Mecânica dos Fluidos II (PME 3330)
Gabarito Segunda Prova - 2017

1. (4 pontos) Em uma posição x_0 ao longo de uma camada limite turbulenta, a espessura da camada limite é δ_0 e a velocidade e pressão na corrente livre são respectivamente U_0 e p_0. Utilizando a equação integral de von Kármán, determinar a velocidade $U(x)$ e a pressão $p(x)$ ($x \geq x_0$) para que a espessura da camada limite não mude com a posição. O gradiente de pressão é positivo ou negativo? Por quê?
Para realizar o cálculo, considere um perfil de velocidade da forma:

$$\frac{u}{U} = f(\eta) = \begin{cases} \eta^{1/7} & \text{para} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \\ 1 & \text{para} \quad \eta > 1 \end{cases}$$

onde $\eta = y/\delta$. Considerar também um coeficiente de atrito de filme da forma:

$$c_f = C\, Re_\delta^{-1/6} \text{ , onde } C = 0{,}02 \text{ e } Re_\delta = \frac{\rho U \delta}{\mu} .$$

Fórmulas: coeficiente de atrito de filme, Bernoulli, equação integral de von Kármán, espessura de deslocamento, espessura de momento:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \ ; \ p + \frac{1}{2}\rho U^2 = cte \ ; \ \frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx}\left(U^2\theta\right) + U\,\delta^*\frac{dU}{dx} \ ; \ \delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right)dy \ ; \ \theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy$$

Ajudas para o cálculo: $\int_0^1 \left(1 - x^{1/n}\right)dx = \frac{1}{n+1}$; $\int_0^1 x^{1/n}\left(1 - x^{1/n}\right)dx = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$;

Solução:
Calculamos as espessuras de deslocamento e de momento:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right)dy = \delta\int_0^1 [1 - f(\eta)]\,d\eta = \frac{1}{8}\delta$$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy = \delta\int_0^1 f(\eta)[1 - f(\eta)]\,d\eta = \frac{7}{72}\delta$$

Se a espessura da camada é constante, as espessuras de deslocamento e momento também são. Assim, resulta:

$$\frac{1}{2}c_f\, U^2 = U\frac{dU}{dx}\left(\delta^* + 2\theta\right)$$

Substituindo na equação integral, supondo $\delta = cte = \delta_0$, obtemos:

$$\frac{1}{2}C\,\rho^{-1/6}\,U^{-1/6}\,\delta_0^{-1/6}\,\mu^{1/6}\,U^2 = U\frac{dU}{dx}\delta_0\left(\frac{1}{8} + 2\times\frac{7}{72}\right) = \frac{23}{72}\delta_0\,U\frac{dU}{dx}$$

Isolando $\frac{dU}{dx}$ obtemos: $\frac{dU}{dx} = \frac{36}{23}C\,\rho^{-1/6}\,\delta_0^{-7/6}\,\mu^{1/6}\,U^{5/6} = C_U\,U^{5/6}$, onde $C_U = \frac{36}{23}C\,\rho^{-1/6}\,\delta_0^{-7/6}\,\mu^{1/6}$.
Integrando com a condição de contorno $U(x_0) = U_0$, resulta:

$$U^{-5/6}\,dU = C_U\,dx \quad \Rightarrow \quad 6\left(U^{1/6} - U_0^{1/6}\right) = C_U\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad U = \left[U_0^{1/6} + \frac{1}{6}C_U\,(x - x_0)\right]^6$$

Da equação de Bernoulli, $p_0 + \frac{1}{2}\rho U_0^2 = p + \frac{1}{2}\rho U^2 \quad \Rightarrow \quad p = p_0 + \frac{1}{2}\rho\left\{U_0^2 - \left[U_0^{1/6} + \frac{1}{6}C_U\,(x - x_0)\right]^{12}\right\}$.

Como a velocidade aumenta, a pressão deve diminuir, de maneira que o gradiente de pressão é negativo para que a espessura permaneça constante (se for zero, a espessura cresceria segundo visto na teoria).

2. (6 pontos) Um viscosímetro de esfera descendente está baseado na determinação da viscosidade através da medição da velocidade terminal de queda de um esfera de diâmetro D em um líquido de massa específica ρ e viscosidade μ, supondo que o regime está na faixa de escoamento de inércia desprezível. Para esse regime, $C_D = \dfrac{24}{Re_D}$, resultado válido para $Re_D \le 1$. Considerar que a esfera é maciça e de massa específica $\rho_b > \rho$ e que a gravidade é g.

a) Determinar a velocidade terminal de queda V_∞ através de um balanço de forças incluindo o empuxo. Uma vez calculada a viscosidade da relação da velocidade terminal, que condição deve ser satisfeita para que a solução seja consistente com as hipóteses do problema? (1,5 pontos)

b) Se a esfera é solta na superfície do líquido com velocidade inicial nula, determinar a evolução temporal da velocidade em função do tempo. Obter uma equação diferencial em função das variáveis adimensionais $V^* = V/V_\infty$ e $t^* = t/T$, onde T e um tempo característico que deve ser determinado. Supor que a força de arrasto fica determinada pelo coeficiente de arrasto utilizando a velocidade instantânea. Com a solução, determinar o tempo t_d em que a velocidade atinge a fração η da velocidade terminal ($V^* = \eta$; usualmente $\eta = 0{,}99$). (2,5 pontos)

c) Obter uma equação diferencial para a distância adimensional percorrida pela esfera $z^* = \dfrac{z}{V_\infty T}$ e determinar a distância z_d necessária para atingir a condição $V^* = \eta$. (2 pontos)

Fórmulas: volume da esfera: $\dfrac{1}{6}\pi D^3$, área do círculo: $\dfrac{1}{4}\pi D^2$, $\dfrac{dV}{dt} = V\dfrac{dV}{dz}$.

Ajudas para o cálculo: $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) + cte$, $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1-x} = -x - \ln(1-x) + cte$.

Solução:

a) Considerando o eixo z na direção vertical descendente e com origem na superfície de líquido, a equação de Newton para a bola, considerando forças de peso, empuxo e arrasto, fornece:

$$(\rho_b - \rho) g\, \upsilon_b - C_D \frac{1}{2}\rho V^2 A_f = \rho_b\, \upsilon_b \frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_b}\right) g - \frac{1}{2} C_D \frac{\rho_w}{\rho_b}\frac{A_f}{\upsilon_b} V^2$$

$$\frac{A_f}{\upsilon_b} = \frac{\frac{1}{4}\pi D^2}{\frac{1}{6}\pi D^3} = \frac{3}{2D} \quad ; \quad C_D = \frac{24}{Re_D} = \frac{24\,\mu}{\rho_w V D}$$

Substituindo, obtemos $\dfrac{dV}{dt} = \left(1 - \dfrac{\rho}{\rho_b}\right) g - \dfrac{1}{2}\dfrac{24\,\mu}{\rho_w V D}\dfrac{\rho_w}{\rho_b}\dfrac{3}{2D} V^2 = \left(1 - \dfrac{\rho}{\rho_b}\right) g - \dfrac{18\,\mu}{\rho_b D^2} V$

A velocidade terminal resulta de zerar a derivada da velocidade: $V_\infty = \left(1 - \dfrac{\rho}{\rho_b}\right)\dfrac{\rho_b\, g\, D^2}{18\,\mu}$

Para que a medição de viscosidade seja válida, deve ser $\dfrac{\rho V_\infty D}{\mu} = \left(1 - \dfrac{\rho}{\rho_b}\right)\dfrac{\rho\, \rho_b\, g\, D^3}{18\,\mu^2} \le 1$

b) Adimensionalizando a velocidade:

$$\left(1 - \frac{\rho}{\rho_b}\right)\frac{\rho_b g\, D^2}{18\,\mu}\frac{dV^*}{dt} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_b}\right) g - \frac{18\,\mu}{\rho_b D^2}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_b}\right)\frac{\rho_b g\, D^2}{18\,\mu} V^*$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_b D^2}{18\,\mu}\frac{dV^*}{dt} = 1 - V^*$$

Fazendo $T = \dfrac{\rho_b D^2}{18\,\mu}$, resulta finalmente:

$$\frac{dV^*}{dt^*} = 1 - V^*$$

Separando variáveis e integrando: $\frac{dV^*}{1-V^*} = dt^* \Rightarrow \int \frac{dV^*}{1-V^*} = -\ln\left(1-V^*\right) = t^* + C$

Da condição inicial $V^*(0) = 0$ resulta $C = 0$, da onde:

$$1 - V^* = \exp\left(-t^*\right) \quad \Rightarrow \quad V^* = 1 - \exp\left(-t^*\right)$$

O tempo para $V^* = \eta$ resulta $\eta = 1 - \exp\left(-t_d^*\right) \quad \Rightarrow \quad t_d^* = -\ln(1-\eta) \quad \Rightarrow \quad t_d = T\, t_d^*$

Para $\eta = 0{,}99$, resulta $t_{99}^* = -\ln(1 - 0{,}99) = 4{,}605$.

c) Adimensionalizando $\frac{dV^*}{dt^*} = V^* \frac{dV^*}{dz^*}$, com $z^* = \frac{z^*}{V_\infty\, T}$, resulta $\frac{dV^*}{dz^*} = \frac{1-V^*}{V^*}$. Separando variáveis e integrando: $\frac{V^*\, dV^*}{1-V^*} = dz^* \quad \Rightarrow \quad \int \frac{V^*\, dV^*}{1-V^*} = -V^* - \ln\left(1-V^*\right) = z^* + C$

Da condição inicial $V^*\left(z^* = 0\right) = 0$ resulta $C = 0$, da onde:

$$-V^* - \ln\left(1-V^*\right) = z^*$$

A distância para $V^* = \eta$ resulta $-\eta - \ln(1-\eta) = z_d^* \quad \Rightarrow \quad z_d = V_\infty\, T\, z_d^*$

Para $\eta = 0{,}99$, resulta $z_{99}^* = -0{,}99 - \ln(1 - 0{,}99) = 3{,}615$.

Substituindo a velocidade em função do tempo, obtemos a distância em função do tempo:

$$z^* = -1 + \exp\left(-t^*\right) + t^* = t^* - \left[1 - \exp\left(-t^*\right)\right]$$