

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Equações de Navier-Stokes

Captura de choques

Algoritmos para Problemas Hiperbólicos (continuação)

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor

Prof. Bruno S. Carmo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

2017



Sumário

1 Equações de Navier-Stokes

2 Técnicas de captura de choques



Sumário

1 Equações de Navier-Stokes

2 Técnicas de captura de choques



Equações de Navier-Stokes em 2d I

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ (E+p)u\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ (E+p)v\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)u+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)v+\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\ \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)v+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)u+\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\end{pmatrix}$$



Equações de Navier-Stokes em 2d II

Nestas equações admitimos que o fluido é um gás newtoniano e que a hipótese de Stokes é válida para a segunda viscosidade.

μ e κ são a viscosidade dinâmica e a condutividade térmica, respectivamente.

Usamos também a equação de estado para relacionar pressão, massa específica e temperatura: $p = \rho RT$.

Podemos adimensionalizar essas equações utilizando os valores de referência V_∞, ρ_∞, μ_∞ e κ_∞. Aparecem então os seguintes adimensionais:

$$Pr_\infty = \frac{\mu_\infty c_p}{\kappa_\infty}, \quad Re_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty}.$$

Podemos então reescrever as equações na forma adimensional:



Equações de Navier-Stokes em 2d III

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ (E+p)u\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ (E+p)v\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{Re_\infty}\left[\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{3}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ \frac{2}{3}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)u+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)v+\kappa\frac{\gamma}{Pr_\infty}\frac{\partial T}{\partial x}\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ \frac{2}{3}\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\ \frac{2}{3}\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)v+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)u+\kappa\frac{\gamma}{Pr_\infty}\frac{\partial T}{\partial y}\end{pmatrix}\right]$$



Equações de Navier-Stokes em 2d IV

Reescrevendo em forma compacta:

$$\mathbf{u}_t + \nabla \cdot \mathbf{F} = Re_\infty^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}^\nu$$

Esta divisão permite tratar as contribuições viscosas e não viscosas separadamente, o que é interessante devido às diferentes propriedades matemáticas de cada uma.

Para discretizar esta equação utilizando Galerkin Descontínuo, tratamos o termo de fluxo convectivo $\mathbf{F}$ como foi feito para a eq. de Euler, e o fluxo difusivo $\mathbf{F}^\nu$ com os fluxos numéricos vistos na aula 16 (Formulação DG para problemas elípticos e parabólicos).



Implementação do código DG

- Discutiremos aqui alguns detalhes da implementação do método de Galerkin descontínuo explícito no tempo, com discretização temporal de primeira ordem.
- Métodos de ordem mais elevada podem ser facilmente construídos a partir das ideias apresentadas aqui, usando métodos multi-passos.
- Dividiremos o algoritmo em dois níveis: um superior e outro relativo ao operador de Navier–Stokes.



Nível superior do algoritmo DG

- Leia as condições iniciais $\mathbf{u}_0$ e projete no espaço polinomial;
- Execute o laço no tempo:
  - Calcule o operador de Navier–Stokes $\mathbf{U}_f^n$;
  - Avance no tempo: $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{U}_f^n$. Atualize o tempo: $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$;
  - Atualize as condições de contorno tempo dependentes;
  - Se t^{n+1} é menor que o tempo final, continue, senão saia do laço;
- Escreva a saída e armazene os resultados no espaço polinomial.



Algoritmo para o operador de Navier–Stokes

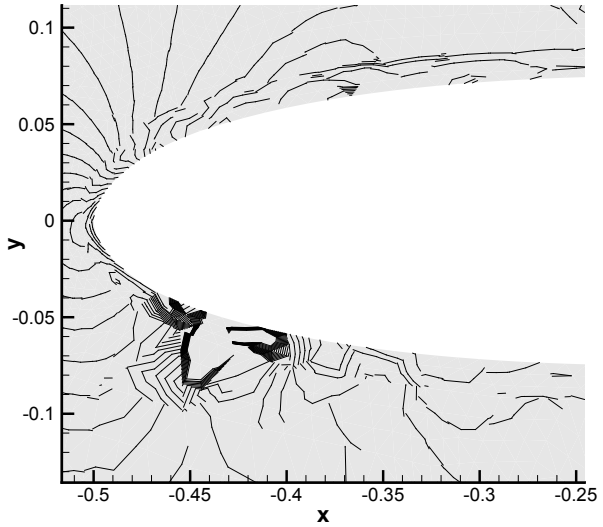
- Calcule a contribuição convectiva $\mathbf{U}_{f,c}$
  - Calcule os valores característicos na fronteira $\mathbf{U}^n_{f,\mathrm{cb}}$;
  - Calcule a divergência do fluxo Euler no interior $\mathbf{U}^i_{f,c}$;
  - Faça $\mathbf{U}_{f,c} = \mathbf{U}^n_{f,\mathrm{cb}} + \mathbf{U}^i_{f,c}$;
- Armazene os valores característicos nas fronteiras externas
- Calcule as contribuições viscosas $\mathbf{U}_{f,v}$;
- Calcule o fluxo total $\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_{f,c} + \mathbf{U}_{f,v}$;
- Sobrescreva os valores nas fronteiras externas $U^n_{f,b} = \mathbf{U}^n_{f,\mathrm{cb}}$.

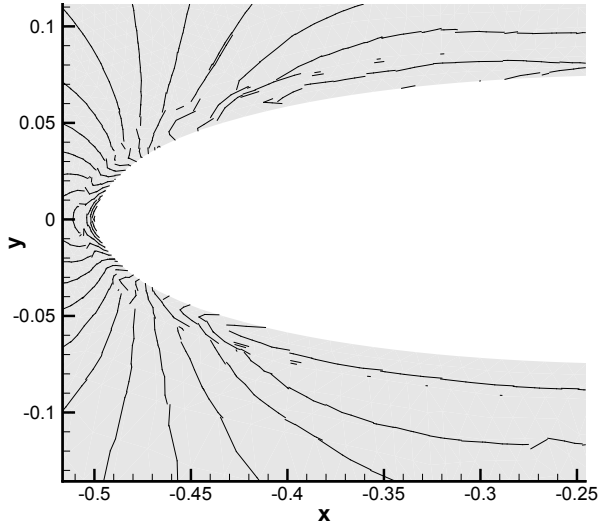


Detalhes sobre o algoritmo DG

Todas as operações no procedimento são feitos nos pontos de quadratura, ou seja, no espaço físico.

De modo geral, como na discretização das equações de Navier–Stokes para escoamento compressível na forma conservativa aparecem termos cúbicos, recomenda-se usar $Q = 2P$. O uso de um número pequeno de pontos de quadratura pode levar a instabilidades.

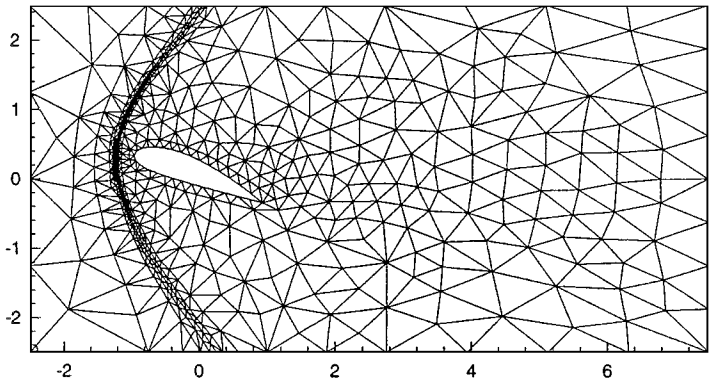


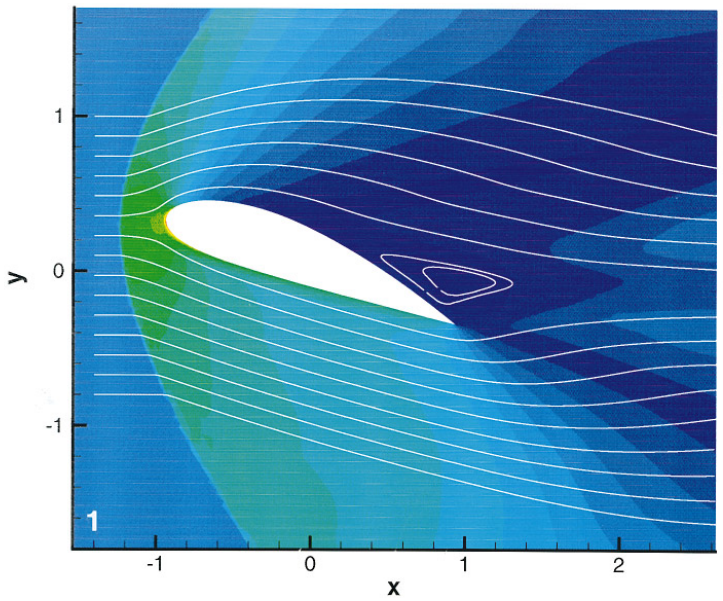




Exemplo de aplicação 1

Escoamento supersônico ($Ma = 2$) ao redor de perfil NACA4420 com ângulo de ataque 20°– malha e contornos de massa específica (Lomtev, Quillen, Karniadakis, 1998).

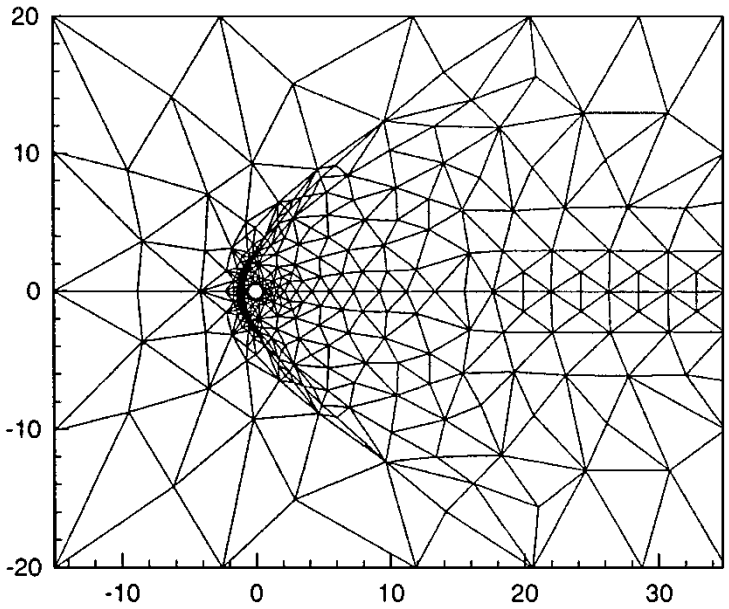


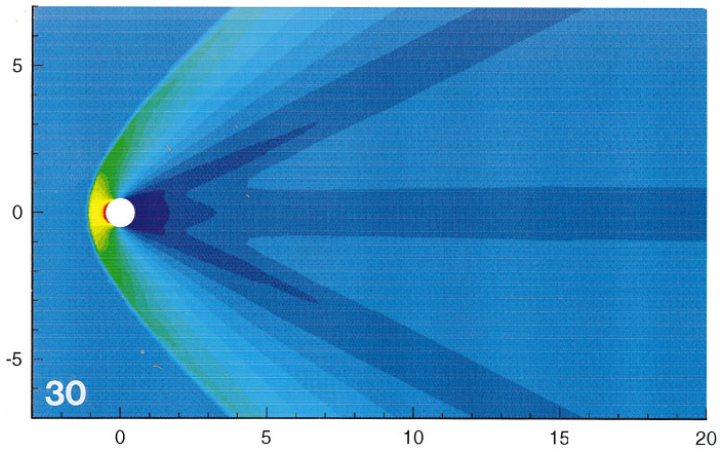




Exemplo de aplicação 2

Escoamento supersônico ($Ma = 2$) ao redor de cilindro com $Re = 100$, com P variável ($P = 1$ antes do choque, $P = 3$ depois do choque e $P = 6$ na esteira) – malha e contornos de massa específica (Lomtev, Quillen, Karniadakis, 1998).







Sumário

1 Equações de Navier-Stokes

2 Técnicas de captura de choques



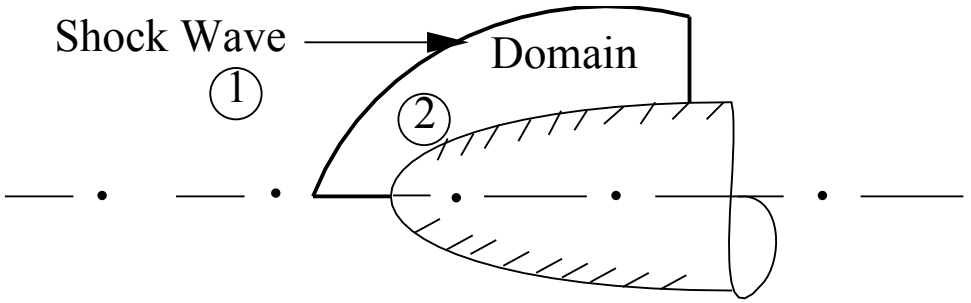
Técnicas de captura de choques

- Para escoamentos com números de Mach altos, os choques são normalmente bastante agudos e podem ser modelados como descontinuidades.
- Para choques agudos, técnicas de captura de choques podem ser utilizadas de forma que o choque seja tratado como uma fronteira livre e se evite calcular derivadas através do choque.
- Métodos espectrais funcionam bastante bem com a aplicação destas técnicas e proporcionam resultados bastante acurados.
- Uma outra alternativa é utilizar dissipação (viscosidade) artificial.



Expressão da velocidade do choque I

Considere um escoamento supersônico ao redor de um corpo rombudo, denotando as condições a montante do choque (conhecidas) pelo índice 1 e condições a jusante do choque pelo índice 2.



O domínio computacional está compreendido, então, entre o choque (fronteira livre) e o corpo.

A velocidade do choque é calculada integrando a aceleração do choque no tempo, e a posição do choque é atualizada integrando a velocidade do choque no tempo.



Expressão da velocidade do choque II

Assumindo que todas as variáveis estão adimensionalizadas pelos respectivos valores ao longe, aplicamos as relações de Rankine–Hugoniot, que descrevem as variações de pressão e velocidade normal através do choque:

$$P_2 = P_1 + \ln\left(V_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}\right) - \ln\left(\frac{\gamma+1}{2}\right),$$

$$V_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} V_1^{-1},$$

onde $P = \ln p$, $V_i = \mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{n} - w n_1$ é a componente normal ao choque da velocidade do gás, sendo que w é a velocidade do choque e o versor $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ é normal ao choque.



Expressão da velocidade do choque III

Derivando no tempo, obtemos

$$\dot{p}_2 = G\dot{V}_1, \qquad \dot{V}_2 = F\dot{V}_1,$$

onde

$$F = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} - \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)V_1^2}, \quad G = \frac{2V_1}{V_1^2 - (\gamma - 1)/2},$$

com a condição adicional de que o escoamento ao longe é independente do tempo.



Expressão da velocidade do choque IV

Substituindo essas expressões na equação da pressão derivada com uma condição característica, obtemos a aceleração do choque

$$\dot{w} = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{n}}(c_0 G - \gamma F) - w\dot{n}_1(c_0 G - \gamma F + \gamma) + \gamma \mathbf{u}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{n}} + c_0 C}{n_1(c_0 G - \gamma F + \gamma)},$$

onde

$$C = (\mathbf{u}_1 - c_0 \boldsymbol{n}) \cdot \nabla P + R_p - \frac{\gamma}{c_0}(n_1 R_u + n_2 R_v),$$

sendo R_p, R_u e R_v as características para p, u e v.



Dissipação artificial constante no elemento

Discutiremos aqui a introdução de viscosidade artificial em elementos próximos aos choques como um modo de evitar oscilações espúrias. A técnica é baseada no trabalho de Persson & Peraire (2006) e foi implementada por Moura (2012) nas equações de Euler bidimensionais.

As equações de Euler são modificadas pela inclusão de um termo viscoso

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{F}_v(\mathbf{u}), \quad \mathbf{F}_v(\mathbf{u}) = \epsilon(\mathbf{u}) \nabla \mathbf{u}$$

onde o fluxo viscoso é dado por $\mathbf{F}_v = (\mathbf{F}_v^x, \mathbf{F}_v^y)$.

Para a discretização dos termos viscosos, pode-se utilizar o esquema modificado de Bassy-Rebay (BR2), no qual a equação de segunda ordem acima é dividida em um sistema de duas equações de primeira ordem, com $\mathbf{G} - \nabla \mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{F}_v = \epsilon(\mathbf{u})\mathbf{G}$.



Dissipação artificial: cálculo do coeficiente de dissipação ϵ I

Para calcular o coeficiente de dissipação em cada elemento, é necessário implementar um sensor de oscilação σ. Usaremos q e $\bar{q}$ para representar a expansão completa (contendo todos os P modos) e truncada (contendo somente $P-1$ modos) de alguma propriedade derivada da expansão de $\mathbf{u}$, ou seja,

$$q = \sum_{m=1}^{P} c_m \phi_m(\xi_1, \xi_2), \qquad \bar{q} = \sum_{m=1}^{P-1} c_m \phi_m(\xi_1, \xi_2).$$

O sensor σ pode ser definido como a razão das normas L^2 (dentro de Ω^e) de $q - \bar{q}$ e q,

$$\sigma = \frac{||q - \bar{q}||_{L^2}^2}{||q||_{L^2}^2} = \left(\sum_{m=P-1}^{P} c_m^2 ||\phi_m||_{L^2}^2 \right) / \left(\sum_{m=1}^{P} c_m^2 ||\phi_m||_{L^2}^2 \right)$$



Dissipação artificial: cálculo do coeficiente de dissipação ϵ II

Bons resultados são obtidos quando se utiliza o número de Mach local como a variável q.

A dissipação artificial ϵ é então introduzida gradualmente da seguinte forma

$$\epsilon = \begin{cases} 0, & \text{se } s < s_0 - \kappa, \\ \frac{1}{2}\epsilon_0 \left[1 + \text{sen}\, \frac{\pi(s - s_0)}{2\kappa}\right], & \text{se } s_0 - \kappa \leq s \leq s_0 + \kappa, \\ \epsilon_0, & \text{se } s > s_0 + \kappa, \end{cases}$$

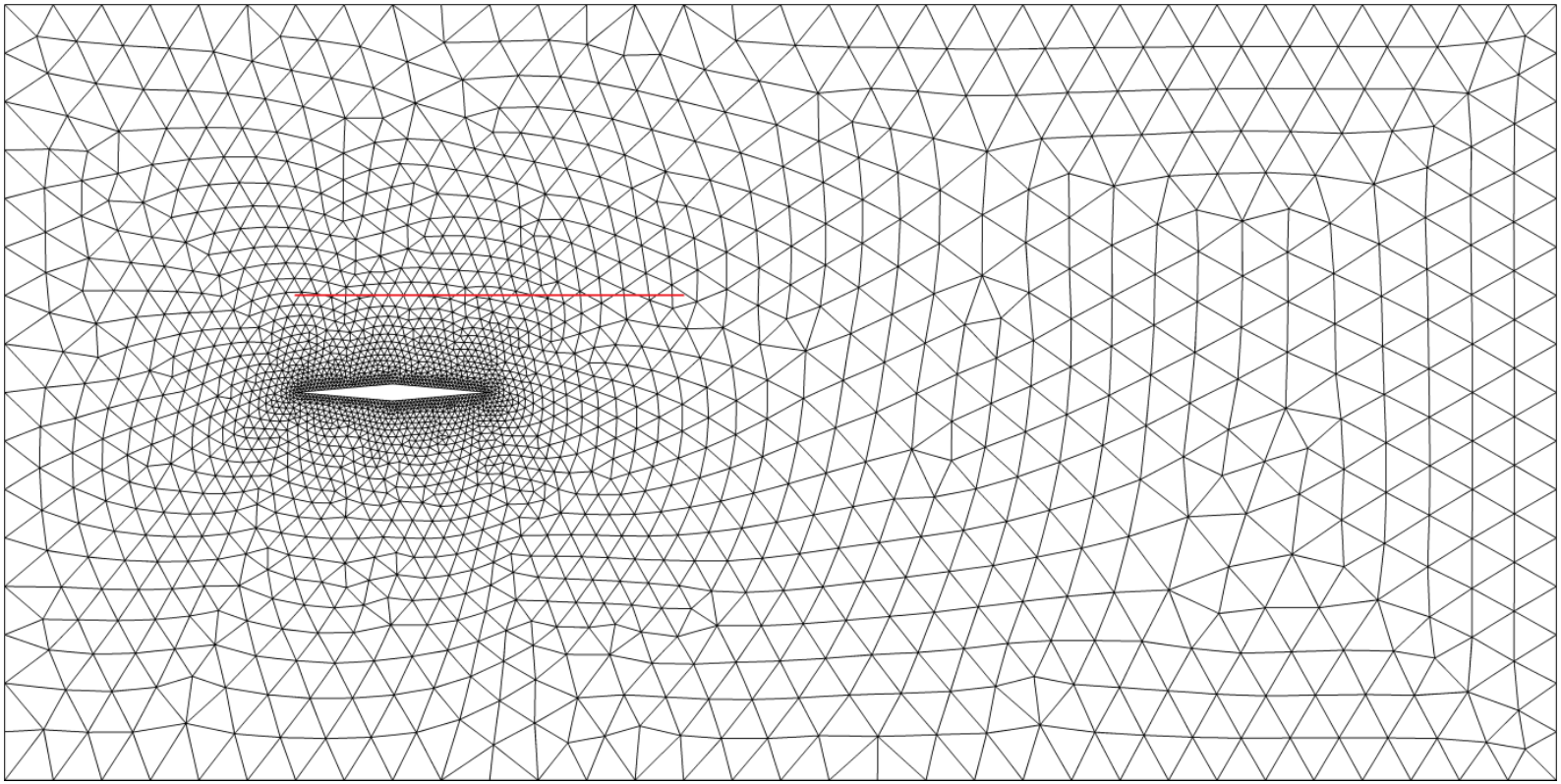
onde $s = \log_{10} \sigma$, $s_0 = -(A + B \log_{10} P)$ e $\epsilon_0 = Ch_e/P$.

Valores típicos para as constantes no caso bidimensional são $A \approx 4$, $B \approx 4$, $C \approx 0{,}1$ e $\kappa \approx 0{,}5$, mas eles são fortemente dependentes do caso sendo estudado e devem ser ajustados para fornecer resultados ótimos. Já h_e pode ser tomado como o comprimento da maior aresta do elemento.



Dissipação artificial: resultados (Moura, 2012) I

Escoamento ao redor de perfil diamante localizado em duto com $Ma = 1{,}5$. Contornos de número de Mach:





Dissipação artificial: resultados (Moura, 2012) II

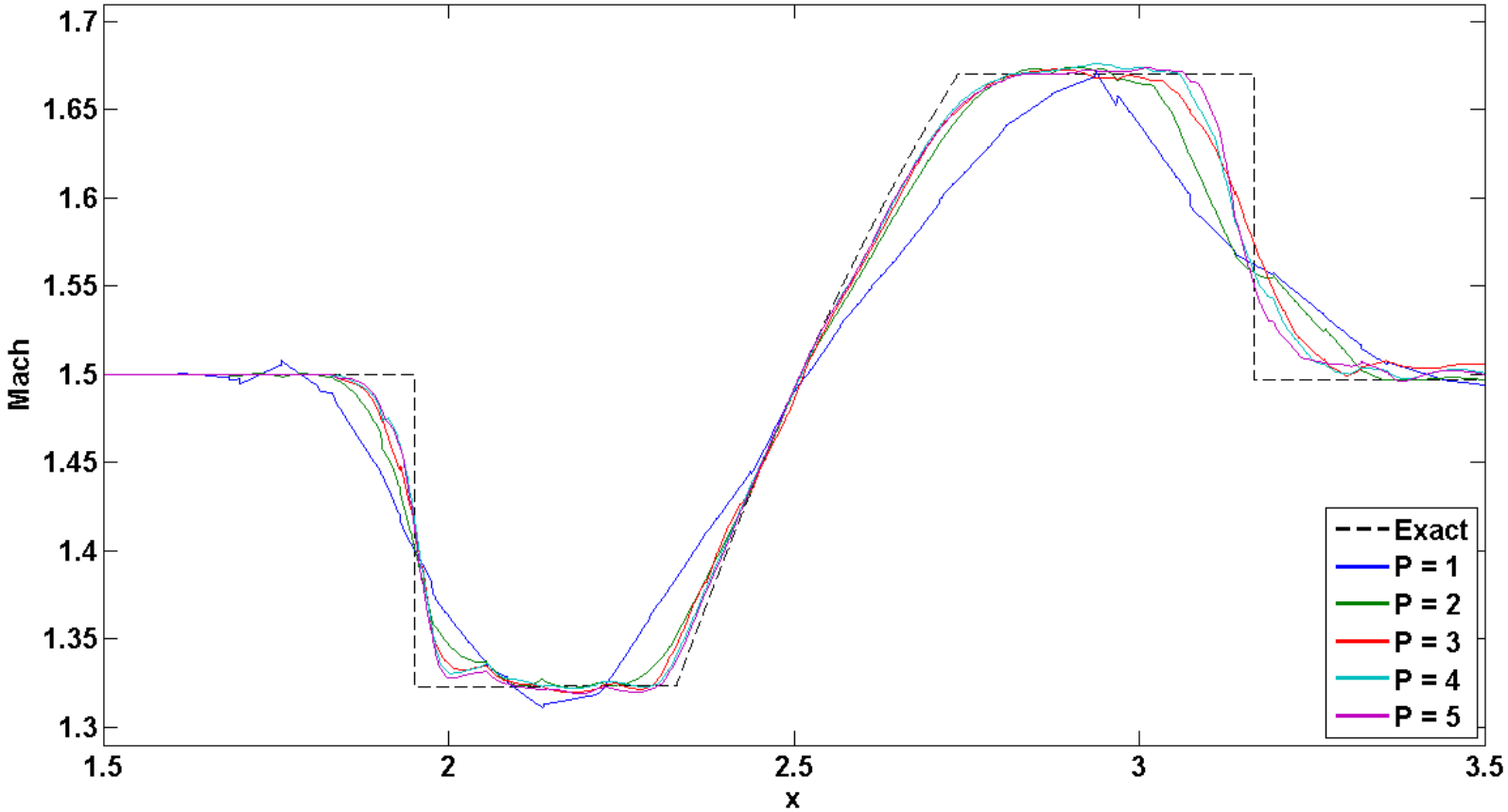
Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Equações de Navier-Stokes

Captura de choques

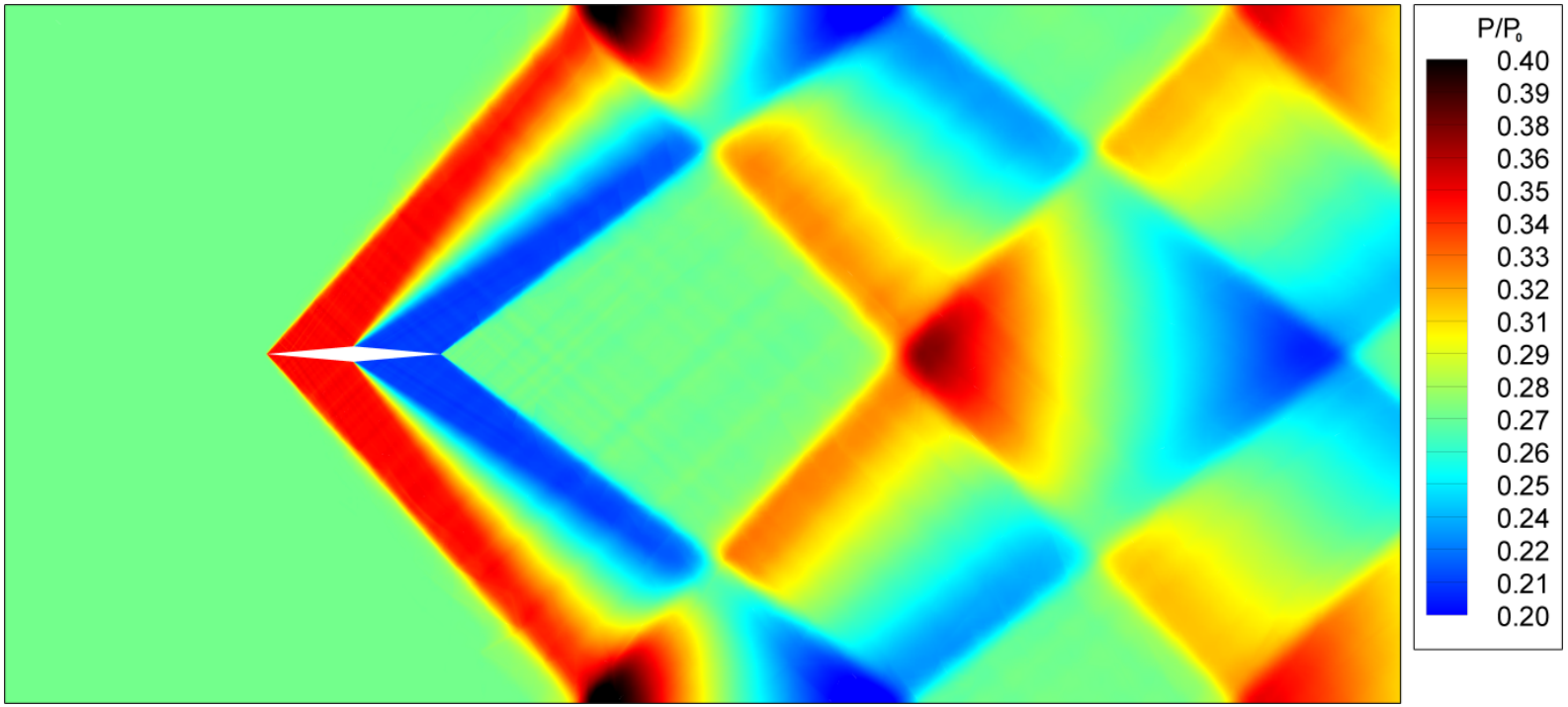
Escoamento ao redor de perfil diamante localizado em duto com $Ma = 1{,}5$. Valores de número de Mach local na linha vermelha:





Dissipação artificial: resultados (Moura, 2012) III

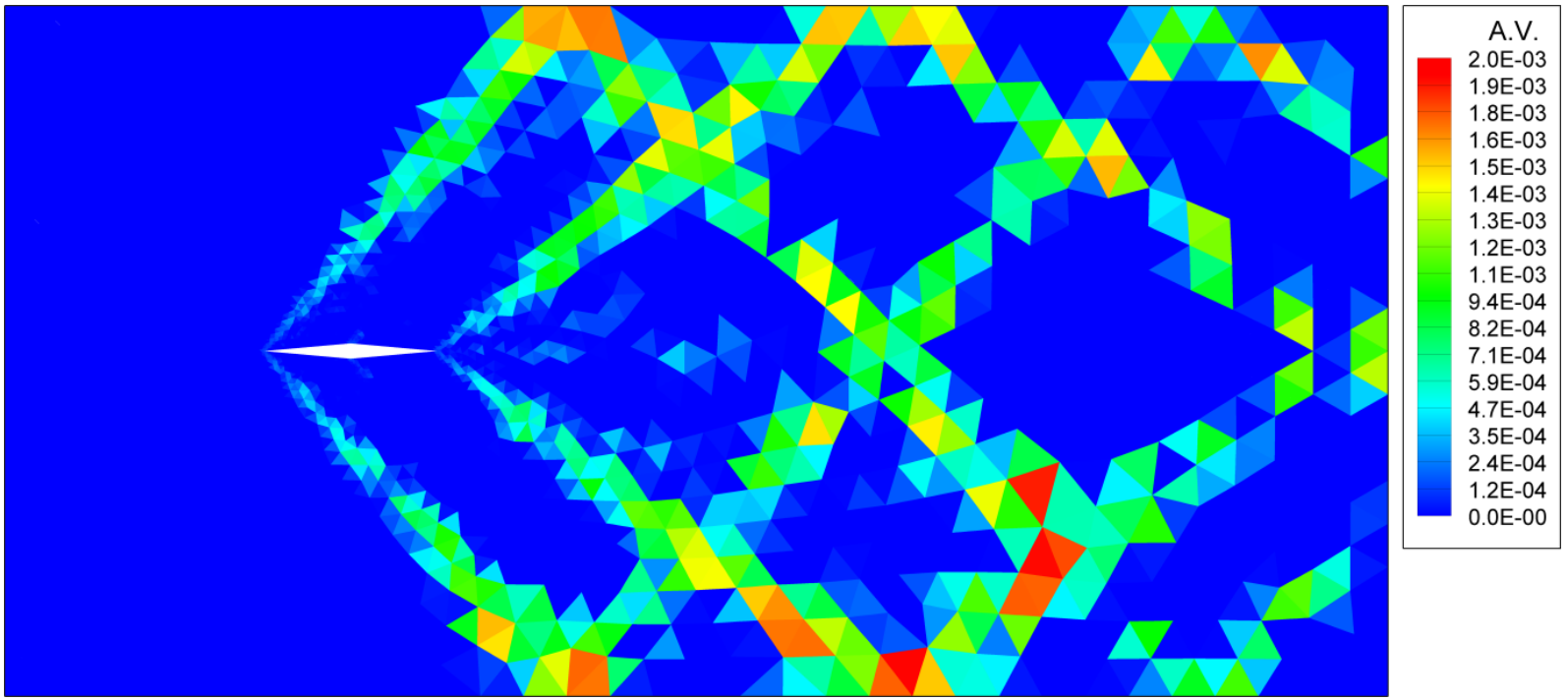
Escoamento ao redor de perfil diamante localizado em duto com $Ma = 1{,}5$. Contornos de pressão estática normalizada para $P = 5$:





Dissipação artificial: resultados (Moura, 2012) IV

Escoamento ao redor de perfil diamante localizado em duto com $Ma = 1{,}5$. Contornos de viscosidade artificial ϵ para $P = 5$:





Dissipação artificial: resultados (Moura, 2012) V

Escoamento ao redor de perfil diamante localizado em duto com $Ma = 1{,}5$. Ampliação dos contornos de pressão estática normalizada para $P = 5$, mostrando a capacidade de resolução de choque no interior dos elementos:

