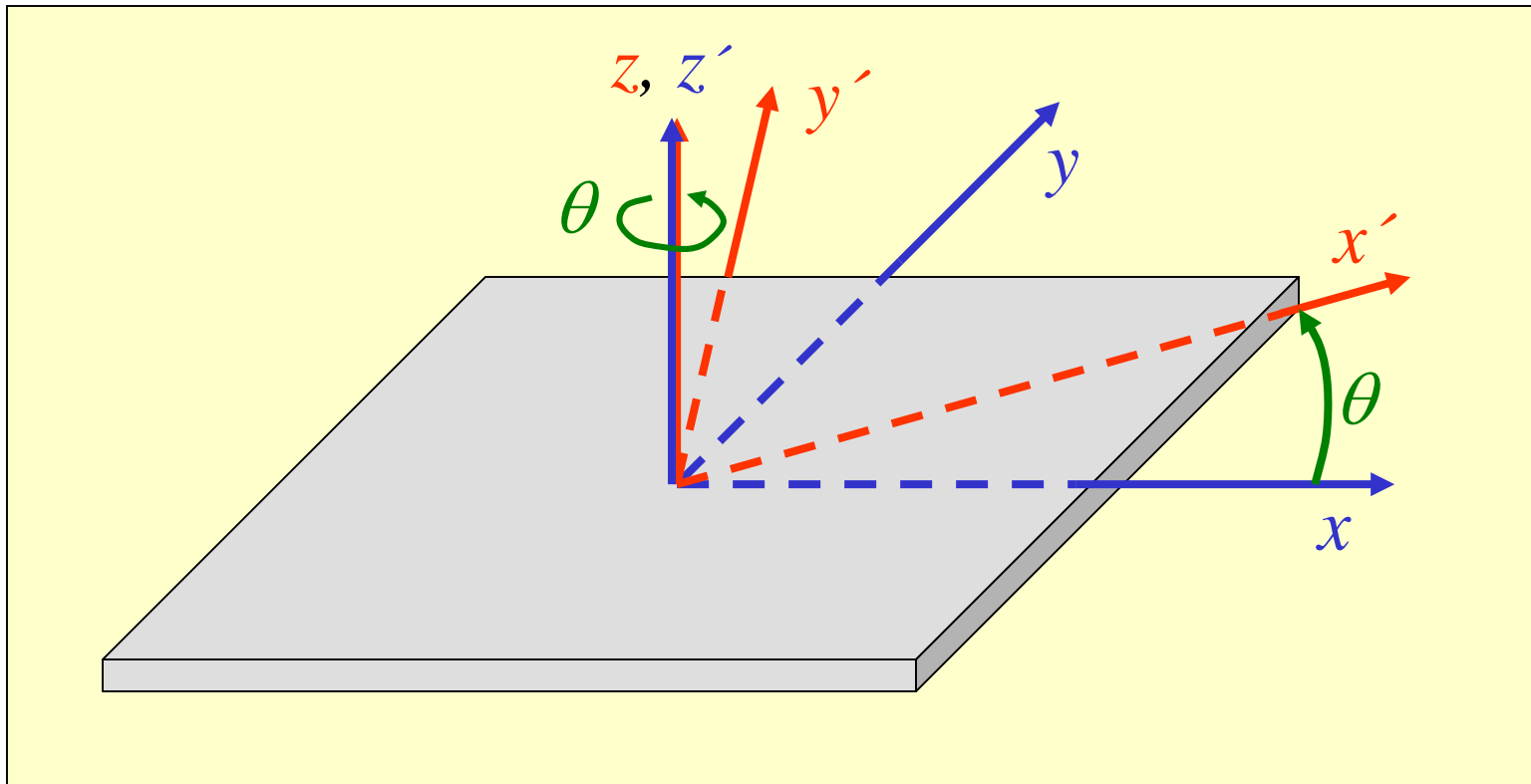
tensor de tensões – mudança de coordenadas

- as relações de mudança de coordenada do tensor de tensões são obtidas através de relações de equilíbrio de um elemento infinitesimal de volume
- para compósitos laminados, considera-se sempre o eixo z normal à placa; assim, só é de interesse calcular mudanças de coordenadas para uma rotação θ em torno do eixo z



CONCEITOS BÁSICOS

tensor de tensões – mudança de coordenadas





CONCEITOS BÁSICOS

tensor de tensões – mudança de coordenadas

a relação para mudança de coordenadas em torno do eixo z é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{z'z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

onde

$$m = \cos(\theta)$$

$$n = \sin(\theta)$$



CONCEITOS BÁSICOS

tensor de tensões – mudança de coordenadas

matriz de mudança de coordenadas $[T]$ satisfaz a relação:

$$[T(\theta)]^{-1} = [T(-\theta)]$$

o sistema de referência $x'y'z'$ é obtido por uma rotação θ em torno de z , logo o sistema xyz é obtido por uma rotação $-\theta$ em torno de z' :



CONCEITOS BÁSICOS

tensor de tensões – mudança de coordenadas

- a matriz de mudança de coordenadas $[T]$ depende apenas da orientação relativa dos sistemas de referência
- em geral, a direção x' indica a direção das fibras em uma camada



CONCEITOS BÁSICOS

a relação para mudança de coordenadas em torno do eixo z para placas finas é:

$$\{\sigma'^p\} = [T^p] \{\sigma^p\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

onde

$$m = \cos(\theta)$$

$$n = \sin(\theta)$$

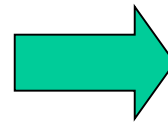


CONCEITOS BÁSICOS

deformações – notação compacta

as deformações podem ser representado como uma matriz coluna com 6 componentes

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$



$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}$$



CONCEITOS BÁSICOS

tensor de deformações

as deformações de cisalhamento de engenharia são o dobro das deformações tensoriais de cisalhamento:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

onde:

u = deslocamento ao longo de x

v = deslocamento ao longo de y

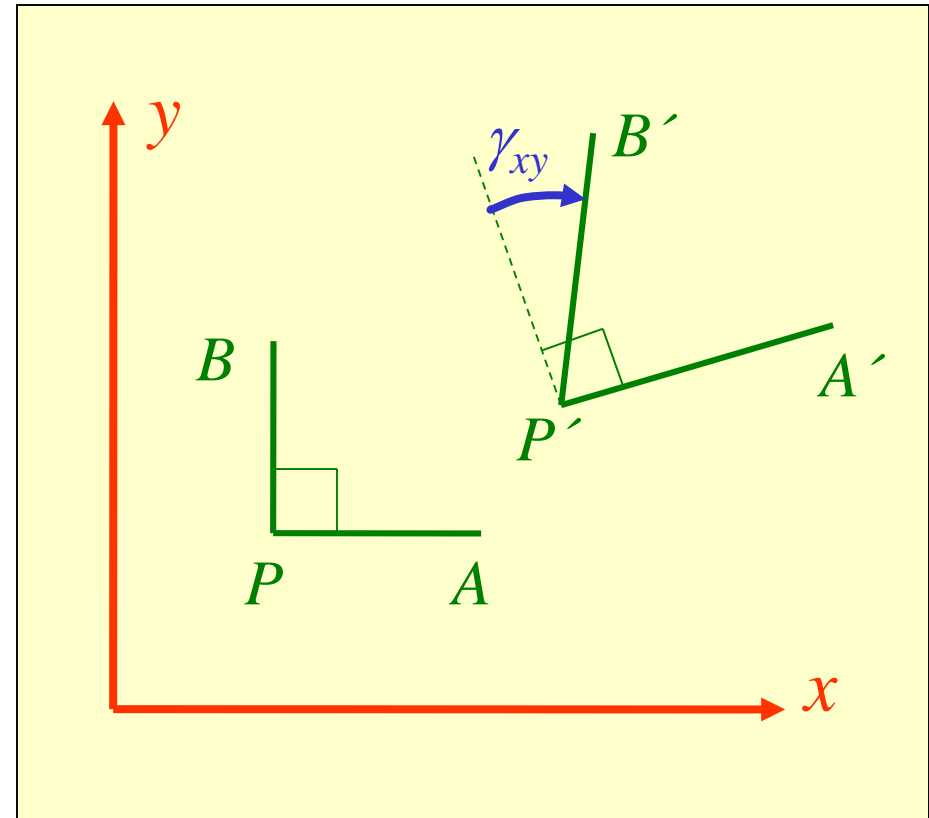
w = deslocamento ao longo de z



CONCEITOS BÁSICOS

tensor de deformações

significado físico da
deformação de
cisalhamento de
engenharia





CONCEITOS BÁSICOS

deformações – mudança de coordenadas

- a representação do tensor de deformações muda quando se muda o sistema de referência
- quando o sistema de referência é mudado, as direções mudam e os componentes de deformação conseqüentemente mudam



CONCEITOS BÁSICOS

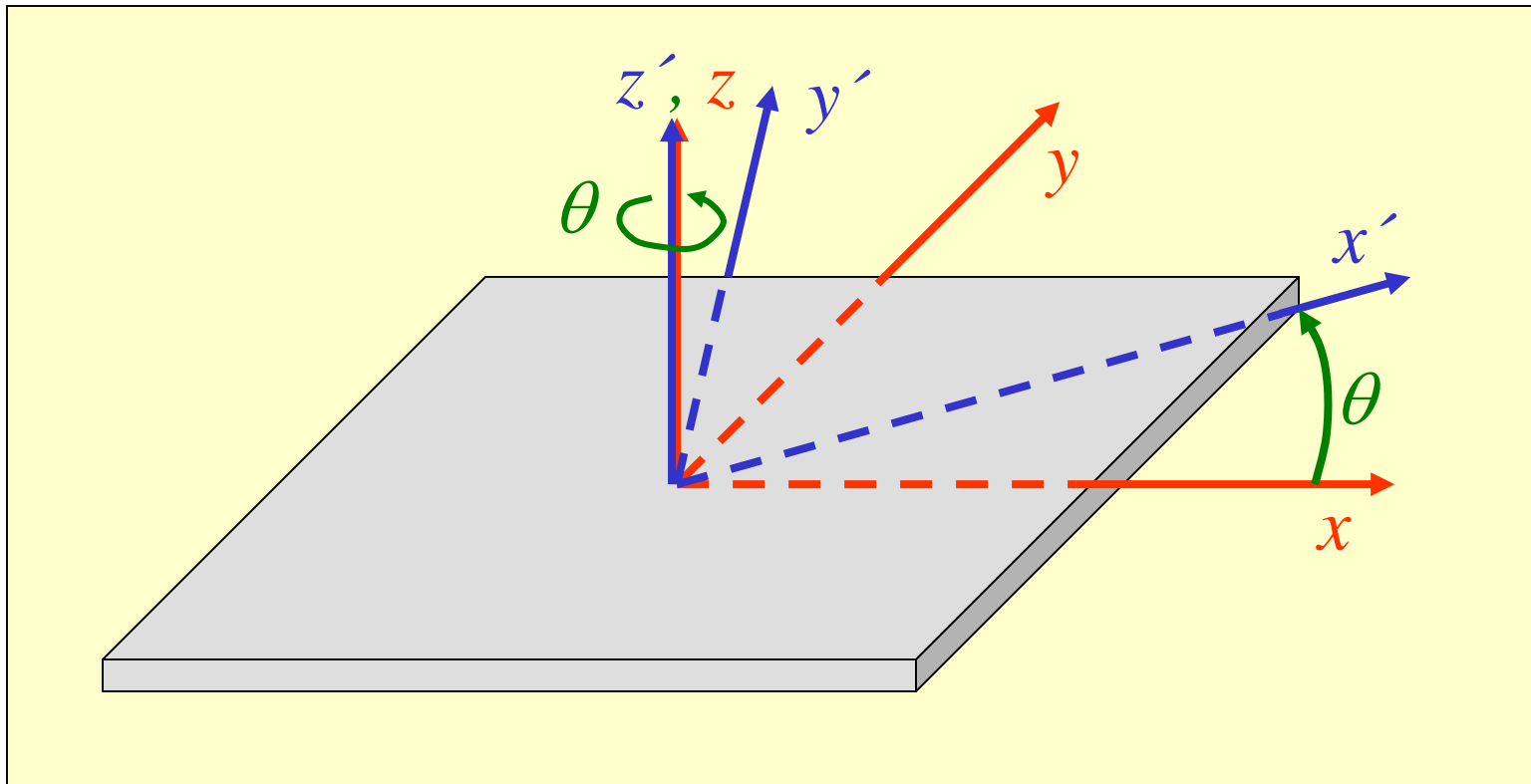
deformações – mudança de coordenadas

- as relações de mudança de coordenada do tensor de deformações são obtidas através de relações geométricas de um elemento infinitesimal de volume
- para compósitos laminados, considera-se sempre o eixo z normal à placa; assim, só é de interesse calcular mudanças de coordenadas para uma rotação θ em torno do eixo z



CONCEITOS BÁSICOS

deformações – mudança de coordenadas





CONCEITOS BÁSICOS

deformações – mudança de coordenadas

a relação para mudança de coordenadas em torno do eixo z tem a mesma forma que a relação para tensões:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ \gamma_{y'z'} / 2 \\ \gamma_{x'z'} / 2 \\ \gamma_{x'y'} / 2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} / 2 \\ \gamma_{xz} / 2 \\ \gamma_{xy} / 2 \end{Bmatrix}$$

onde

$$m = \cos(\theta)$$

$$n = \sin(\theta)$$



CONCEITOS BÁSICOS

deformações – mudança de coordenadas

- a matriz de mudança de coordenadas $[T]$ depende apenas da orientação relativa dos sistemas de referência
- em geral, a direção x' indica a direção das fibras em uma camada



CONCEITOS BÁSICOS

a relação para mudança de coordenadas em torno do eixo z para placas finas é:

$$\{\varepsilon'^p\} = [T^p] \{\varepsilon^p\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \gamma_{x'y'} / 2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} / 2 \end{Bmatrix}$$

onde

$$m = \cos(\theta)$$

$$n = \sin(\theta)$$



CONCEITOS BÁSICOS

portanto:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$



2.2 Relações tensão deformação no plano



RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO

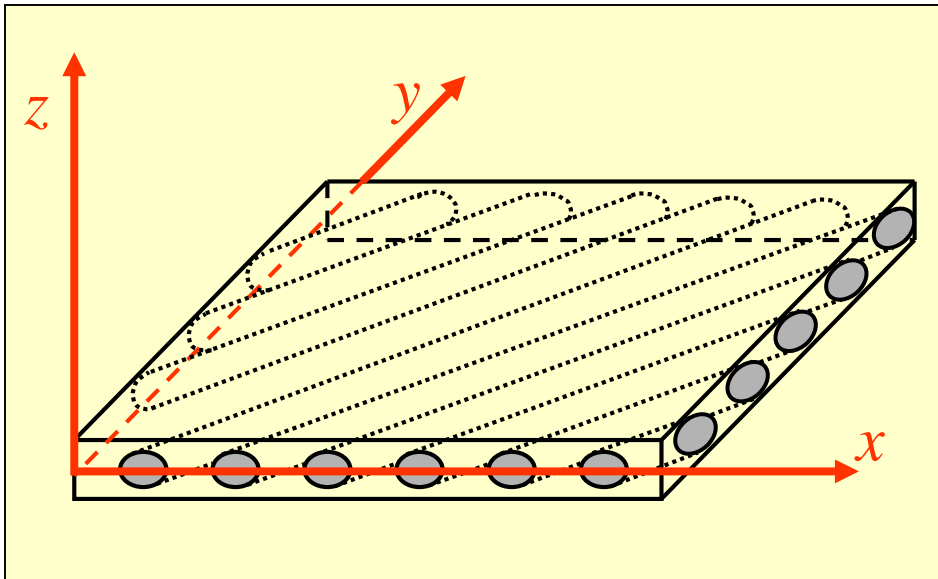
materiais com planos de simetria

- se o material for simétrico em relação a um dos planos do sistema de referência, então a relação tensão deformação **nesse sistema de referência** é simplificada
- quando o material é simétrico em relação ao plano xy (isto é, o plano médio é um plano de simetria) o material é dito monoclinico ou **geralmente ortotrópico**



RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO

materiais com planos de simetria



- o material **é simétrico em relação ao plano xy** (simétrico em relação ao plano médio da lâmina)
- o material **não é simétrico em relação aos planos xz ou yz**



RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO

materiais com planos de simetria

- a simetria faz com que algumas constantes elásticas sejam obrigatoriamente nulas simplificando a relação tensão deformação
- isso ocorre para as constantes que acoplam tensões normais com deformações de cisalhamento



RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO

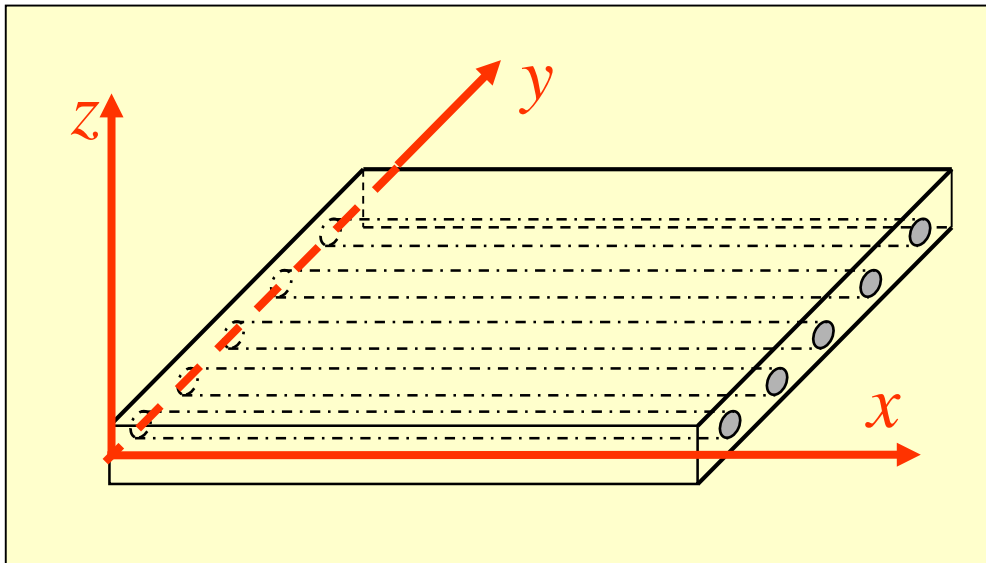
materiais com planos de simetria

- quando o material é simétrico em relação aos três planos do sistema de referência o material é dito **especialmente ortotrópico**
- quando o material é simétrico em relação a dois planos do sistema de referência, então obrigatoriamente ele é simétrico ao terceiro



RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO

materiais com planos de simetria



o material é
simétrico em relação
aos plano xy , xz e yz



RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO

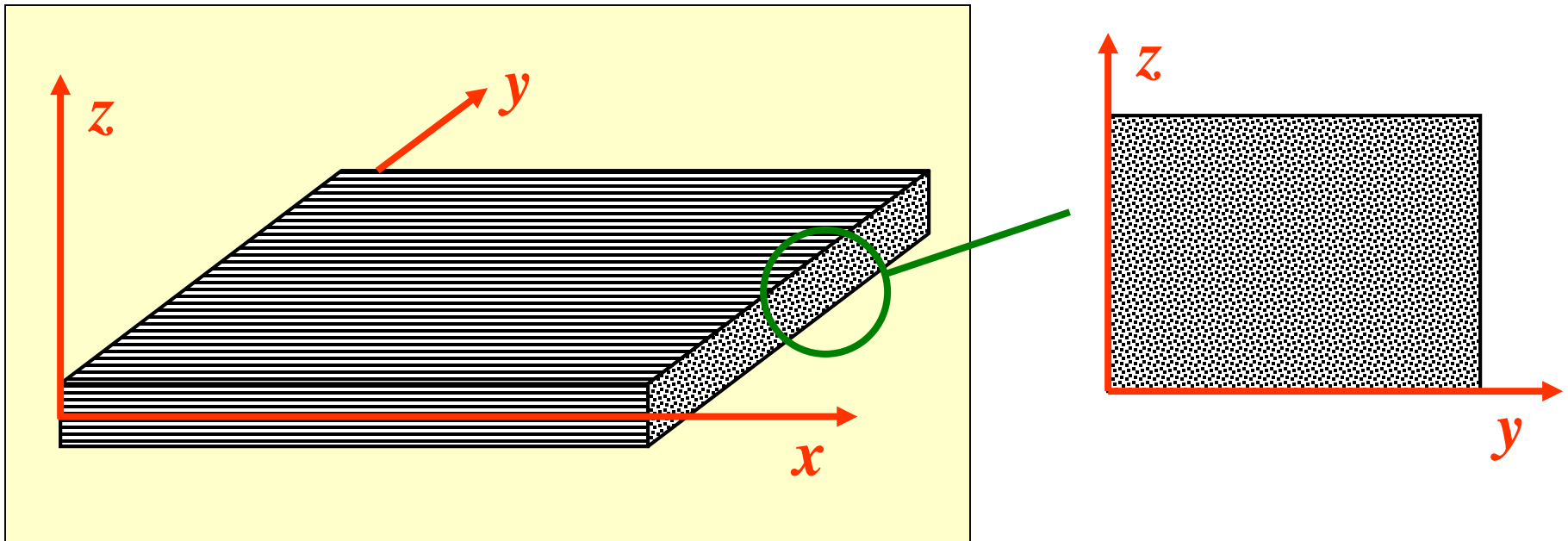
materiais com planos de simetria

- um material é chamado de **transversalmente isotrópico** quando as propriedades elásticas em um plano são independentes da orientação
- uma lâmina unidirecional, **com o sistema de referência coincidente com as direções principais do material**, se enquadra nessa definição



RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO

materiais transversalmente isotrópicos



o material é isotrópico no plano yz



RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO

materiais transversalmente isotrópicos

- a relação tensão deformação para um material transversalmente isotrópico contém **cinco constantes elásticas independentes**
- essas constantes elásticas são obtidas a partir de ensaios mecânicos do material



RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO

Para materiais especialmente ortotrópicos a relação tensão deformação no plano é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}$$



RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO

materiais isotrópicos

- um material é chamado de **isotrópico** quando as propriedades elásticas em qualquer plano são independentes da orientação
- a relação tensão deformação para esse material pode ser obtida repetindo-se o procedimento anterior para os três planos do sistema de referência



RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO

matriz de flexibilidade

até o momento, as tensões foram escritas em termos das deformações:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad \text{onde } [C] \text{ é a matriz de rigidez do material}$$

em algumas situações (como será visto a seguir) é vantajoso escrever as deformações em termos das tensões:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad \text{onde } [S] = [C]^{-1} \text{ é a matriz de flexibilidade do material}$$



3. Constantes de engenharia



3.1 Definições



DEFINIÇÕES

- **constantes de engenharia são constantes elásticas de um material**
- **elas são constantes independentes e podem ser usadas para determinar a matriz de rigidez ou flexibilidade de um material**
- **as constantes de engenharia podem ser medidas através de experimentos padronizados**



DEFINIÇÕES

- **as constantes de engenharia representam uma forma intuitiva de se especificar as constantes elásticas**
- **os conceitos de módulo de Young e quociente de Poisson são bem conhecidos em engenharia**
- **materiais anisotrópicos requerem a definição de algumas constantes de engenharia novas**



DEFINIÇÕES

- o número de constantes de engenharia independentes a ser usado é igual ao número de constantes elásticas independentes do material

Tipo de material	N
Geralmente ortotrópico	13
Especialmente ortotrópico	9
Transversalmente isotrópico	5
Especialmente ortotrópico com tensão plana	4



DEFINIÇÕES

- as constantes de engenharia são sempre definidas para um carregamento uniaxial, isto é, apenas uma das componentes de tensão é não nula
- portanto, como será visto a seguir, é mais fácil associar as constantes de engenharia com os elementos da matriz de flexibilidade do material do que com os elementos da matriz de rigidez do material



DEFINIÇÕES

para materiais especialmente ortotrópicos, só há necessidade de se definir três tipos de constantes de engenharia:

- **módulo de Young (ou módulo de elasticidade)**
- **módulo de cisalhamento**
- **quociente de Poisson**



DEFINIÇÕES

- o módulo de elasticidade E_{ii} é definido por:

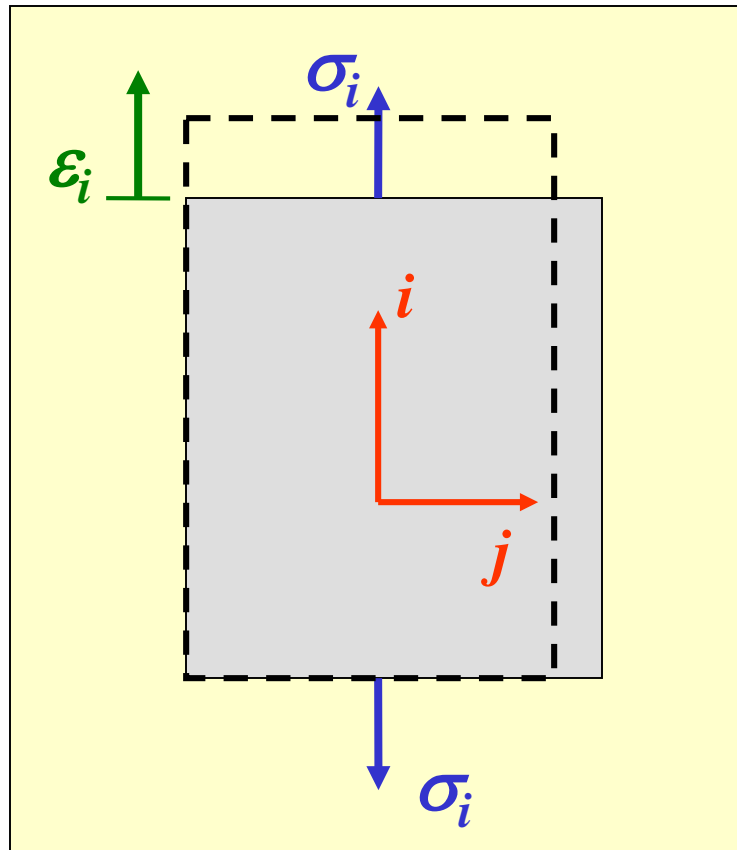
$$E_{ii} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$$

onde:

- o material está sujeito a um estado uniaxial de tensão normal σ_i ao longo da direção i
- ε_i é a deformação normal ao longo da direção i



DEFINIÇÕES



módulo de elasticidade normal E_{ii} :

$$E_{ii} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$$



DEFINIÇÕES

- o módulo de cisalhamento G_{ij} é definido por:

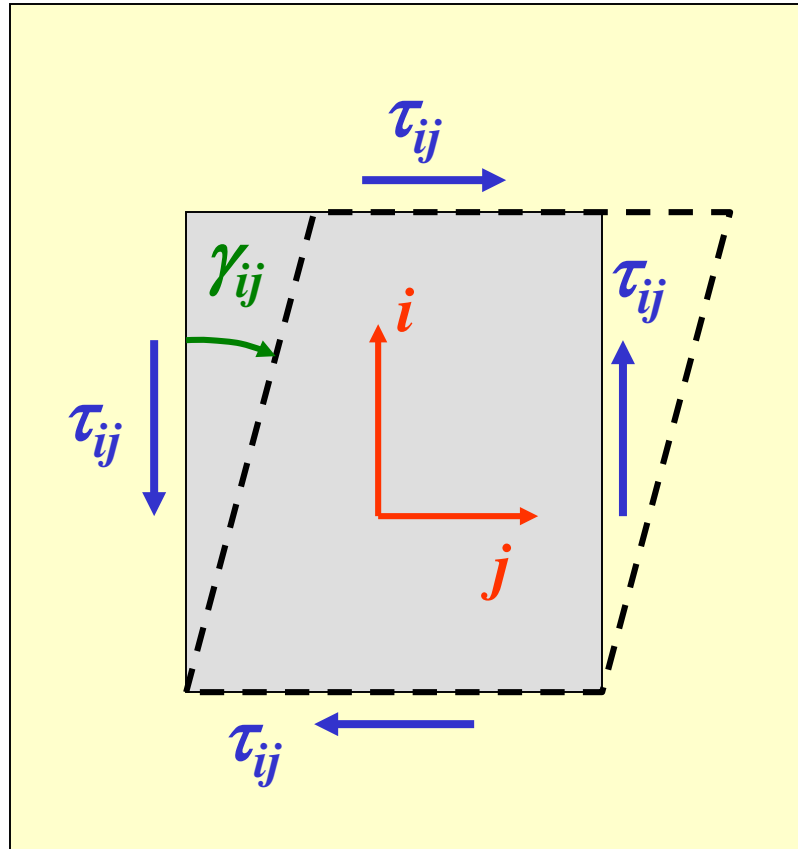
$$G_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}}$$

onde:

- o material está sujeito a um estado uniaxial de tensão de cisalhamento τ_{ij} no plano ij
- γ_{ij} é a deformação de cisalhamento no plano ij



DEFINIÇÕES



módulo de elasticidade de cisalhamento G_{ij} :

$$G_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}}$$



DEFINIÇÕES

- o quociente de Poisson ν_{ij} é definido por :

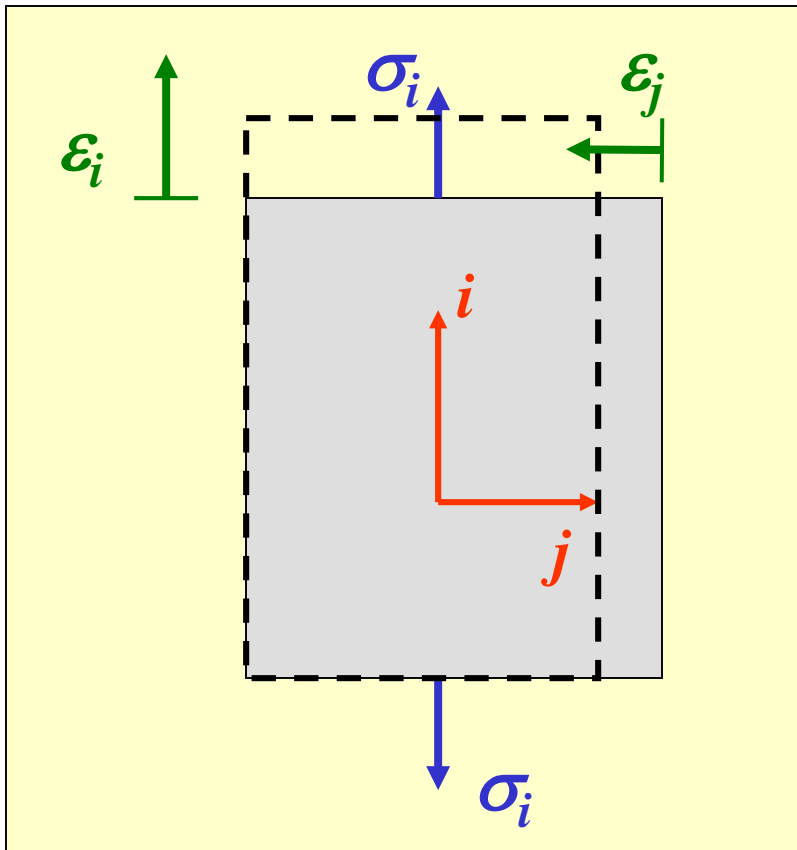
$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$$

onde:

- o material está sujeito a um estado uniaxial de tensão ao longo da direção i
- ε_i e ε_j são as deformações normais ao longo das direções i e j , respectivamente



DEFINIÇÕES



quociente de Poisson ν_{ij} :

$$\nu_{ij} = - \frac{\epsilon_j}{\epsilon_i}$$



3.2 Matriz de Flexibilidade



MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

material especialmente ortotrópico

- a matriz de flexibilidade para um material especialmente ortotrópico no plano é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix}$$



MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

• para se determinar os elementos da matriz de flexibilidade no plano em termos das constantes de engenharia, serão considerados os três carregamentos uniaxiais possíveis

1 Extensão longitudinal no plano ($\sigma_1 \neq 0$)

2 Extensão transversal no plano ($\sigma_2 \neq 0$)

6 Cisalhamento no plano ($\tau_6 \neq 0$)



MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

matriz de flexibilidade no plano em termos de constantes de engenharia

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix}$$



MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

matriz de flexibilidade

- na equação anterior há 5 constantes de engenharia:

E_1 módulo de elasticidade longitudinal

E_2 módulo de elasticidade transversal

G_{12} módulo de cisalhamento no plano (12)

2 quocientes de Poisson: ν_{12} , ν_{21}



MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

matriz de flexibilidade

- da simetria da matriz de flexibilidade:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$$

- portanto há um total de 4 constantes de engenharia independentes para um material especialmente ortotrópico
(5 constantes – 1 restrição)



MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

quocientes de Poisson

- em uma lâmina unidirecional, $E_1 \gg E_2$
- então:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \longrightarrow \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad \longrightarrow \quad \nu_{21} \ll \nu_{12}$$

- deve-se notar que ν_{ij} é diferente de ν_{ji} e que os valores podem ser muito diferentes
- em geral, o valor de ν_{21} não é medido (só ν_{12})



3.3 Matriz de rigidez para tensão plana



MATRIZ DE RIGIDEZ

matriz de rigidez para tensão plana

- os elementos da matriz de rigidez do material podem ser determinados em função das constantes de engenharia invertendo-se a matriz de flexibilidade

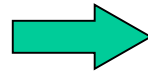


MATRIZ DE RIGIDEZ

para o cálculo das matrizes de $[Q^p]$ para uma lâmina fina:

$$[Q^p] = [S^p]^{-1}$$

$$[S^p] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$



$$[Q^p] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$



3.4 Termos de acoplamento



TERMOS DE ACOPLAMENTO

relação tensão-deformação

- a relação tensão deformação para o material no sistema de coordenadas arbitrário xyz é:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{xs} & S_{ys} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}$$

- note que, ao contrário do que acontece nos eixos principais do material, os termos S_{xs} e S_{ys} são não nulos



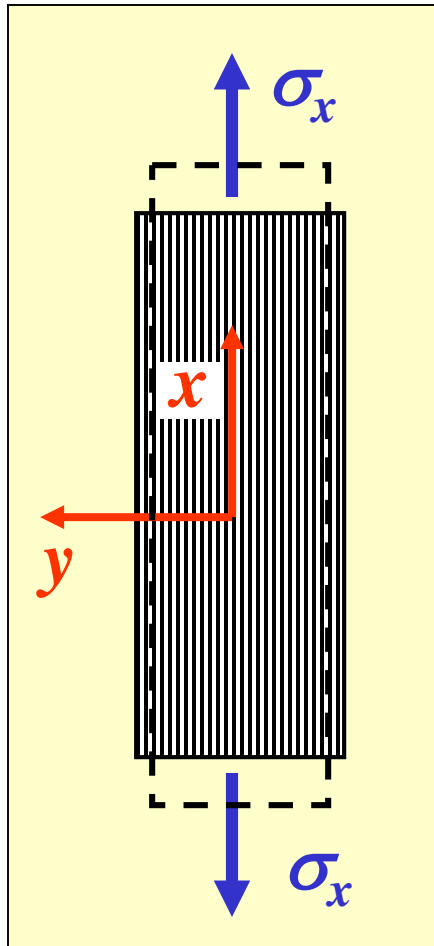
TERMOS DE ACOPLAMENTO

relação tensão-deformação

- os termos S_{xs} e S_{ys} representam um **acoplamento elástico** entre tensões normais e deformações de cisalhamento
- isto é, ao se aplicar uma tensão normal σ_x o material sofre deformações normais $\varepsilon_x = S_{xx} \sigma_x$ e $\varepsilon_y = S_{xy} \sigma_x$ e deformação de cisalhamento $\gamma_s = S_{xs} \sigma_x$
- resultado análogo é obtido para carregamento com tensão normal σ_y



TERMOS DE ACOPLAMENTO

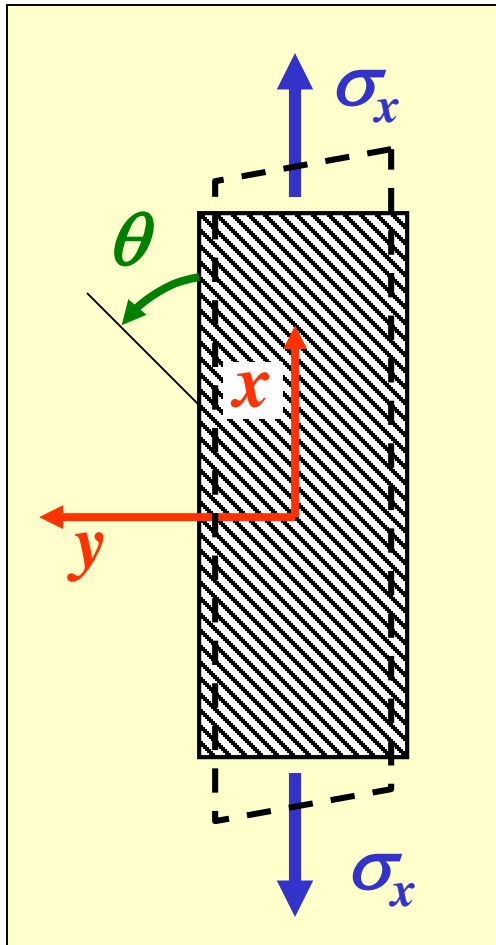


material especialmente ortotrópico:

- o sistema de referência xy coincide com as direções principais da lâmina 12
- os termos de acoplamento S_{xs} e S_{ys} são nulos
- só há deformações normais
- a deformação de cisalhamento é nula



TERMOS DE ACOPLAMENTO



material geralmente ortotrópico:

- o sistema de referência xy não coincide com as direções principais da lâmina 12
- os termos de acoplamento S_{xs} e S_{ys} não são nulos
- há deformações normais
- a deformação de cisalhamento não é nula
- ensaio de difícil realização prática

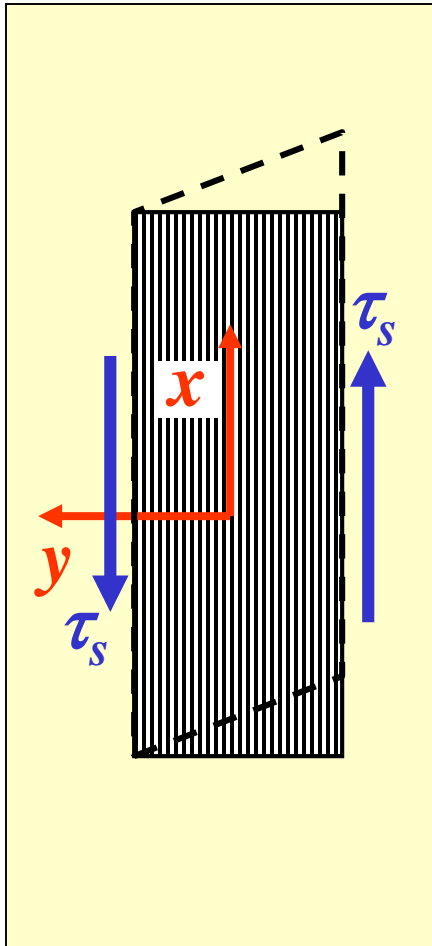


TERMOS DE ACOPLAMENTO relação tensão-deformação

- os termos S_{xs} e S_{ys} também representam um **acoplamento elástico** entre tensões de cisalhamento e deformações normais
- isto é, ao se aplicar uma tensão τ_s o material sofre deformações normais $\epsilon_x = S_{xs} \tau_s$ e $\epsilon_y = S_{ys} \tau_s$ além da deformação de cisalhamento $\gamma_s = S_{ss} \tau_s$



TERMOS DE ACOPLAMENTO

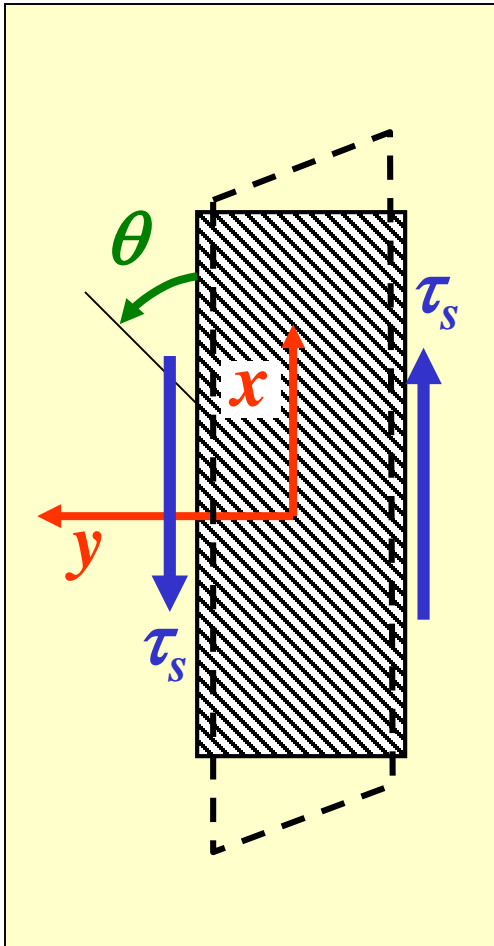


material especialmente ortotrópico:

- o sistema de referência xy coincide com as direções principais da lâmina 12
- os termos de acoplamento S_{xs} e S_{ys} são nulos
- não há deformações normais
- a deformação de cisalhamento não é nula



TERMOS DE ACOPLAMENTO



material geralmente ortotrópico:

- o sistema de referência xy não coincide com as direções principais da lâmina 12
- os termos de acoplamento S_{xs} e S_{ys} não são nulos
- há deformações normais
- a deformação de cisalhamento não é nula
- ensaio de difícil realização prática



TERMOS DE ACOPLAMENTO **relação tensão-deformação**

- os termos de acoplamento S_{xs} e S_{ys} não podem ser definidos em termos das constantes elásticas definidas anteriormente (módulos de elasticidade, módulos de cisalhamentos e quocientes de Poisson)
- para representá-los é necessário definir novas constantes de engenharia denominadas coeficientes de influência mútua



TERMOS DE ACOPLAMENTO coeficientes de influência mútua

- o coeficiente de influência mútua do primeiro tipo, $\eta_{ij,i}$ caracteriza a razão entre deformação normal na direção i pela deformação de cisalhamento no plano ij quando o material está sujeito a um estado de tensões onde a única componente não nula de tensão é a tensão de cisalhamento no plano ij
- os coeficientes de influência mútua são similares aos quocientes de Poisson



TERMOS DE ACOPLAMENTO

- o coeficiente de influência mútua do primeiro tipo, $\eta_{ij,i}$ é definido por:

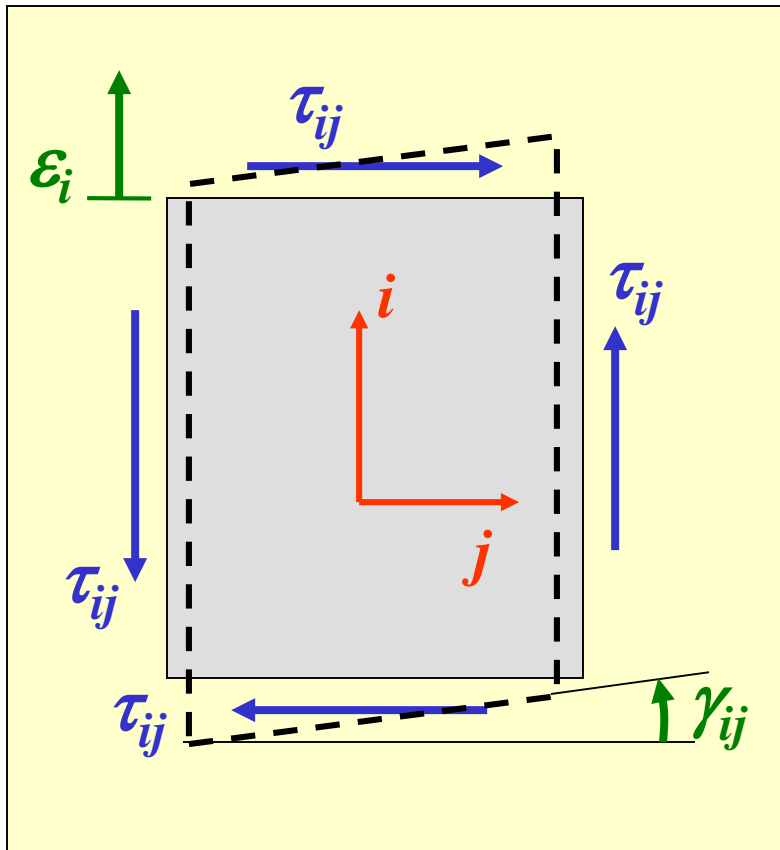
$$\eta_{ij,i} = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_{ij}}$$

- o material está sujeito a um estado uniaxial de tensão de cisalhamento τ_{ij} no plano ij
- ε_i é a deformação normal ao longo da direção i
- γ_{ij} é a deformação de cisalhamento no plano ij



TERMOS DE ACOPLAMENTO

coeficientes de influência mútua



coeficiente de influência mútua do primeiro tipo, $\eta_{ij,i}$:

$$\eta_{ij,i} = \frac{\epsilon_i}{\gamma_{ij}}$$



TERMOS DE ACOPLAMENTO coeficientes de influência mútua

- o coeficiente de influência mútua do segundo tipo, $\eta_{i,ij}$ caracteriza a razão entre deformação de cisalhamento no plano ij pela deformação normal na direção i quando o material está sujeito a um estado de tensões onde a única componente não nula de tensão é a tensão normal na direção i
- os coeficientes de influência mútua são similares aos quocientes de Poisson



TERMOS DE ACOPLAMENTO

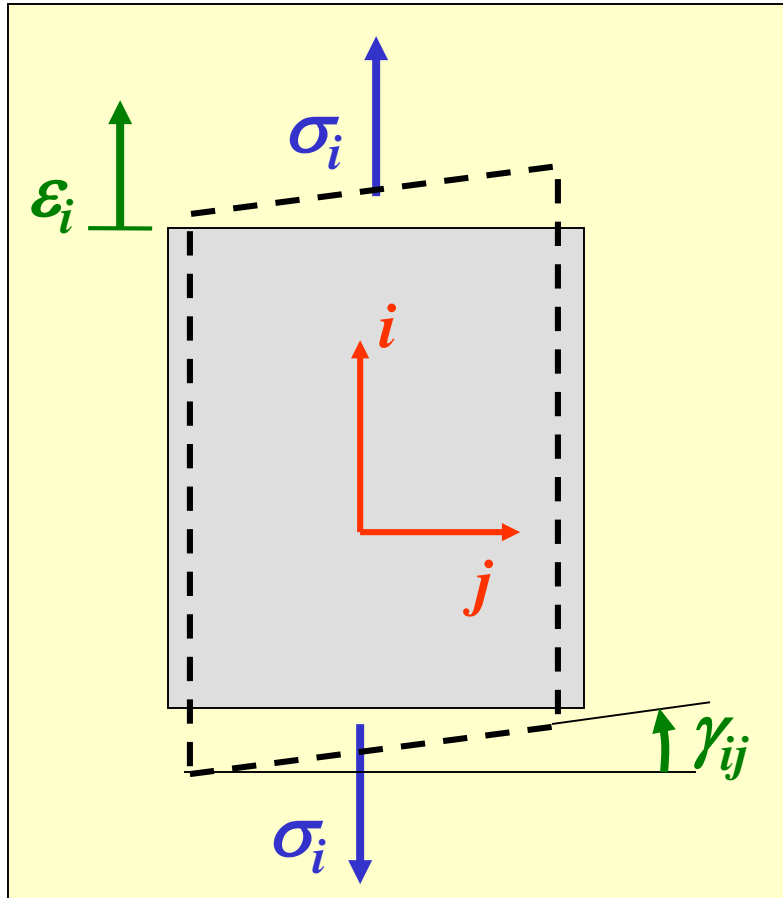
- o coeficiente de influência mútua do segundo tipo, $\eta_{i,ij}$ é definido por:

$$\eta_{i,ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\varepsilon_i}$$

- o material está sujeito a um estado uniaxial de tensão normal σ_i
- ε_i é a deformação normal ao longo da direção i
- γ_{ij} é a deformação de cisalhamento no plano ij



TERMOS DE ACOPLAMENTO



coeficiente de
influência mútua
do segundo tipo,
 $\eta_{i,ij}$:

$$\eta_{i,ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\epsilon_i}$$



4. Mudança de coordenadas para lâminas finas



TERMOS DE ACOPLAMENTO

matriz de flexibilidade

considerando todos componentes de tensões:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

para uma lâmina fina, $\sigma_z = 0$ apenas as tensões no plano são consideradas:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}$$



TERMOS DE ACOPLAMENTO

matriz de flexibilidade

- em termos de constantes elásticas a matriz de flexibilidade fica:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{xs}}{E_x} & \frac{\eta_{ys}}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}$$



TERMOS DE ACOPLAMENTO

matriz de flexibilidade

- da simetria da matriz de flexibilidade resultam as relações:

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y}$$

$$\frac{\eta_{xs}}{E_x} = \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}}$$

$$\frac{\eta_{ys}}{E_y} = \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}}$$



TERMOS DE ACOPLAMENTO

matriz de flexibilidade

- no sistema de referência principal:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix}$$



TERMOS DE ACOPLAMENTO

matriz de flexibilidade

- invertendo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}$$



TERMOS DE ACOPLAMENTO

matriz de flexibilidade

mas:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = [Q^p] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}$$



$$Q_{11}^p = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$
$$Q_{12}^p = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$
$$Q_{22}^p = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$
$$Q_{66}^p = G_{12}$$



LÂMINAS FINAS

para uma lâmina fina geralmente ortotrópica, a relação tensão-deformação no plano é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = [T^p]^{-1} [Q^p] [T^p]^{-T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}$$

$$[T^p]^{-T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}$$

$$[T^p]^{-1} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}$$



MUDANÇA DE COORDENADAS

relação tensão-deformação para o plano

calculando-se os elementos da matriz tensão
deformação para o plano xy obtém-se:

$$Q_{xx} = m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66}$$

$$Q_{yy} = n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66}$$

$$Q_{xy} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66}$$

$$Q_{ss} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 Q_{66}$$

$$Q_{xs} = m^3 n Q_{11} - m n^3 Q_{22} + (m n^3 - m^3 n) Q_{12} + 2(m n^3 - m^3 n) Q_{66}$$

$$Q_{ys} = m n^3 Q_{11} - m^3 n Q_{22} + (m^3 n - m n^3) Q_{12} + 2(m^3 n - m n^3) Q_{66}$$



MUDANÇA DE COORDENADAS

relação tensão-deformação

$$\begin{array}{l} \cos(\theta) = \cos(-\theta) \\ \sin(\theta) = -\sin(-\theta) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} m(\theta) = m(-\theta) \\ n(\theta) = -n(-\theta) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Q_{xx}(\theta) = Q_{xx}(-\theta) \\ Q_{yy}(\theta) = Q_{yy}(-\theta) \\ Q_{xy}(\theta) = Q_{xy}(-\theta) \\ Q_{ss}(\theta) = Q_{ss}(-\theta) \end{array}$$

termos que são
funções pares de θ

$$\begin{array}{l} Q_{xs}(\theta) = -Q_{xs}(-\theta) \\ Q_{ys}(\theta) = -Q_{ys}(-\theta) \end{array}$$

termos que são
funções ímpares de θ



MUDANÇA DE COORDENADAS

relação tensão-deformação

exemplo: matriz de rigidez para uma lâmina a 90°

$$\theta = 90^\circ$$



$$m = 0$$

$$n = 1$$

$$Q_{xx} = m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66}$$

$$Q_{yy} = n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66}$$

$$Q_{xy} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66}$$

$$Q_{ss} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 Q_{66}$$



$$Q_{xx} = Q_{22}$$

$$Q_{yy} = Q_{11}$$

$$Q_{xy} = Q_{12}$$

$$Q_{ss} = Q_{66}$$

$$Q_{xs} = m^3 n Q_{11} - mn^3 Q_{22} + (mn^3 - m^3 n) Q_{12} + 2(mn^3 - m^3 n) Q_{66}$$

$$Q_{ys} = mn^3 Q_{11} - m^3 n Q_{22} + (m^3 n - mn^3) Q_{12} + 2(m^3 n - mn^3) Q_{66}$$



$$Q_{xs} = 0$$

$$Q_{ys} = 0$$



MUDANÇA DE COORDENADAS

relação tensão-deformação

matriz de rigidez para
uma lâmina a 90°

$$[\bar{Q}^p]_{\theta=90^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

matriz de rigidez para
uma lâmina a 0°

$$[\bar{Q}^p]_{\theta=0^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

- uma rotação de $\theta = 90^\circ$ corresponde a uma troca dos índices 1 e 2 na matriz de rigidez da lâmina



MUDANÇA DE COORDENADAS

relação tensão-deformação

$$\theta = 90^\circ$$



$$m = 0$$

$$n = 1$$

$$Q_{xz, xz} = m^2 Q_{55} + n^2 Q_{44}$$

$$Q_{yz, yz} = n^2 Q_{55} + m^4 Q_{44}$$

$$Q_{xz, yz} = mn(Q_{55} - Q_{44})$$



$$Q_{xz, xz} = Q_{44}$$

$$Q_{yz, yz} = Q_{55}$$

$$Q_{xz, yz} = 0$$

$$[\bar{Q}^t]_{\theta=90^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{Q}^t]_{\theta=0^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix}$$

uma rotação de $\theta = 90^\circ$ corresponde a uma troca dos índices 4 e 5



FLEXIBILIDADE: MUDANÇA DE COORDENADAS

matriz de flexibilidade

os elementos da matriz $[S]$ no plano são:

$$S_{xx} = m^4 S_{11} + n^4 S_{22} + 2m^2 n^2 S_{12} + m^2 n^2 S_{66}$$

$$S_{yy} = n^4 S_{11} + m^4 S_{22} + 2m^2 n^2 S_{12} + m^2 n^2 S_{66}$$

$$S_{xy} = m^2 n^2 S_{11} + m^2 n^2 S_{22} + (m^4 + n^4) S_{12} - m^2 n^2 S_{66}$$

$$S_{ss} = 4m^2 n^2 S_{11} + 4m^2 n^2 S_{22} - 8m^2 n^2 S_{12} + (m^2 - n^2)^2 S_{66}$$

$$S_{xs} = 2m^3 n S_{11} - 2mn^3 S_{22} + 2(mn^3 - m^3 n) S_{12} + (mn^3 - m^3 n) S_{66}$$

$$S_{ys} = 2mn^3 S_{11} - 2m^3 n S_{22} + 2(m^3 n - mn^3) S_{12} + (m^3 n - mn^3) S_{66}$$



5. Transformação para constantes de engenharia



TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA

mudança de coordenadas

os elementos da matriz $[\bar{S}]$ foram obtidos como:

$$S_{xx} = V_E + V_\Delta \cos(2\theta) + V_\nu \cos(4\theta)$$

$$S_{yy} = V_E - V_\Delta \cos(2\theta) + V_\nu \cos(4\theta)$$

$$S_{xy} = V_E - 2V_G - V_\nu \cos(4\theta)$$

$$S_{ss} = 4V_G - 4V_\nu \cos(4\theta)$$

$$S_{xs} = V_\Delta \sin(2\theta) + 2V_\nu \sin(4\theta)$$

$$S_{ys} = V_\Delta \sin(2\theta) - 2V_\nu \sin(4\theta)$$

$$V_E = \frac{3S_{11} + 3S_{22} + 2S_{12} + S_{66}}{8}$$

$$V_G = \frac{S_{11} + S_{22} - 2S_{12} + S_{66}}{8}$$

$$V_\Delta = \frac{S_{11} - S_{22}}{2}$$

$$V_\nu = \frac{S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}}{8}$$



TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA

mudança de coordenadas

substituindo as expressões para os elementos da matriz $[S]$ em termos das constantes de engenharia:

$$S_{xx} = \frac{1}{E_x} = V_E + V_\Delta \cos(2\theta) + V_\nu \cos(4\theta)$$
$$S_{yy} = \frac{1}{E_y} = V_E - V_\Delta \cos(2\theta) + V_\nu \cos(4\theta)$$
$$S_{xy} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = V_E - 2V_G - V_\nu \cos(4\theta)$$
$$S_{ss} = \frac{1}{G_{xy}} = 4V_G - 4V_\nu \cos(4\theta)$$



TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA

mudança de coordenadas

- pode-se plotar a variação das constantes de engenharia em função do ângulo de laminação da camada
- a seguir são apresentados gráficos das constantes de engenharia para uma lâmina unidirecional de carbono/epóxi típica

$$E_1 = 142 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 10.3 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.27$$

$$\nu_{21} = 0.0196$$

$$G_{12} = 7.2 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = 7.2 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 3.7 \text{ GPa}$$



TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA

mudança de coordenadas

- calculando-se as constantes S_{ij} :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} = 0.00704 \text{ GPa}^{-1}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} = 0.09709 \text{ GPa}^{-1}$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -0.00190 \text{ GPa}^{-1}$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}} = 0.13889 \text{ GPa}^{-1}$$

$$S_{55} = \frac{1}{G_{13}} = 0.13889 \text{ GPa}^{-1}$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}} = 0.27027 \text{ GPa}^{-1}$$



TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA

mudança de coordenadas

- calculando-se as constantes V_i :

$$V_E = \frac{3S_{11} + 3S_{22} + 2S_{12} + S_{66}}{8} = 0.0559 \text{ GPa}^{-1}$$

$$V_G = \frac{S_{11} + S_{22} - 2S_{12} + S_{66}}{8} = 0.03089 \text{ GPa}^{-1}$$

$$V_{\Delta c} = \frac{S_{11} - S_{22}}{2} = -0.0450 \text{ GPa}^{-1}$$

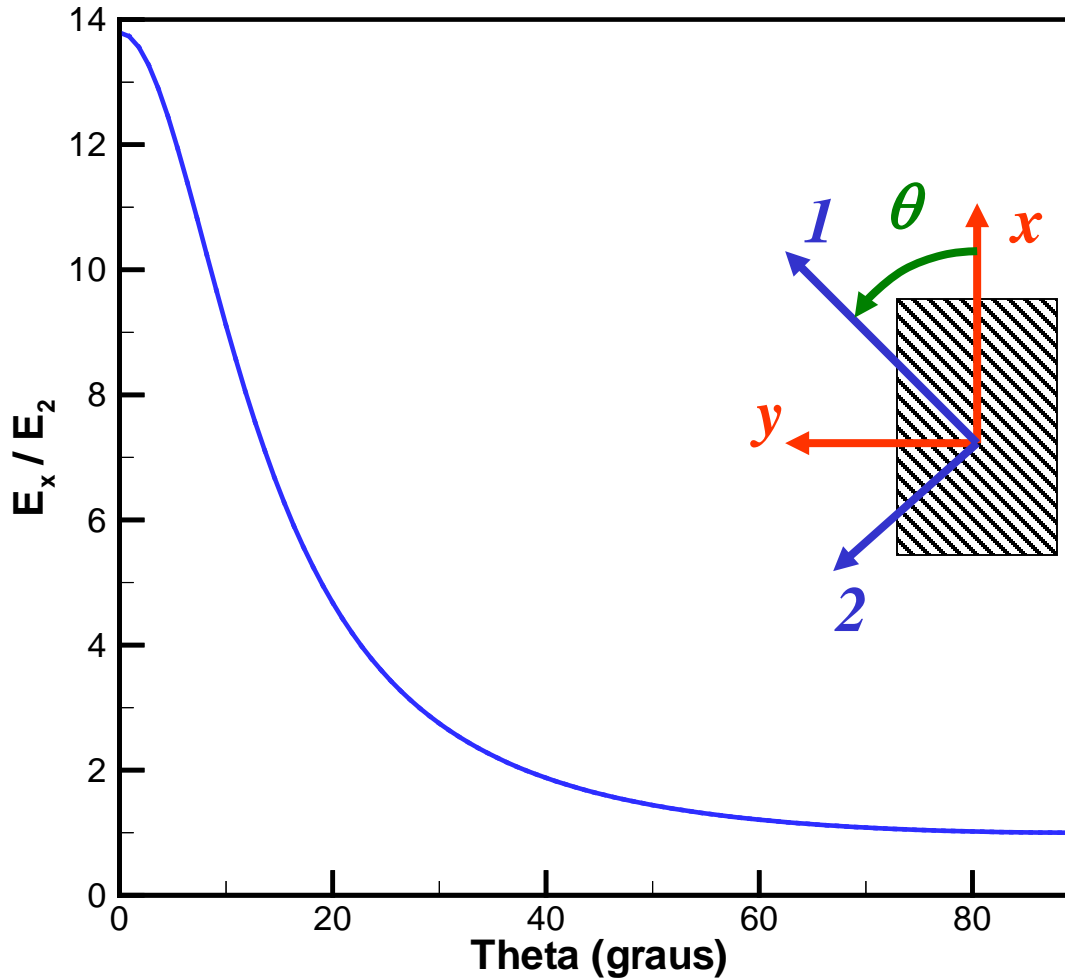
$$V_{vc} = \frac{S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}}{8} = -0.0039 \text{ GPa}^{-1}$$

$$V_{at} = \frac{S_{55} + S_{44}}{2} = 0.20456 \text{ GPa}^{-1}$$

$$V_{\Delta t} = \frac{S_{55} - S_{44}}{2} = -0.0657 \text{ GPa}^{-1}$$

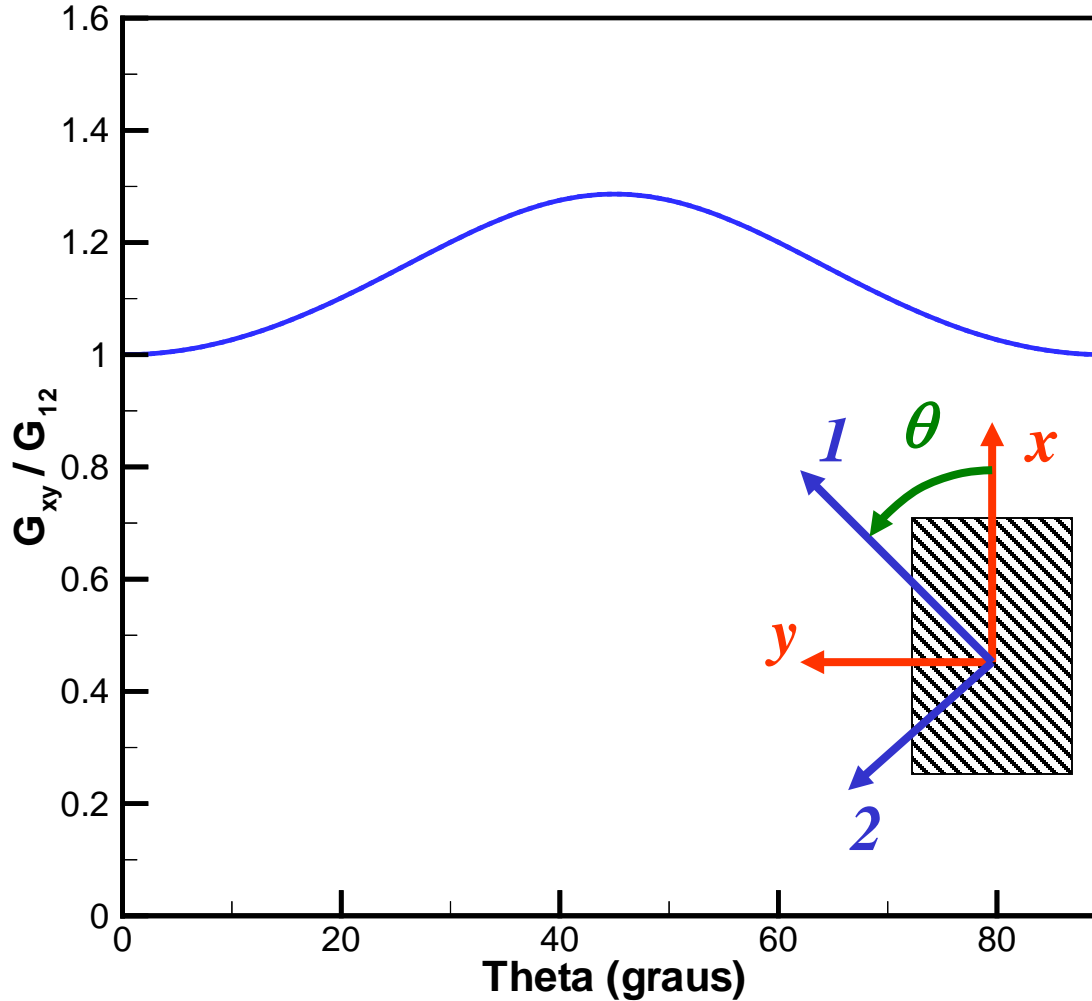


TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA



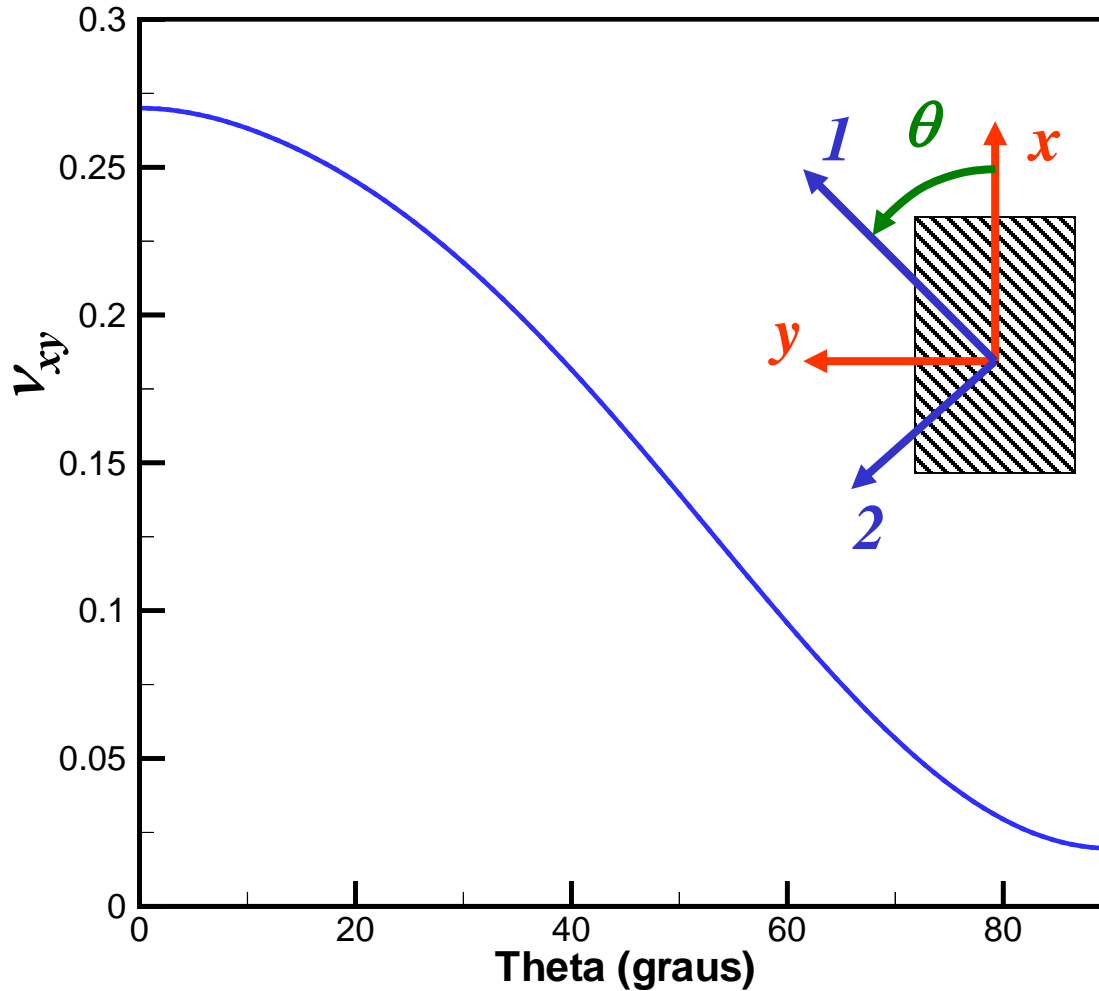


TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA



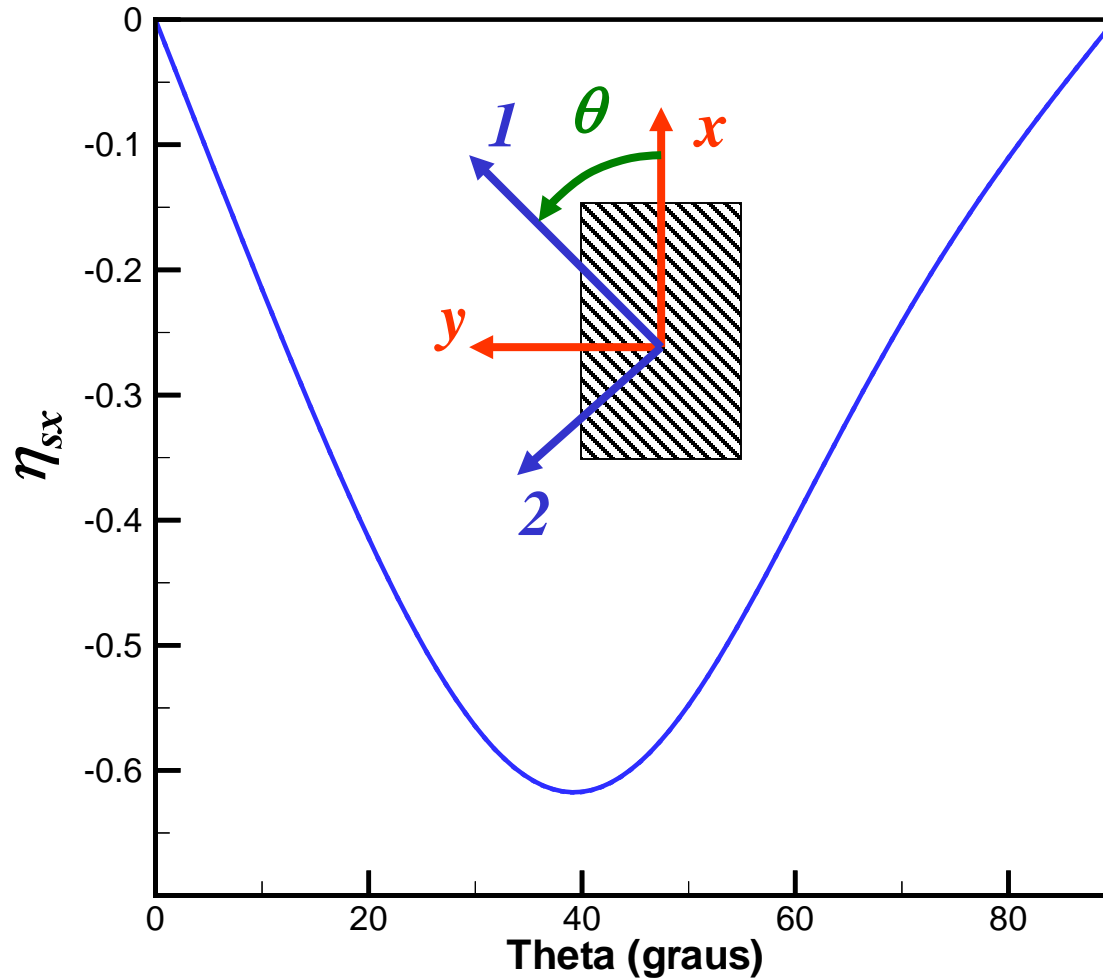


TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA



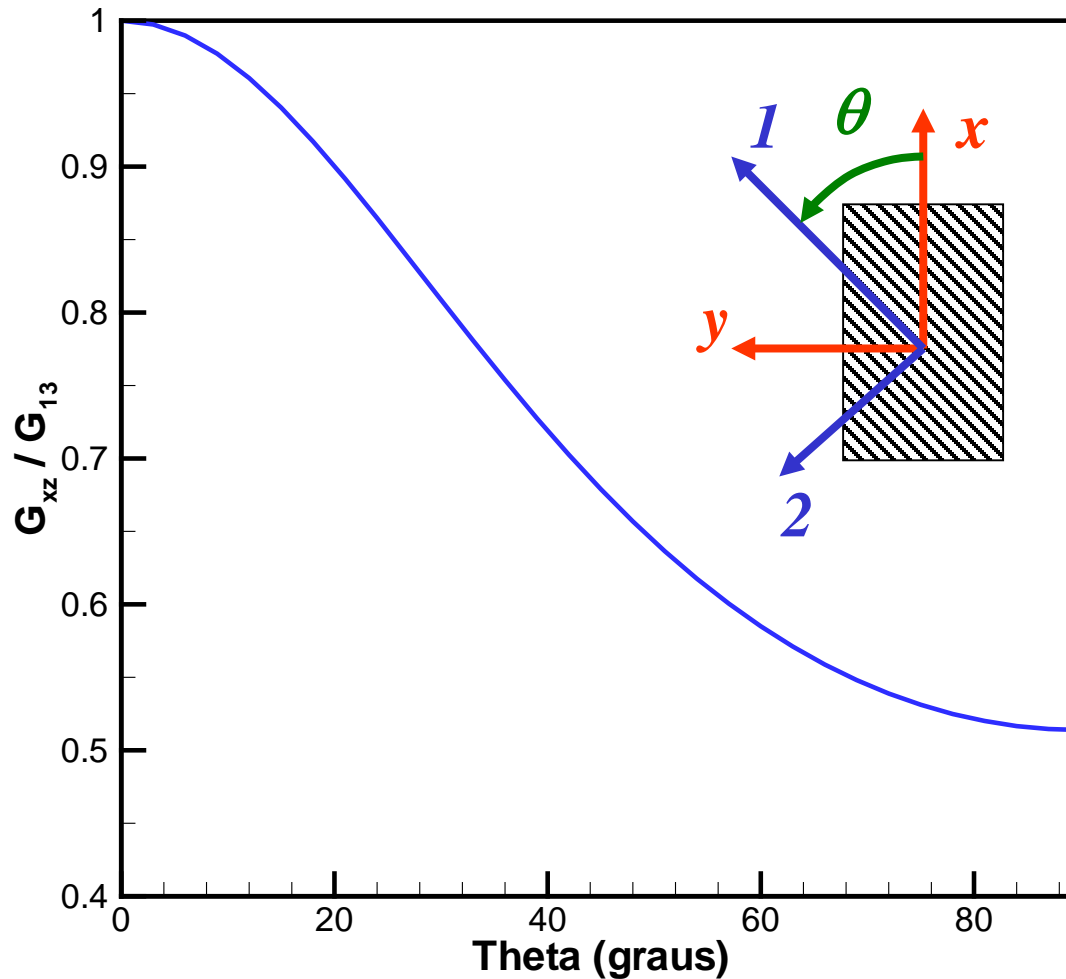


TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA





TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA





TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA

- E_x decresce muito rapidamente com o ângulo θ
- $E_x = E_1$ para $\theta = 0^\circ$ e $E_x = E_2$ para $\theta = 90^\circ$
- $\nu_{xy} = \nu_{12}$ para $\theta = 0^\circ$ e $\nu_{xy} = \nu_{21}$ para $\theta = 90^\circ$
- para alguns materiais o valor máximo de ν_{xy} pode ser maior do que ν_{12} ou ν_{21}
- G_{xy} não varia muito com o ângulo; o valor máximo ocorre para $\theta = 45^\circ$
- η_{sx} e η_{sy} são sempre nulos para $\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 90^\circ$
- G_{xz} não varia muito com o ângulo



TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA

mudança de coordenadas

- não se deve confundir os elementos da matriz de rigidez do material com as constantes elásticas do material
- por exemplo:

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$$

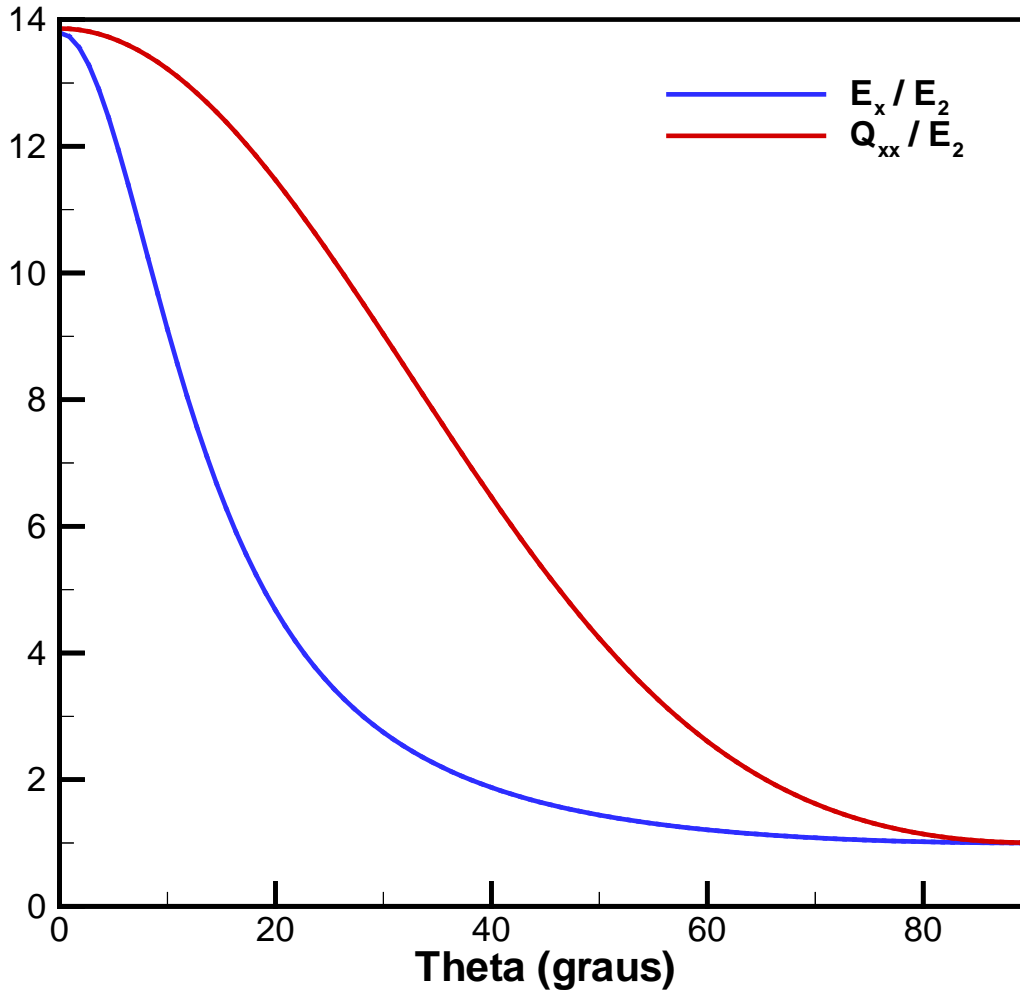
por definição, para um carregamento uniaxial σ_x (as deformações são, em geral, não nulas)

$$Q_{xx} = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$$

apenas se, $\varepsilon_x \neq 0$, $\varepsilon_y = 0$ e $\gamma_s = 0$ (o estado de tensões não é uniaxial)



TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA

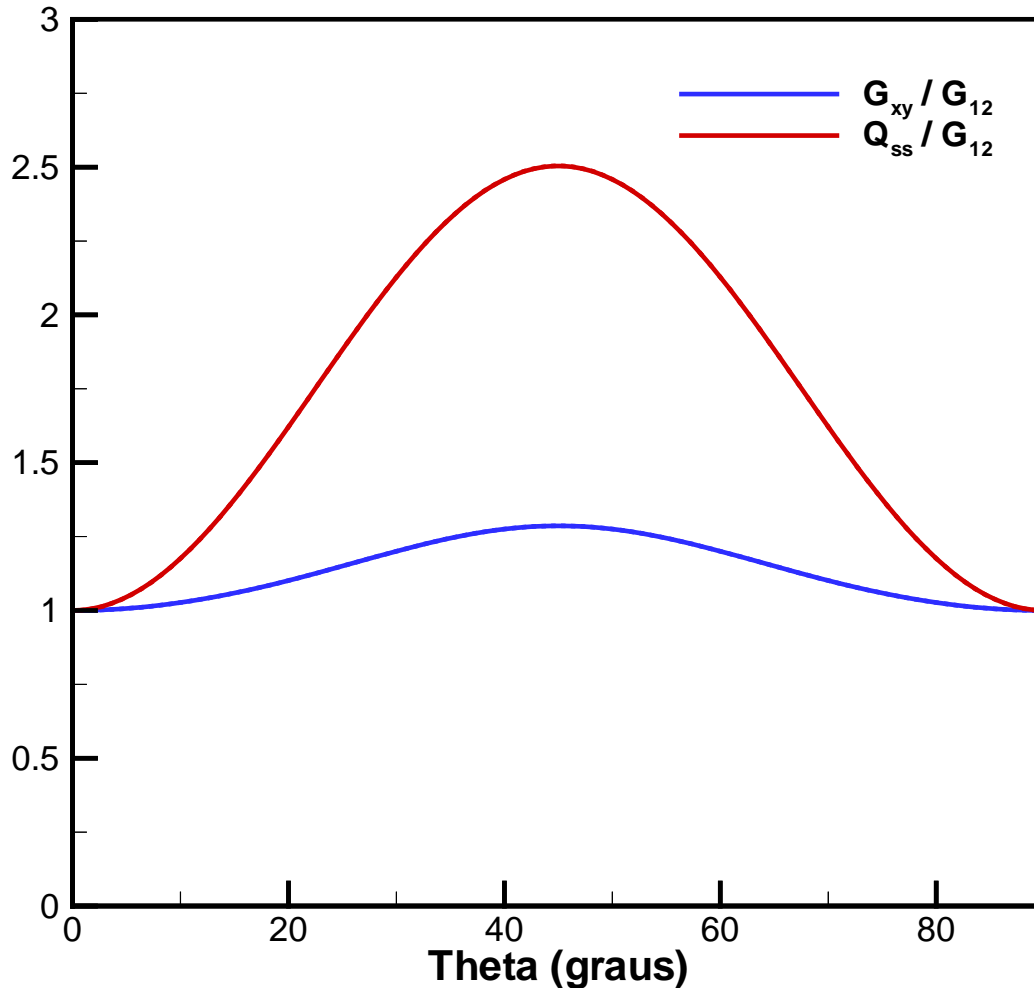


E_x pode ser muito diferente de Q_{xx} (na verdade os valores só são próximos para $\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 90^\circ$)

a figura foi construída com dados típicos de uma lâmina unidirecional de carbono/epóxi



TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA



G_{xy} pode ser muito diferente de Q_{ss} (na verdade os valores só são próximos para $\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 90^\circ$)

a figura foi construída com dados típicos de uma lâmina unidirecional de carbono/epóxi



TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA

mudança de coordenadas

- lâminas com reforço de tecido tem comportamento distinto do de lâminas unidirecionais
- a seguir são apresentados gráficos das constantes de engenharia para um tecido de carbono/epóxi típico

$$E_1 = 66.6 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 66.6 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.05$$

$$\nu_{21} = 0.05$$

$$G_{12} = 4.6 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = 5.1 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 4.1 \text{ GPa}$$



TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA

mudança de coordenadas

- calculando-se as constantes S_{ij} :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} = 0.01502 \text{ GPa}^{-1}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} = 0.01502 \text{ GPa}^{-1}$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -0.00075 \text{ GPa}^{-1}$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}} = 0.21739 \text{ GPa}^{-1}$$

$$S_{55} = \frac{1}{G_{13}} = 0.19608 \text{ GPa}^{-1}$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}} = 0.24390 \text{ GPa}^{-1}$$



TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA

mudança de coordenadas

- calculando-se as constantes V_i :

$$V_E = \frac{3S_{11} + 3S_{22} + 2S_{12} + S_{66}}{8} = 0.0382 \text{ GPa}^{-1}$$

$$V_G = \frac{S_{11} + S_{22} - 2S_{12} + S_{66}}{8} = 0.0311 \text{ GPa}^{-1}$$

$$V_{\Delta c} = \frac{S_{11} - S_{22}}{2} = 0.0000 \text{ GPa}^{-1}$$

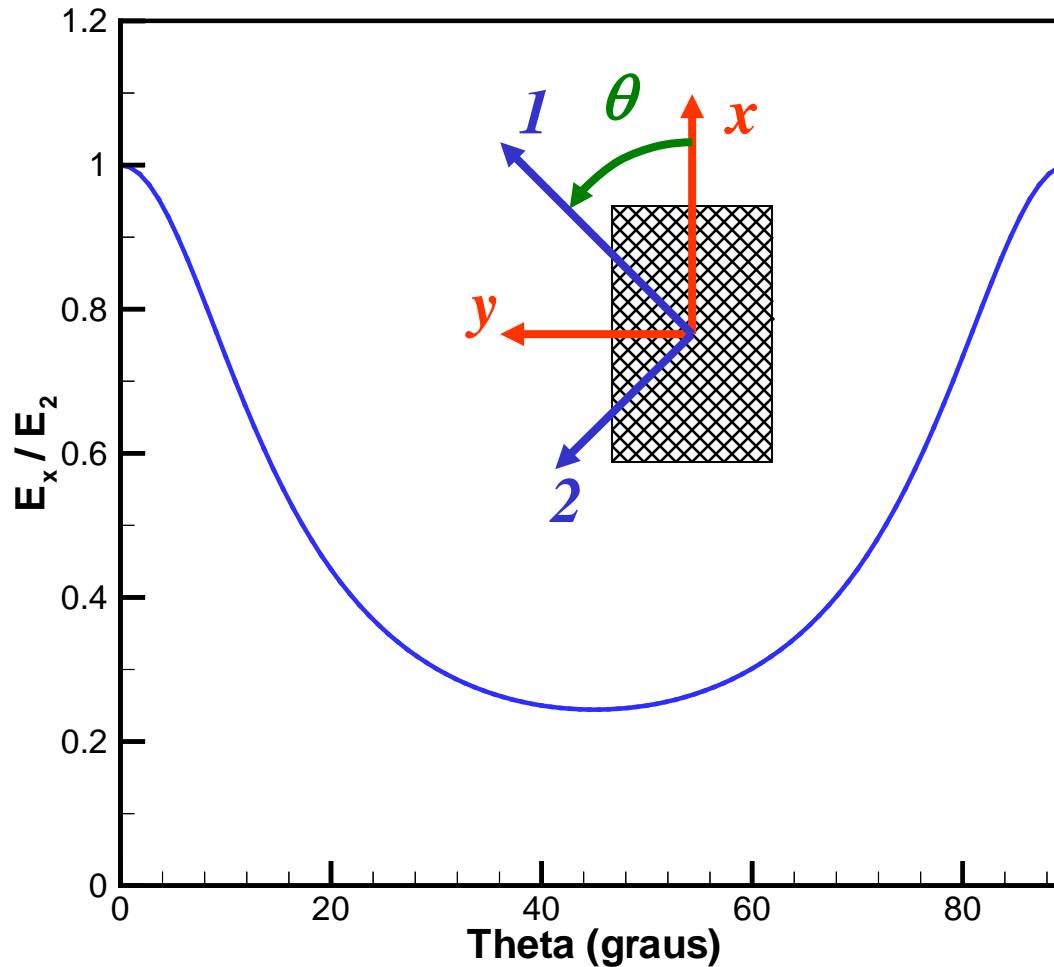
$$V_{vc} = \frac{S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}}{8} = -0.0232 \text{ GPa}^{-1}$$

$$V_{at} = \frac{S_{55} + S_{44}}{2} = 0.2200 \text{ GPa}^{-1}$$

$$V_{\Delta t} = \frac{S_{55} - S_{44}}{2} = -0.0239 \text{ GPa}^{-1}$$

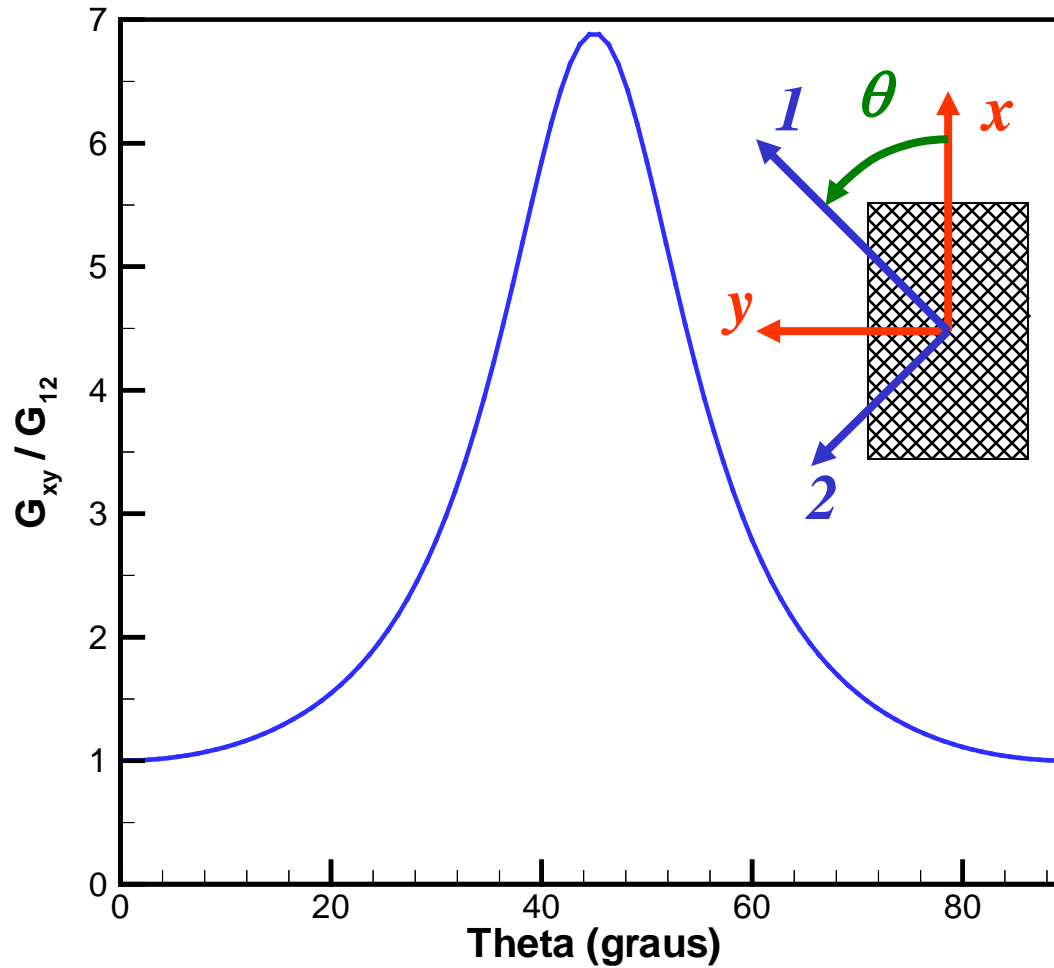


TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA



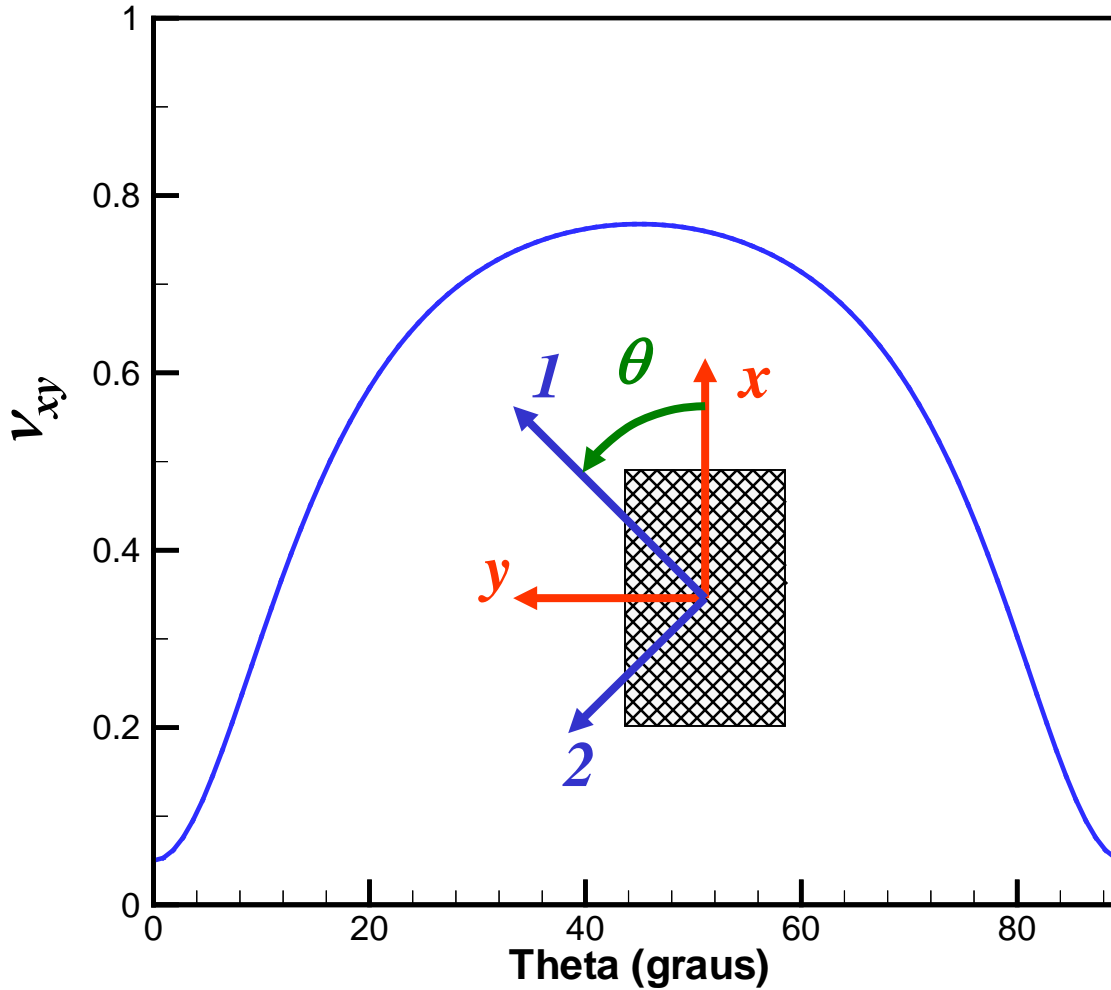


TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA



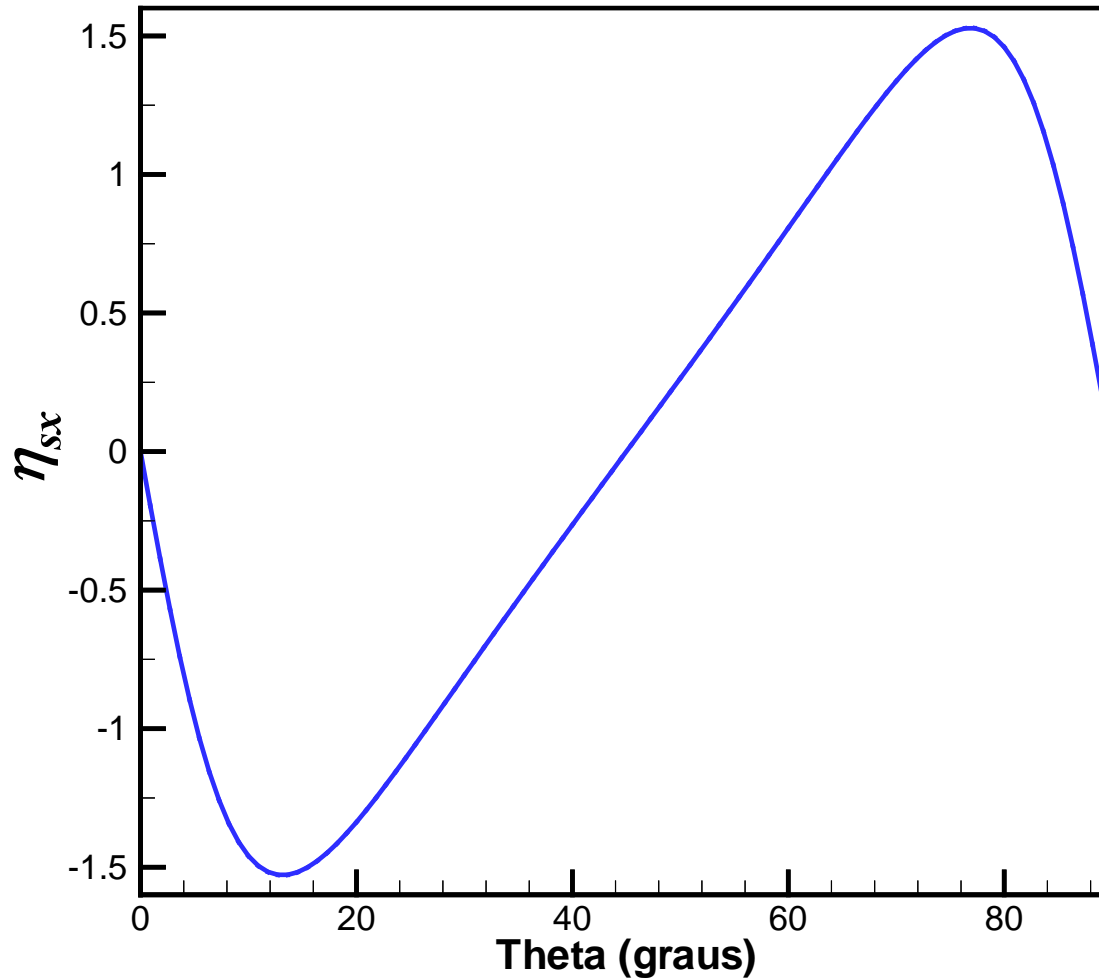


TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA



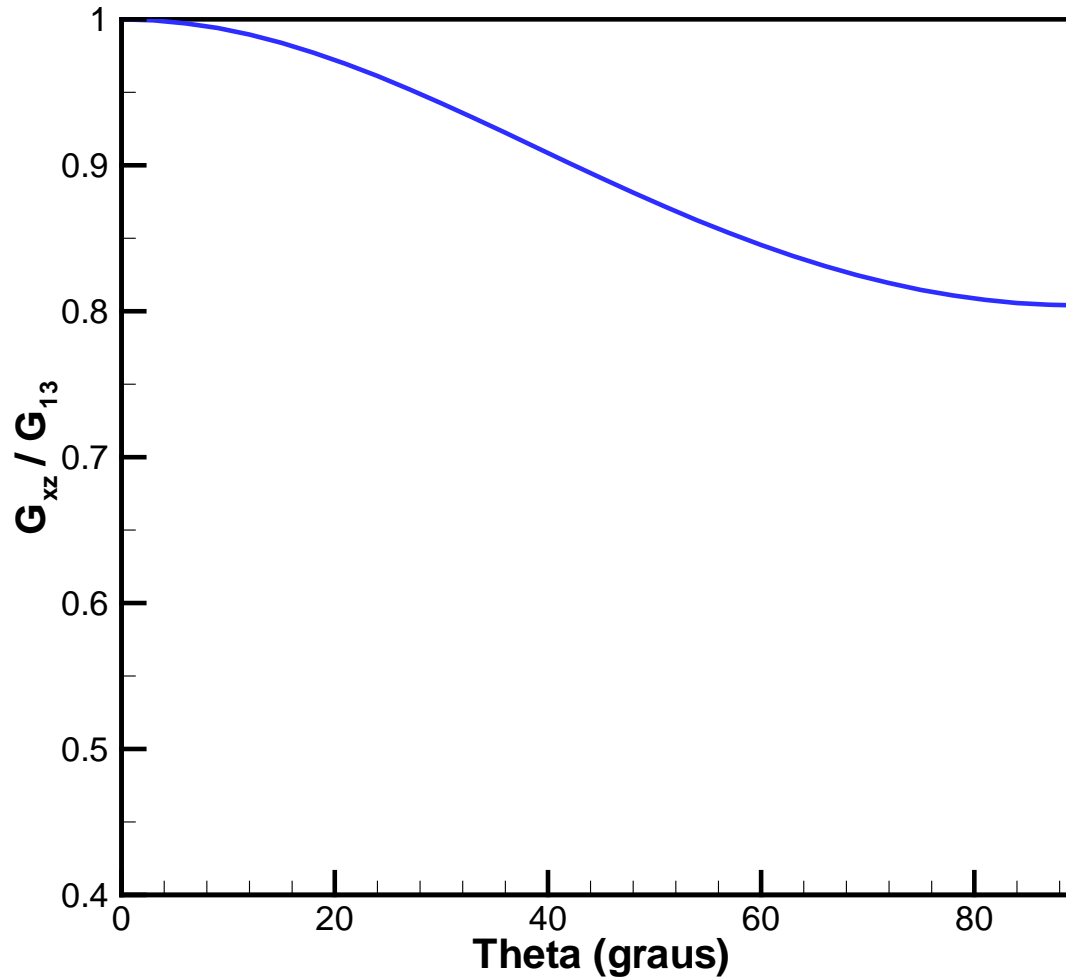


TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA





TRANSFORMAÇÃO PARA CONSTANTES DE ENGENHARIA





6. Teoria clássica da laminação



6.1 Hipóteses



HIPÓTESES

- cada camada (lâmina) do laminado é quase homogênea e ortotrópica
- o laminado é fino; isto é, as suas dimensões laterais são muito maiores do que a espessura
- o laminado (e cada uma das suas camadas) está sujeita a tensões transversais nulas ($\sigma_z = 0$)



HIPÓTESES

- todos os deslocamentos são pequenos comparados com a espessura do laminado ($|u|$, $|v|$, $|w| \ll h$)
- os deslocamentos são contínuos em todo o laminado (não há descolamento das camadas)
- os deslocamentos no plano (u , v) variam linearmente ao longo da espessura (u e v , deslocamentos ao longo de x e y , respectivamente, são funções lineares de z)



HIPÓTESES

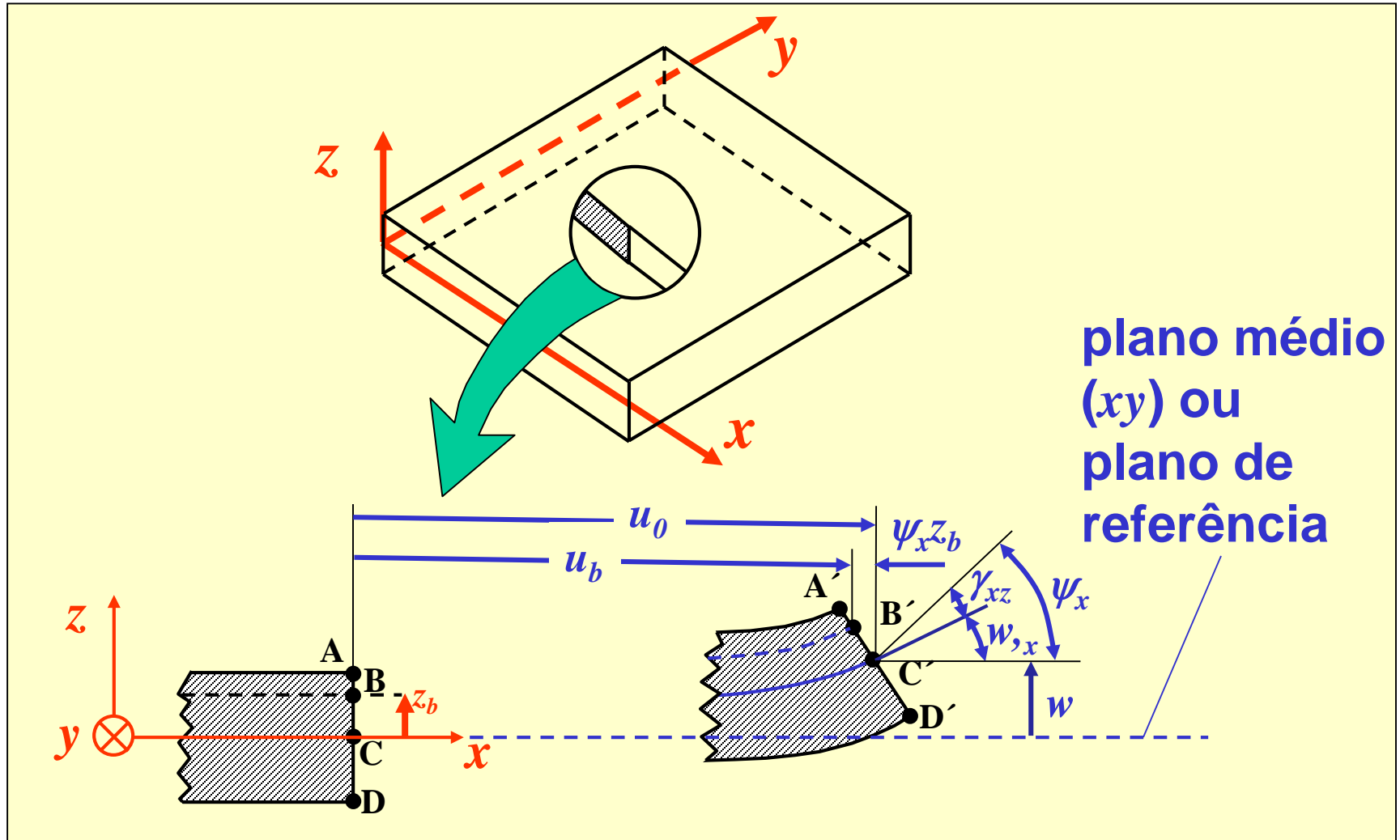
- as relações tensão-deformação e deslocamentos-deformação são lineares
- a deformação normal ε_z é negligenciável (comparado com ε_x ou ε_y)



6.2 Deslocamentos do plano médio



DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO





DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO

- das hipóteses básicas, o componente de deformação ε_z pode ser considerado nulo
- portanto, o deslocamento fora do plano, w , deve ser constante ao longo da espessura da placa, isto é:

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$



DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO

- os deslocamentos do plano médio são medidos a partir do plano médio (ou plano de referência)
- os deslocamentos do plano médio dependem apenas das coordenadas x e y ($z = 0$ no plano médio)

$$u_0 = u_0(x, y)$$

$$v_0 = v_0(x, y)$$

$$w_0 = w_0(x, y)$$



DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO

- as rotações as seção dependem apenas das coordenadas x e y

$$\psi_x = \psi_x(x, y)$$

$$\psi_y = \psi_y(x, y)$$

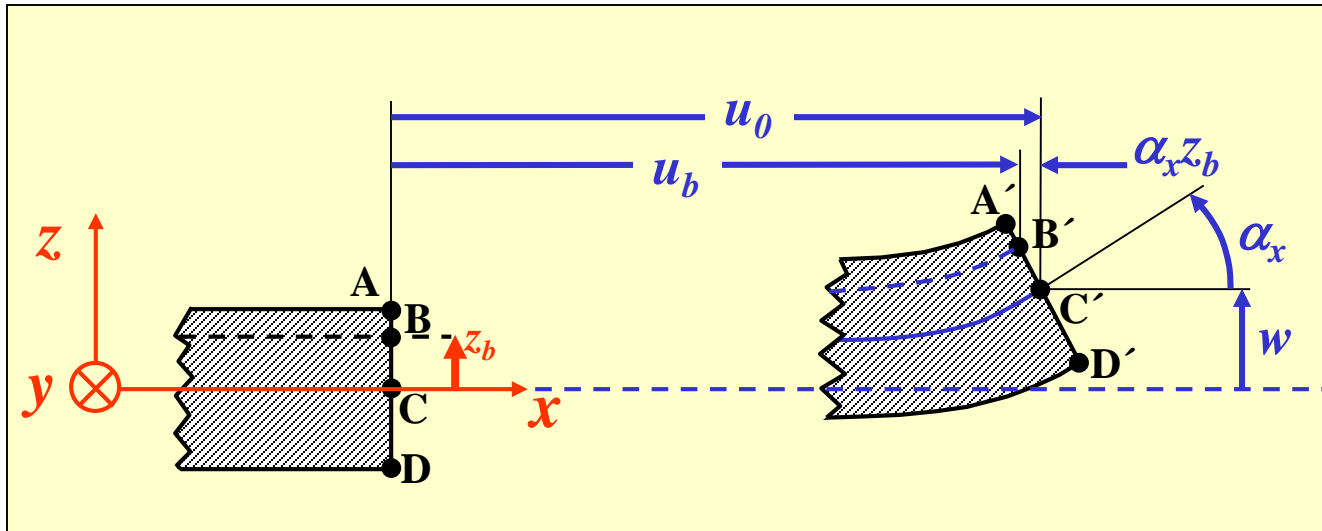


DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO

- das hipóteses básicas, os deslocamentos no plano, u e v , variam linearmente ao longo da espessura
- os deslocamentos nas direções x e y de um ponto arbitrário podem ser calculados a partir dos deslocamentos do plano médio
- a função resultante é linear em z



DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO



da figura:

$$u_b(x, y, z) = u_0(x, y) - z_b \psi_x(x, y)$$

analogamente:

$$v_b(x, y, z) = v_0(x, y) - z_b \psi_y(x, y)$$



DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO

- os deslocamentos nas direções x e y de um ponto arbitrário podem então ser calculados a partir dos deslocamentos do plano médio:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\psi_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\psi_y(x, y)$$

também:

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$



DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO

- uma vez que os deslocamentos de um ponto arbitrário podem ser escritos em função dos deslocamentos do plano médio, as deformações e tensões num ponto arbitrário também podem ser escritos em função dos deslocamentos do plano médio
- dessa forma o problema que era originalmente tri-dimensional (coordenadas x , y e z) passa a ser bi-dimensional (coordenadas x e y apenas)

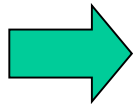


DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO

deformações

- as deformações no plano são dadas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y, z) &= \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial \psi_x(x, y)}{\partial x} \\ \varepsilon_y(x, y, z) &= \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial \psi_y(x, y)}{\partial y} \\ \gamma_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} - z \left(\frac{\partial \psi_x(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y(x, y)}{\partial x} \right)\end{aligned}$$



DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO

deformações

- agora pode-se definir:
 - a) deformações no plano ou de membrana
 - b) curvaturas da seção transversal
- as deformações no laminado podem ser escritas como uma combinação desses fatores



DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO

deformações

- deformações no plano ou de membrana são deformações do plano médio e portanto só dependem das coordenadas x e y :

$$\varepsilon_x^0(x, y) = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y^0(x, y) = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}^0(x, y) = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x}$$



DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO

deformações

- as curvaturas do plano médio também só dependem das coordenadas x e y :

$$\kappa_x(x, y) = -\frac{\partial \psi_x(x, y)}{\partial x}$$

$$\kappa_y(x, y) = -\frac{\partial \psi_y(x, y)}{\partial y}$$

$$\kappa_{xy}(x, y) = -\frac{\partial \psi_x(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y(x, y)}{\partial x}$$

- κ_x e κ_y representam o inverso do raio de curvatura da seção no ponto (x, y) ;
- κ_{xy} representa a torção da seção no ponto (x, y) ;



DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO

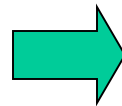
deformações

- usando as definições de deformações e curvaturas do plano médio, as deformações ficam:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$



$$\varepsilon_x(x, y, z) = \varepsilon_x^0(x, y) + z\kappa_x(x, y)$$

$$\varepsilon_y(x, y, z) = \varepsilon_y^0(x, y) + z\kappa_y(x, y)$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \gamma_{xy}^0(x, y) + z\kappa_{xy}(x, y)$$



DESLOCAMENTOS DO PLANO MÉDIO

deformações

- portanto, uma importante consequência das hipóteses consideradas é que **as deformações variam linearmente ao longo da espessura**

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \varepsilon_x^0(x, y) + z\kappa_x(x, y)$$

$$\varepsilon_y(x, y, z) = \varepsilon_y^0(x, y) + z\kappa_y(x, y)$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \gamma_{xy}^0(x, y) + z\kappa_{xy}(x, y)$$

forma matricial:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^p\}^0 + z\{\kappa\}$$



6.3 Tensões em laminados



TENSÕES EM LAMINADOS

tensões

- uma vez obtidas as deformações pode-se calcular as tensões a partir das relações tensão-deformação
- como cada camada pode ser de material diferente e com ângulos de laminação diferente, cada camada pode ter uma matriz de relação tensão deformação diferente



TENSÕES EM LAMINADOS

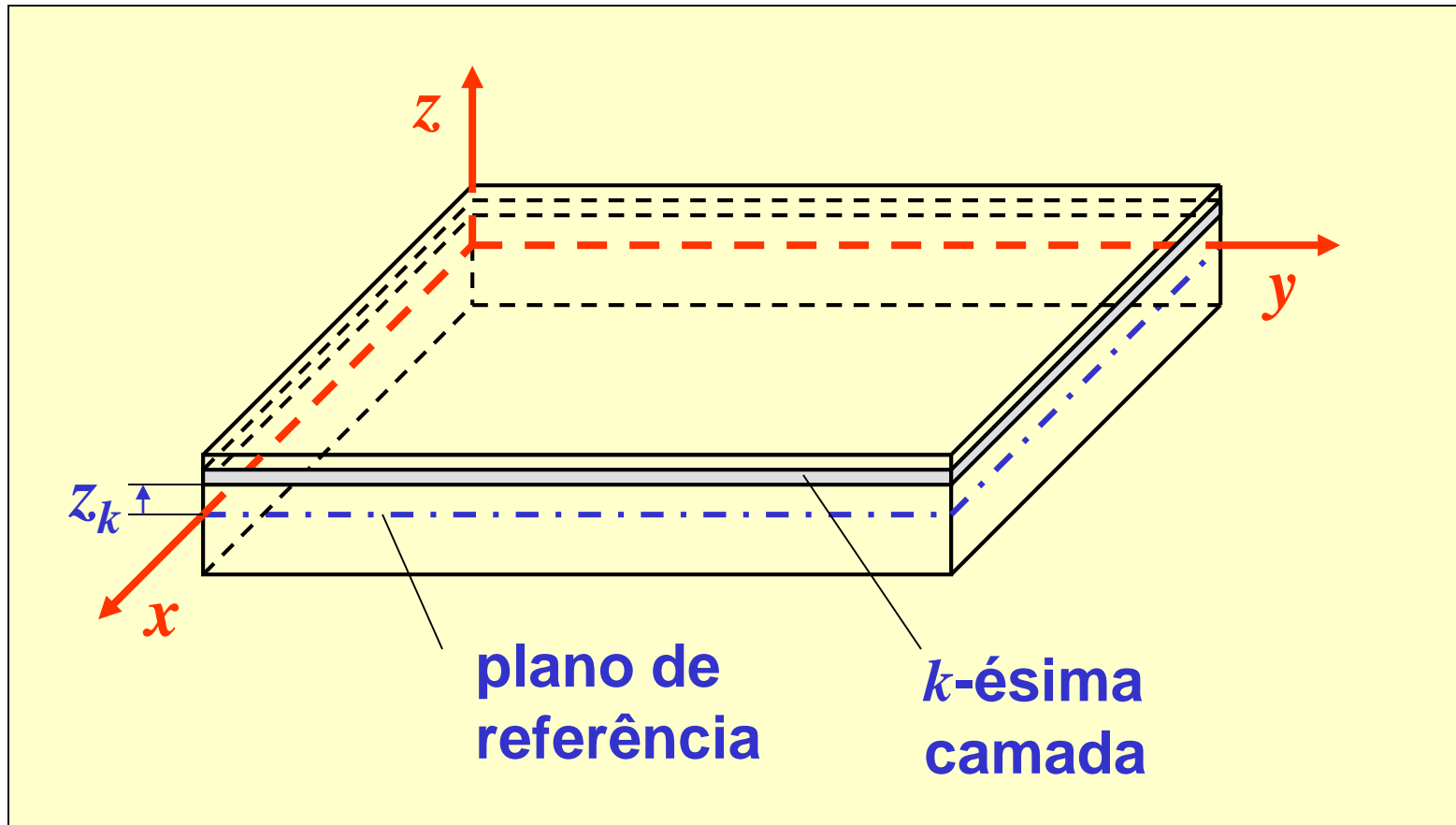
tensões

- há um sistema de referência para o laminado e um sistema de referência principal de cada camada
- o eixo z (fora do plano) é comum a todos esses sistemas de referência
- o sistema principal da k -ésima camada é obtida por uma rotação do sistema de referência de θ_k em torno do eixo z (θ_k é o ângulo de laminação da camada)



TENSÕES EM LAMINADOS

tensões





TENSÕES EM LAMINADOS

tensões no plano xy

- a relação tensão-deformação dentro de cada camada nas **direções principais da camada** é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}_k \quad \longrightarrow \quad \left\{ \sigma^p \right\}_{12}^k = \left[Q^p \right]_k \left\{ \varepsilon^p \right\}_{12}^k$$

- o índice k indica que cada camada pode ter propriedades diferentes (matriz $[Q^p]$ diferente)



TENSÕES EM LAMINADOS

tensões no plano xy

- a relação tensão-deformação dentro de cada camada **no sistema de coordenadas do laminado** é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{xx} & \bar{Q}_{xy} & \bar{Q}_{xs} \\ \bar{Q}_{xy} & \bar{Q}_{yy} & \bar{Q}_{ys} \\ \bar{Q}_{xs} & \bar{Q}_{ys} & \bar{Q}_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}_k \quad \longrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \sigma^p \end{Bmatrix}_{xy}^k = [\bar{Q}^p]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon^p \end{Bmatrix}_{xy}^k$$

- o índice k também indica que cada camada pode ter ângulo diferente (matriz $[\bar{Q}^p]$ diferente)



TENSÕES EM LAMINADOS

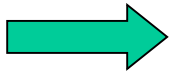
tensões no plano xy

- substituindo a expressão obtida para as deformações:

$$\left\{ \sigma^p \right\}_{xy}^k = \left[\bar{Q}^p \right]_k \left\{ \varepsilon^p \right\}_{xy}^k$$

e

$$\left\{ \varepsilon^p \right\} = \left\{ \varepsilon^p \right\}^0 + z \left\{ \kappa \right\}$$



$$\left\{ \sigma^p \right\}_{xy}^k = \left[\bar{Q}^p \right]_k \left\{ \varepsilon^p \right\}_{xy}^0 + z \left[\bar{Q}^p \right]_k \left\{ \kappa \right\}_{xy}$$

- note que todas as grandezas acima devem ser calculadas no mesmo sistema de referência (xyz)



TENSÕES EM LAMINADOS

tensões no plano xy

- as tensões no plano xy variam linearmente com z dentro de cada camada

$$\left\{ \sigma^p \right\}_{xy}^k = \left[\bar{Q}^p \right]_k \left\{ \varepsilon^p \right\}_{xy}^0 + z \left[\bar{Q}^p \right]_k \left\{ \kappa \right\}_{xy}$$

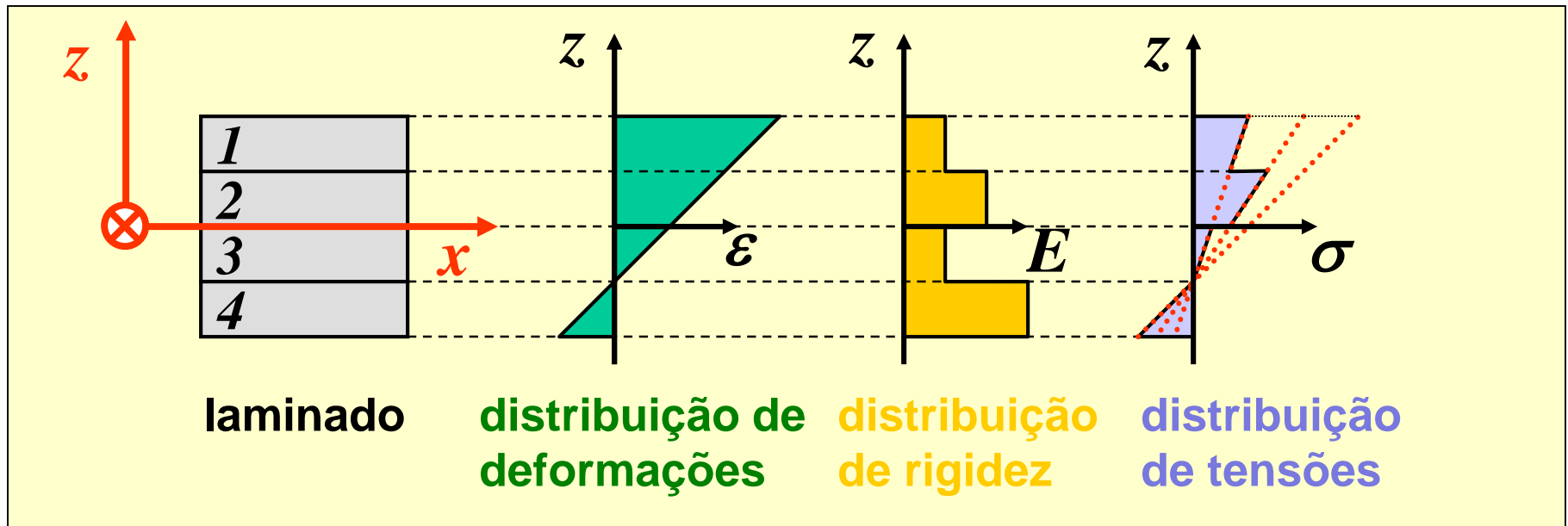
- como a matriz as propriedades do material e ângulos de laminação podem variar abruptamente de camada para camada, a matriz $[\bar{Q}]$ pode variar abruptamente causando descontinuidade das tensões



TENSÕES EM LAMINADOS

tensões no plano xy

- as tensões variam linearmente com z dentro de cada camada; pode haver descontinuidade de tensão





TENSÕES EM LAMINADOS

tensões de cisalhamento transversais

- na teoria de Kirchhoff as tensões de cisalhamento transversais são nulas
- na teoria de Reissner-Mindlin as tensões de cisalhamento transversais são constantes em cada camada
- nesta análise a teoria de Kirchhoff vai ser considerada



TENSÕES EM LAMINADOS

esforços resultantes

- os deslocamentos num ponto arbitrário foram escritos em termos de deslocamentos do plano médio
- as deformações num ponto arbitrário foram escritas em termos de deformações e curvaturas do plano médio e cisalhamentos transversais
- as deformações e curvaturas do plano médio foram escritos em termos de deslocamentos do plano médio



TENSÕES EM LAMINADOS

esforços resultantes

- as tensões dentro de uma camada foram escritas em termos da relação tensão-deformação da camada e das deformações e curvaturas do plano médio
- portanto, todas as grandezas envolvidas podem ser calculadas a partir dos deslocamentos do plano médio
- o problema foi reduzido de tri-dimensional para bi-dimensional



TENSÕES EM LAMINADOS

esforços resultantes

- as expressões obtidas para as tensões **valem dentro de cada camada**
- é necessário definir as “**tensões do laminado**” que devem ser bi-dimensionais
- essas tensões do laminado devem poder ser expressas em termos das deformações e curvaturas do plano médio



TENSÕES EM LAMINADOS

esforços resultantes

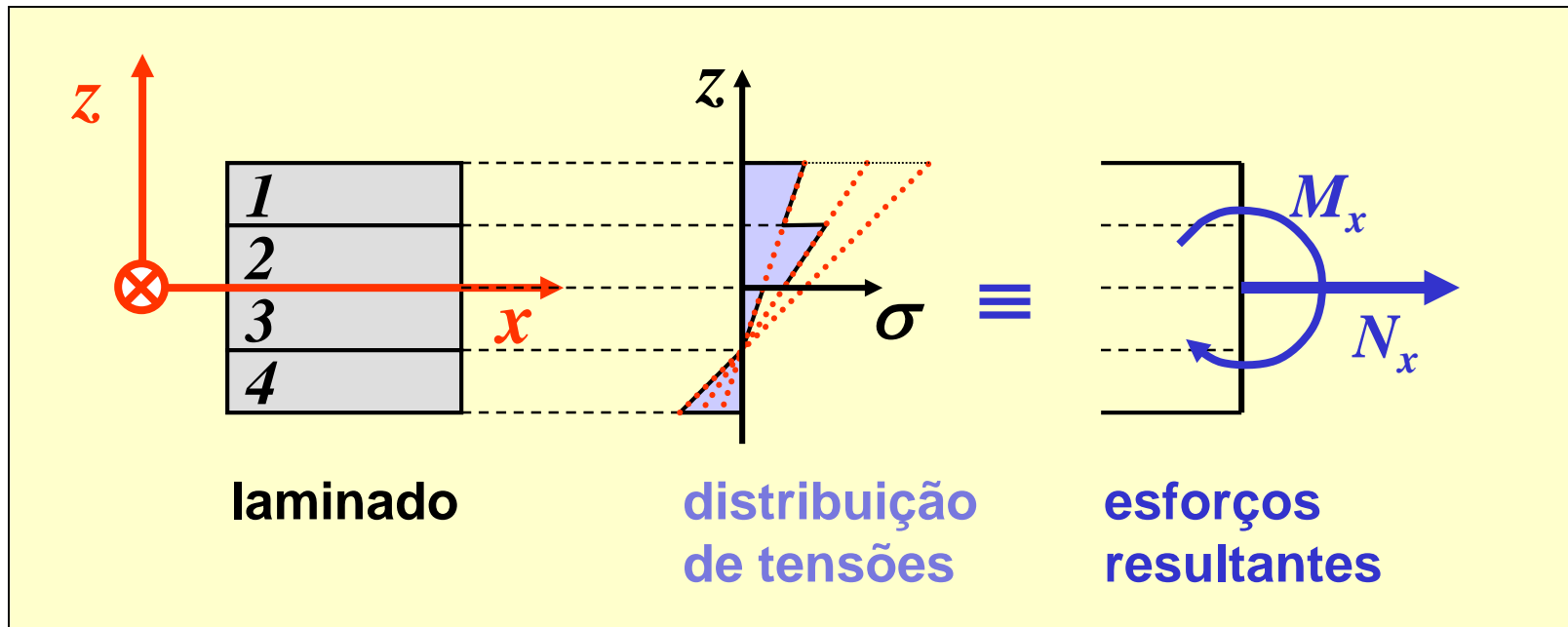
- uma distribuição arbitrária de forças pode ser substituída por uma força e um momento equivalente
- analogamente, uma distribuição arbitrária de tensões pode ser substituída por **esforços resultantes** (esforços no plano e momentos)
- esses esforços resultantes são grandezas bi-dimensionais



TENSÕES EM LAMINADOS

esforços resultantes no plano

- os esforços resultantes no plano são equivalentes à distribuição de tensões



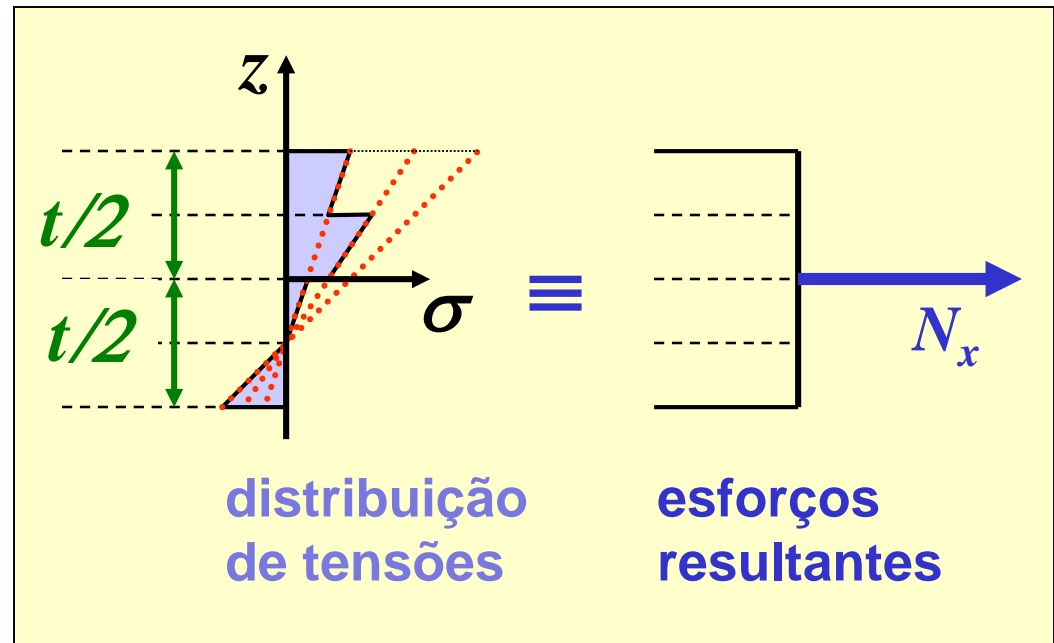


TENSÕES EM LAMINADOS

esforços resultantes no plano

- N_x é a força resultante equivalente à distribuição de tensões
- N_x tem unidade de força por unidade de comprimento

$$N_x(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x(x, y, z) dz$$



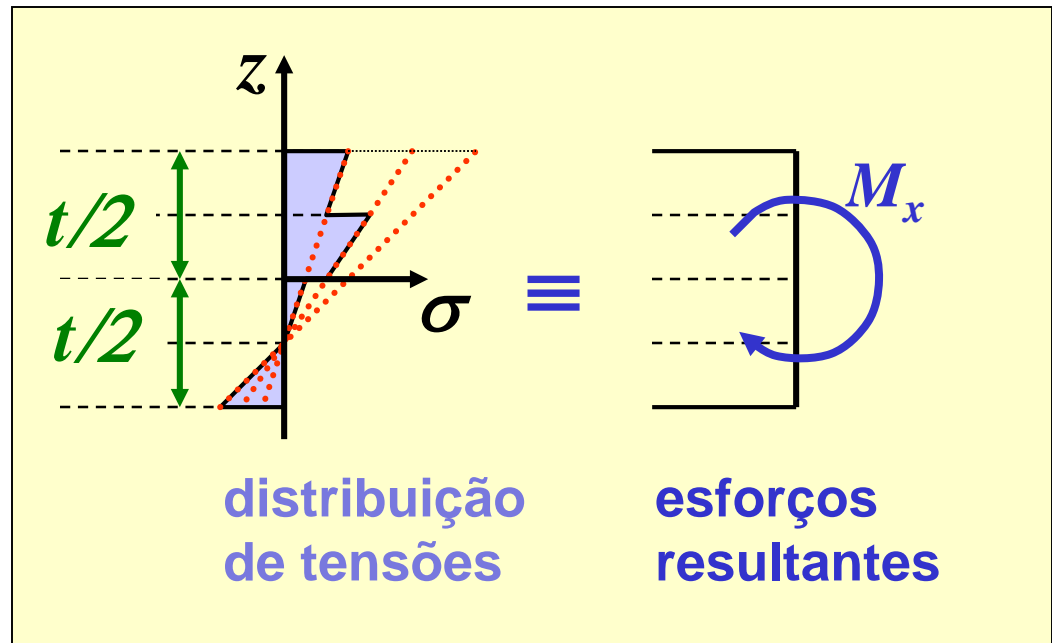


TENSÕES EM LAMINADOS

esforços resultantes no plano

- M_x é o momento resultante equivalente à distribuição de tensões
- M_x tem unidade de momento por unidade de comprimento

$$M_x(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x(x, y, z) dz$$

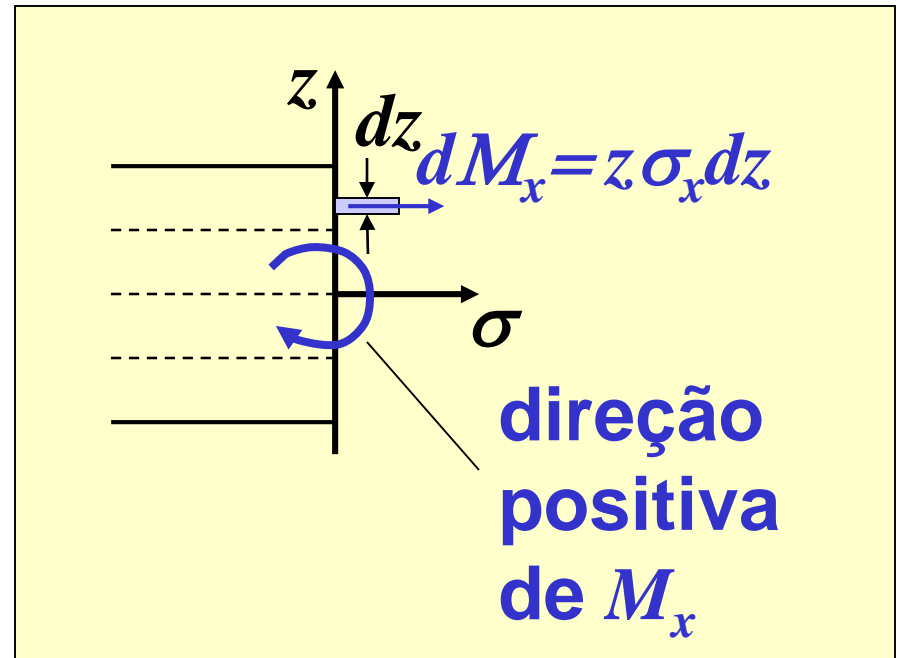




TENSÕES EM LAMINADOS

esforços resultantes no plano

- a direção positiva de M_x corresponde à direção do momento resultante de uma força $\sigma_x dz$ positiva para z positivo





TENSÕES EM LAMINADOS

esforços resultantes no plano

- definição dos esforços resultantes no plano (N_x , N_y e $N_{xy} = N_s$):

$$N_x(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x(x, y, z) dz$$

$$N_y(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y(x, y, z) dz$$

$$N_{xy}(x, y) = N_s(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_s(x, y, z) dz$$

em forma matricial:

$$\{N(x, y)\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{\sigma^p(x, y, z)\} dz$$



TENSÕES EM LAMINADOS

esforços resultantes no plano

- definição dos momentos resultantes (M_x , M_y e $M_{xy} = M_s$):

$$M_x(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x(x, y, z) dz$$

$$M_y(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y(x, y, z) dz$$

$$M_{xy}(x, y) = M_s(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_s(x, y, z) dz$$

em forma matricial:

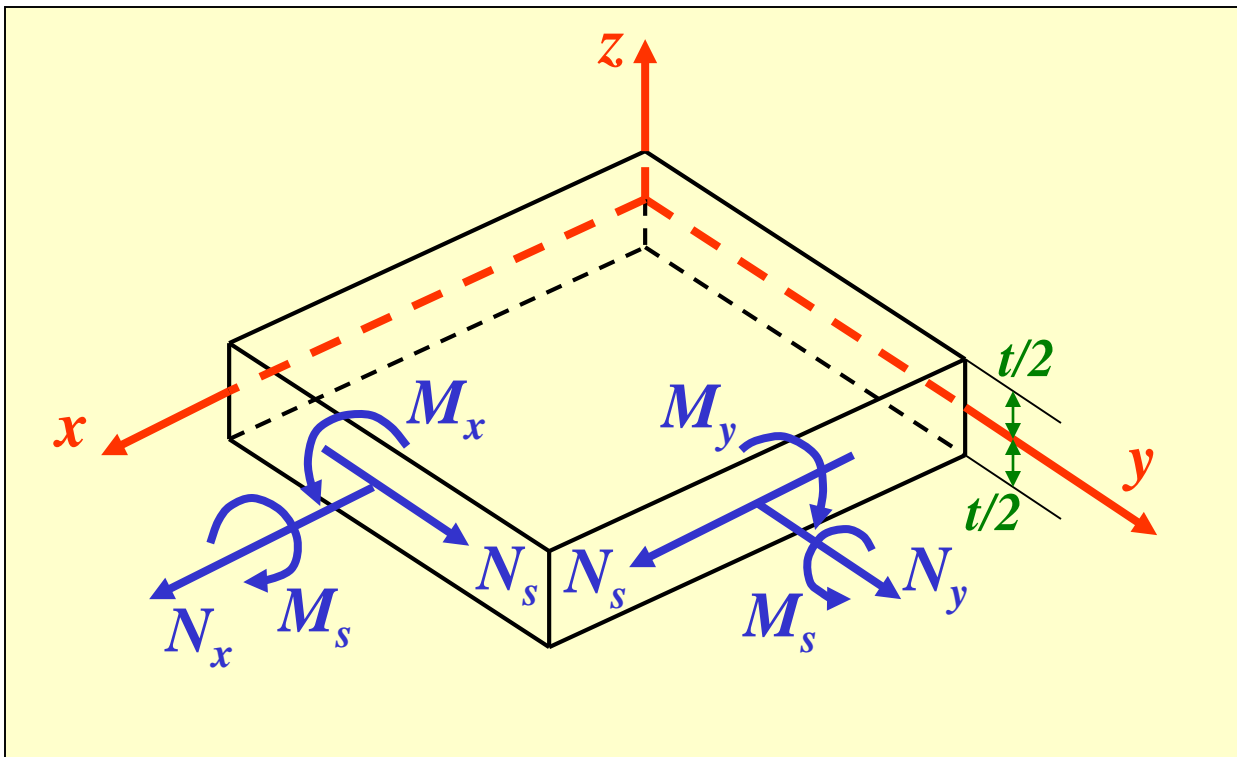
$$\{M(x, y)\} = \int_{-t/2}^{t/2} z \{\sigma^p(x, y, z)\} dz$$



TENSÕES EM LAMINADOS

esforços resultantes no plano

direção positiva dos esforços resultantes



t = espessura do laminado



TENSÕES EM LAMINADOS

esforços resultantes no plano

Nomenclatura:

- N_x, N_y = esforços resultantes normais por unidade de comprimento
- $N_{xy} = N_s$ = esforços resultantes de cisalhamento por unidade de comprimento
- M_x, M_y = momentos resultantes de flexão por unidade de comprimento
- $M_{xy} = M_s$ = momentos resultantes de torção por unidade de comprimento



TENSÕES EM LAMINADOS

esforços resultantes no plano

nomenclatura:

- z = coordenada ao longo da espessura do laminado
- t = espessura total do laminado

vetor de esforços resultantes no plano

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix}$$

vetor de momentos resultantes

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix}$$

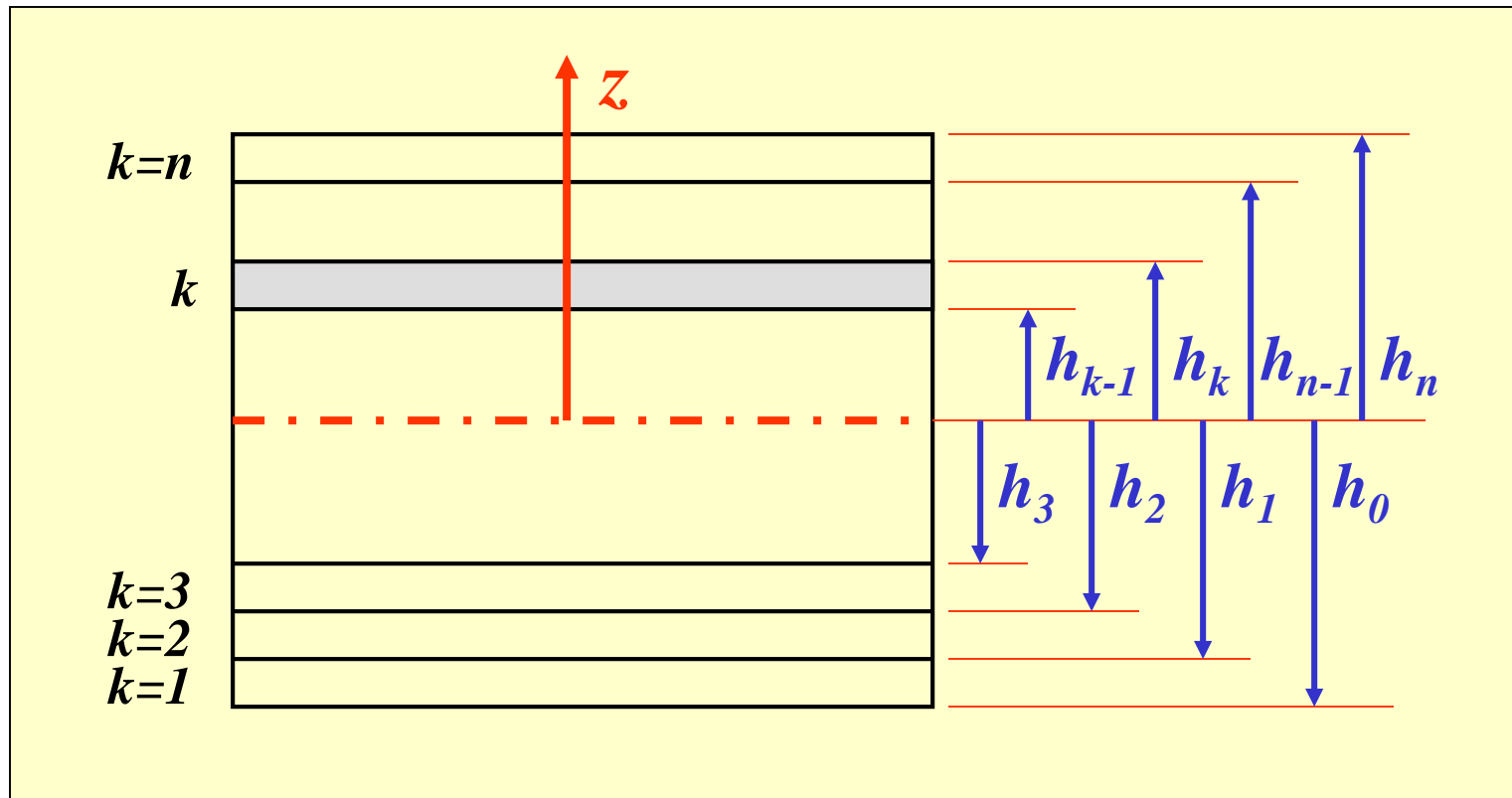


6.4 Rigidez de laminados



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

coordenadas das camadas:





RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

esforços resultantes no laminado:

$$\{N(x, y)\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{\sigma^p(x, y, z)\} dz$$

tensões no laminado:

$$\{\sigma^p\}^k = [\bar{Q}^p]_k \{\varepsilon^p\}^0 + z [\bar{Q}^p]_k \{\kappa\} \quad \text{para } h_{k-1} < z < h_k$$

substituindo:

$$\{N\} = \int_{-t/2}^{t/2} \left([\bar{Q}^p]_k \{\varepsilon^p\}^0 + z [\bar{Q}^p]_k \{\kappa\} \right) dz$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

- como a matriz $[\bar{Q}^p]_k$ varia de camada para camada, a integral ao longo da espessura deve ser calculada como um somatório da contribuição de cada camada

$$\{N\} = \int_{-t/2}^{t/2} [\bar{Q}^p]_k \left(\{\varepsilon^p\}^0 + z \{\kappa\} \right) dz = \sum_{k=1}^n \left(\int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}^p]_k \left(\{\varepsilon^p\}^0 + z \{\kappa\} \right) dz \right)$$

- note que para a k -ésima camada $h_{k-1} < z < h_k$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

- como a matriz $[\bar{Q}^p]_k$ é constante dentro de cada camada ($[\bar{Q}^p]_k = \text{constante para } h_{k-1} < z < h_k$):

$$\{N\} = \int_{-t/2}^{t/2} [\bar{Q}^p]_k \left(\{\varepsilon^p\}^0 + z \{\kappa\} \right) dz = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}^p]_k \left(\int_{h_{k-1}}^{h_k} \left(\{\varepsilon^p\}^0 + z \{\kappa\} \right) dz \right)$$

- dividindo a integral em três parcelas:

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}^p]_k \left(\int_{h_{k-1}}^{h_k} \{\varepsilon^p\}^0 dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \{\kappa\} dz \right)$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

- como $\{\varepsilon^p\}^0$ e $\{\kappa\}$ são funções apenas de x e y e independem de z :

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}^p]_k \left(\{\varepsilon^p\}^0 \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \{\kappa\} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right)$$

- calculando as integrais:

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}^p]_k \left(\{\varepsilon^p\}^0 (h_k - h_{k-1}) + \{\kappa\} \left(\frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) \right)$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}^p]_k \left(\{\varepsilon^p\}^0 (h_k - h_{k-1}) + \{\kappa\} \left(\frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) \right)$$

- rearranjando os termos:

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n \left((h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}^p]_k \{\varepsilon^p\}^0 + \left(\frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) [\bar{Q}^p]_k \{\kappa\} \right)$$

- separando em duas somatórias:

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n \left((h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}^p]_k \{\varepsilon^p\}^0 \right) + \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) [\bar{Q}^p]_k \{\kappa\} \right)$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n \left((h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}^p]_k \{ \varepsilon^p \}^0 \right) + \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) [\bar{Q}^p]_k \{ \kappa \} \right)$$

- como $\{ \varepsilon^p \}^0$ e $\{ \kappa \}$ são os mesmos para todas as camadas, eles são independentes do índice k , portanto:

$$\{N\} = \left(\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}^p]_k \right) \{ \varepsilon^p \}^0 + \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) [\bar{Q}^p]_k \right) \{ \kappa \}$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

$$\{N\} = \left(\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}^p]_k \right) \{\varepsilon^p\}^0 + \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) [\bar{Q}^p]_k \right) \{\kappa\}$$

- pode-se definir as matrizes:

$$[A] = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}^p]_k$$

$$[B] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) [\bar{Q}^p]_k$$

$$\{N\} = [A] \{\varepsilon^p\}^0 + [B] \{\kappa\}$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^p\}^0 + [B]\{\kappa\}$$

- a equação relaciona os esforços resultantes no plano com as deformações e as curvaturas do plano médio
- as matrizes $[A]$ e $[B]$ são médias ponderadas das matrizes $[\bar{Q}^p]$ de cada camada, onde os pesos das ponderações são funções das posições das camadas



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

os momentos resultantes no laminado podem ser calculados de forma análoga:

$$\{M(x, y)\} = \int_{-t/2}^{t/2} z \{\sigma(x, y, z)\} dz$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

$$\{M\} = \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) [\bar{Q}^p]_k \right) \{\varepsilon^p\}^0 + \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{3} \right) [\bar{Q}^p]_k \right) \{\kappa\}$$

- pode-se definir as matrizes:

$$[B] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) [\bar{Q}]_k$$

$$[D] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{3} \right) [\bar{Q}^p]_k$$

$$\{M\} = [B] \{\varepsilon^p\}^0 + [D] \{\kappa\}$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^p\}^0 + [D]\{\kappa\}$$

- a equação relaciona os momentos resultantes com as deformações do plano médio e as curvaturas da seção
- as matrizes $[B]$ e $[D]$ são médias ponderadas das matrizes $[\bar{Q}^p]$ de cada camada, onde os pesos das ponderações são funções das posições das camadas



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

- resumindo, as relações entre esforços e momentos resultantes e deformações e curvaturas do plano médio são:

$$\begin{aligned}\{N\} &= [A]\{\varepsilon^p\}^0 + [B]\{\kappa\} \\ \{M\} &= [B]\{\varepsilon^p\}^0 + [D]\{\kappa\}\end{aligned}$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$

- definindo a espessura da k -ésima camada como $t_k = h_k - h_{k-1}$, a matriz $[A]$ pode ser escrita como:

$$[A] = \sum_{k=1}^n t_k [\bar{Q}^p]_k$$



$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n t_k \bar{Q}_{ijk}^p \quad i, j = x, y, s$$

- a matriz $[A]$ é a matriz de rigidez à extensão ou de rigidez do laminado no plano



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$

- como as matrizes $[\bar{Q}^p]_k$ são simétricas, então a matriz $[A]$ é simétrica

$$[A] = \sum_{k=1}^n t_k [\bar{Q}^p]_k \longrightarrow \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n t_k \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k$$

- a matriz $[A]$ depende apenas das espessuras e das matrizes $[\bar{Q}^p]$ de cada camada; a matriz $[A]$ independe da ordem de laminação das camadas



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$

- definindo a coordenada z média da k -ésima camada como $\bar{h}_k = (h_k + h_{k-1})/2$, a matriz $[B]$ pode ser escrita como:

$$[B] = \sum_{k=1}^n t_k \bar{h}_k [\bar{Q}^p]_k$$



$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n t_k \bar{h}_k \bar{Q}_{ijk}^p \quad i, j = x, y, s$$

- a matriz $[B]$ é a matriz de acoplamento entre esforços no plano e curvaturas no plano médio ou entre momentos resultantes e deformações do plano médio da placa



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$

- como as matrizes $[\bar{Q}^p]_k$ são simétricas, então a matriz $[B]$ é simétrica

$$[B] = \sum_{k=1}^n t_k \bar{h}_k [\bar{Q}^p]_k \longrightarrow \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n t_k \bar{h}_k \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k$$

- a matriz $[B]$ depende das espessuras e das matrizes $[\bar{Q}^p]$ de cada camada e da ordem de laminação das camadas que afeta \bar{h}_k



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$

- a matriz $[D]$ pode ser escrita como:

$$[D] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{3} \right) [\bar{Q}^p]_k \quad \longrightarrow \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \bar{Q}_{ij_k}^p \quad i, j = x, y, s$$

- a matriz $[D]$ é a rigidez do laminado à flexão e torção, relacionando os momentos resultantes com as curvaturas do plano médio



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$

- como as matrizes $[\bar{Q}^p]_k$ são simétricas, então a matriz $[D]$ é simétrica

$$[D] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{3} \right) [\bar{Q}^p]_k \Rightarrow \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{3} \right) \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k$$

- a matriz $[D]$ depende das espessuras, das matrizes $[\bar{Q}^p]$ de cada camada e da ordem de laminação das camadas que afeta h_k

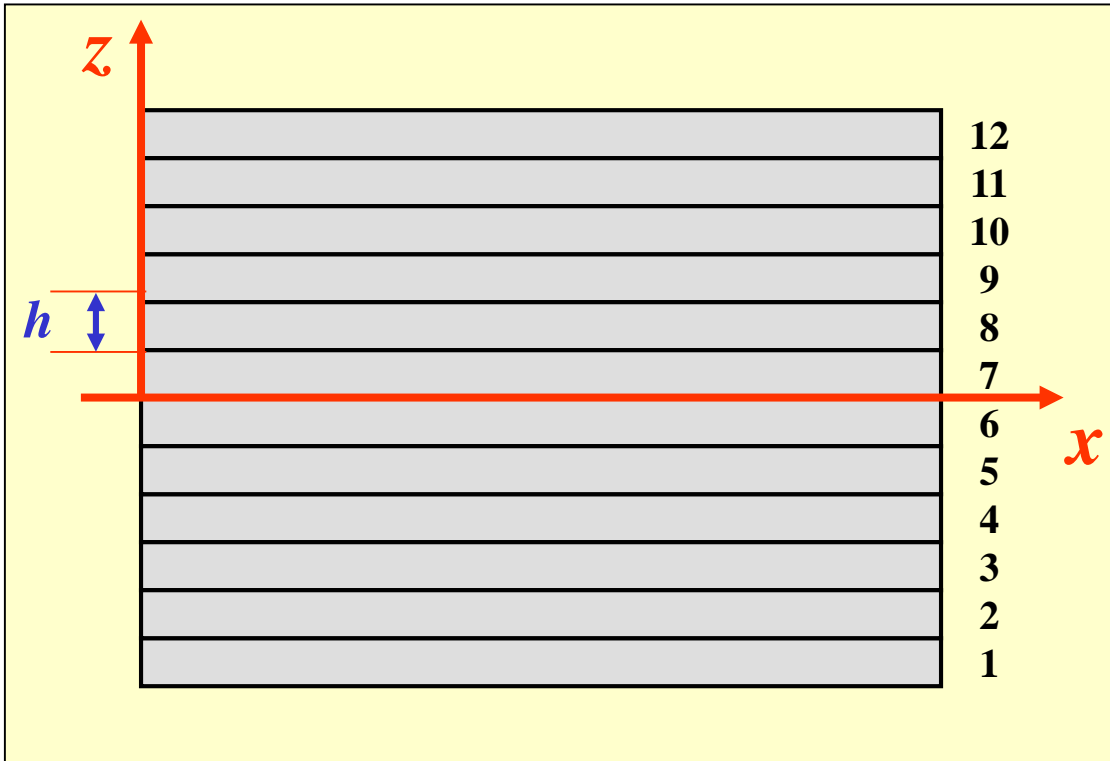


RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$

Exemplo : pesos da matriz $[D]$

$$\frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{3} = \chi_k \frac{h^3}{3}$$



k	h_k	h_{k-1}	χ_k
12	$6h$	$5h$	91
11	$5h$	$4h$	61
10	$4h$	$3h$	37
9	$3h$	$2h$	19
8	$2h$	h	7
7	h	0	1
6	0	$-h$	1
5	$-h$	$-2h$	7
4	$-2h$	$-3h$	19
3	$-3h$	$-4h$	37
2	$-4h$	$-5h$	61
1	$-5h$	$-6h$	91



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

relações constitutivas

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^p\}^0 + [B]\{\kappa\}$$

- substituindo as definições das matrizes $[A]$ e $[B]$:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0 + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

relações constitutivas

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^p\}^0 + [D]\{\kappa\}$$

- substituindo as definições das matrizes $[B]$ e $[D]$:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0 + \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

relações constitutivas

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^p\}^0 + [B]\{\kappa\}$$

$$\{N\} = [B]\{\varepsilon^p\}^0 + [D]\{\kappa\}$$

- combinando as expressões anteriores

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0 + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0 + \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

relações constitutivas

- rearranjando em uma única equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} & B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} & B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \\ B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} & D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} & D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

relações constitutivas

- uma equação matricial alternativa para as relações constitutivas do laminado no plano é:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^p\}^0 \\ \{K\} \end{Bmatrix}$$

- a equação acima permite calcular os esforços e momentos resultantes para dadas deformações e curvaturas do plano médio



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

relações constitutivas

- para se calcular as deformações e curvaturas do plano médio para esforços e momentos resultantes dados, é necessário trabalhar com a expressão inversa

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon^P\}^0 \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [a] & [b] \\ [b]^T & [d] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}$$

- deve-se notar que a matriz $[b]$ não é simétrica



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

relações constitutivas

- em forma explícita:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xs} & b_{xx} & b_{xy} & b_{xs} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{ys} & b_{yx} & b_{yy} & b_{ys} \\ a_{xs} & a_{ys} & a_{ss} & b_{sx} & b_{sy} & b_{ss} \\ b_{xx} & b_{yx} & b_{sx} & d_{xx} & d_{xy} & d_{xs} \\ b_{xy} & b_{yy} & b_{sy} & d_{xy} & d_{yy} & d_{ys} \\ b_{xs} & b_{ys} & b_{ss} & d_{xs} & d_{ys} & d_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix}$$



RIGIDEZ DE LAMINADOS NO PLANO

relações constitutivas

- para se calcular as matrizes $[a]$, $[b]$ e $[d]$ é necessário inverter a matriz 6×6 completa
- isto é, em geral: $[a] \neq [A]^{-1}$, $[b] \neq [B]^{-1}$, $[d] \neq [D]^{-1}$
- para laminados em que $[B]$ é nula (não há acoplamento), então valem as relações: $[a] = [A]^{-1}$, $[b] = [0]$ e $[d] = [D]^{-1}$