



Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Algoritmos para Problemas Hiperbólicos

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem
com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência
de Calor

Prof. Bruno S. Carmo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

2017



Introdução

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

- Métodos espectrais são particularmente eficazes na solução de fenômenos de propagação governados por equações hiperbólicas de conservação;
- Isto se reflete na tradicional aplicação em áreas onde é crucial que se tenha uma boa precisão para longas integrações temporais, como é o caso de meteorologia, oceanografia e sismologia.
- Dificuldades com o fenômeno de Gibbs “atrasaram” a aplicação em outras áreas onde soluções não suaves estão presentes, tais como o escoamento compressível e de fluidos magnéticos.



Sumário

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

1 Formulação conservativa

2 Monotonicidade

3 Equações de Euler

4 Equações de águas rasas



Sumário

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

1 Formulação conservativa

2 Monotonicidade

3 Equações de Euler

4 Equações de águas rasas



Formulação conservativa

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Consideraremos uma lei de conservação hiperbólica de um escalar u , com condições iniciais e de contorno apropriadas,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0.$$

Uma formulação conservativa é tipicamente necessária para choques em soluções descontínuas sejam propagados com a velocidade correta. Este tipo de formulação é natural para o método de volumes finitos e para a formulação de Galerkin descontínua.

A seguir, desenvolveremos procedimentos de cálculo de média na célula e de reconstrução na face úteis para uma discretização de elementos espectrais com expansões **nodais**.



Procedimento de cálculo de média na célula

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

No caso unidimensional, a média de uma quantidade escalar, \bar{u}_i , é dada por

$$\bar{u}_i \equiv \bar{u}(x_i, t) = \frac{1}{x_{i+} - x_{i-}} \int_{x_{i+}}^{x_{i-}} u(x, t) dx.$$

Aplicando esta definição, podemos integrar a equação hiperbólica numa célula que se estende de x_{i+} a x_{i-} , obtendo

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{f(u_{i+}) - f(u_{i-})}{\Delta x_i} = 0. \quad (\Delta x_i = x_{i+} - x_{i-})$$

Esta equação sugere que os fluxos $f(u)$ devem ser avaliados nos extremos da célula, i^\pm , usando valores de velocidade *reconstruídos*. Dessa forma, chegamos a uma formulação conservativa da equação semidiscreta.



Cálculo de média para expansões nodais I

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Assumindo que a velocidade seja expandida em termos de um polinômio de Lagrange definido nos pontos de Gauss–Lobatto–Chebyshev,

$$u^e(x) = \sum_{n=0}^P u_n^e h_n(x),$$

aplicando o operador de média, obtemos

$$\bar{u}^e(x) = \sum_{n=0}^P u_n^e \bar{h}_n(x),$$

onde u_n^e são as incógnitas nodais para o elemento e ; $h_n(x)$ e $\bar{h}_n(x)$ são o interpolante e a função de média correspondente, respectivamente.



Cálculo de $h_n(x)$ e $\bar{h}_n(x)$ I

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

$$h_n(x) = \frac{2}{P} \sum_{p=0}^P \frac{1}{\bar{c}_n \bar{c}_p} T_p(x_n) T_p(x), \quad 0 \leq n \leq P,$$

$$\bar{h}_n(x) = \frac{2}{P} \sum_{p=0}^P \frac{1}{\bar{c}_n \bar{c}_p} T_p(x_n) \bar{T}_p(x), \quad 0 \leq n \leq P,$$

onde $\bar{c}_n = 1$ se $n \neq 0, P$ e $\bar{c}_n = 2$ para os outros casos. T_p são polinômios de Chebyshev do primeiro tipo, que podem ser calculados pela relação de recorrência

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$



Cálculo de $h_n(x)$ e $\bar{h}_n(x)$ II

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

\bar{T}_p são as médias do polinômio de Chebyshev, que podem ser calculados pela relação de recorrência

$$\bar{T}_0(x) = 1$$

$$\bar{T}_1(x) = \frac{1}{2}\sigma_1 U_1(x)x$$

$$\bar{T}_k(x) = \frac{1}{2}[\sigma_k U_k(x) - \sigma_{k-2} U_{k-2}(x)], \quad \forall k \geq 2$$

onde $\sigma_k = \frac{\text{sen}[(k+1)\pi/(2P)]}{(k+1)\text{sen}[\pi/(2P)]}$ e $U_k(x) = \frac{T'_{k+1}(x)}{k+1}$.



Cálculo de média para expansões nodais II

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Colocando em forma matricial, o cálculo da média é

$$\bar{\mathbf{u}}_i^e = \mathbf{A}_{in}^e \mathbf{u}_n^e, \quad 0 \leq n \leq P, \quad 0 \leq i \leq P,$$

onde $A_{in}^e = \bar{h}_n(x_i)$.

O polinômio pode ser construído usando interpolação de Lagrange

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^P \bar{u}_i^e g_i(x),$$

onde o interpolante de Gauss–Chebyshev–Lagrange é dado por

$$g_j(x) = \frac{T_P(x)}{T'_P(x_j)(x - x_j)}, \quad 1 \leq j \leq P.$$



Formulação bidimensional

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

Estenderemos a formulação para duas dimensões, considerando a equação $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0$.

Para uma malha retangular,

$$\frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial t} + \frac{\bar{f}_{i^+,j} - \bar{f}_{i^-,j}}{\Delta x_i} + \frac{\bar{g}_{i,j^+} - \bar{g}_{i,j^-}}{\Delta y_j} = 0,$$

onde

$$\bar{f}_{i^\pm,j} = \frac{1}{\Delta y_j} \int_{y_{j^-}}^{y_{j^+}} f(u(x_{i^\pm}, y)) dy,$$

$$\bar{g}_{i,j^\pm} = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i^-}}^{x_{i^+}} g(u(x, y_{j^\pm})) dx,$$

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{\Delta x_i} \frac{1}{\Delta y_j} \int_{y_{j^-}}^{y_{j^+}} \int_{x_{i^-}}^{x_{i^+}} u(x, y) dx dy.$$



Procedimento de reconstrução

O valor da função nas faces pode ser calculado a partir dos valores médios pela expressão

$$u(x) = \sum_{j=1}^P \bar{u}_j^e G_j(x), \quad G_j(x) = \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\lambda_p^j}{\sigma_p} U_p(x),$$

onde

$$\lambda_p^j = \frac{1}{P} T_p(x_j), \quad p = P - 2, P - 1,$$

$$\lambda_p^j = \frac{1}{P} [T_p(x_j) - T_{p+2}(x_j)], \quad 0 \leq p \leq P - 3,$$

$$\sigma_p = \frac{\text{sen}[(p+1)\Delta\theta/2]}{(p+1)\text{sen}(\Delta\theta/2)}, \quad \Delta\theta = \frac{\pi}{P},$$

e $U_p(x) = (1/(p+1)) T'_{p+1}(x)$.

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas



Restrições de interface I

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

Para formar um polinômio de interpolação global, é preciso impor uma condição de continuidade apropriada nas interfaces elementares.

Na operação de reconstrução, só utilizamos P pontos para obter um polinômio de grau P . O requisito de continuidade vem justamente para suprir a informação faltante.

Acrescentamos um termo extra ao polinômio. Denotando a coordenada local por ξ ,

$$u^{e+1}(\xi) = \sum_{j=1}^P \bar{u}_i^{e+1} G_j(\xi) + (1 - \xi) T'_P(\xi) \frac{\delta u^e}{2P^2},$$

onde o salto δu^e é definido por

$$\delta u^e = u_\gamma - \sum_{j=1}^P \bar{u}_i^{e+1} G_j(-1).$$



Restrições de interface II

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

A expressão $(1 - \xi) T'_P(\xi)$ é nula em todos os pontos de Gauss–Lobatto–Chebyshev do elemento $(e + 1)$, exceto no ponto mais à esquerda. Portanto, a implementação desta condição é equivalente a requerer que o valor de u no ponto mais à esquerda seja igual a u_γ . O mesmo valerá para o elemento e com relação ao seu ponto mais à direita.

Usamos uma abordagem *upwind* então para determinar o valor de u_γ ,

$$u_\gamma = \sum_{j=1}^P \bar{u}_j^{e+1} G_j(-1) = u_0^{e+1} \quad \text{se } V < 0$$
$$u_\gamma = \sum_{j=1}^P \bar{u}_j^e G_j(1) = u_P^e \quad \text{se } V \geq 0$$



Sumário

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

1 Formulação conservativa

2 Monotonicidade

3 Equações de Euler

4 Equações de águas rasas



Monotonicidade

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

- Quando tratamos da equação de advecção, destacamos que as oscilações causadas pelo fenômeno de Gibbs podem levar à instabilidade numérica, principalmente quando estamos lidando com problemas não lineares.
- A recuperação de monotonicidade pode ser feita com o emprego de limitadores não lineares, que são tipicamente empregados em sistemas de leis hiperbólicas de conservação.
- Trataremos nesta aula de apenas uma abordagem, a da *correção de fluxo*, embora existam várias outras.



Correção de fluxo

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Trata-se de um método não linear, monotônico e que preserva a positividade, eliminando o fenômeno de Gibbs e produzindo soluções fisicamente aceitáveis.

O algoritmo consiste de dois estágios: um estágio difusivo de transporte e um estágio anti-difusivo, ou corretivo. Na prática, o primeiro estágio pode ser calculado com uma discretização de baixa ordem que preserva a monotonicidade e o segundo com uma discretização de alta ordem que dita a acurácia.

Chamado a solução de baixa ordem computada no primeiro estágio de \bar{u}_i^{td} e a solução final obtida após a aplicação de limitação de fluxo $\bar{u}_i^{n+1}(x, t)$, onde n se refere ao passo de tempo onde a solução é conhecida, temos o seguinte algoritmo:



Algoritmo de correção de fluxo I

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Dado o campo $\bar{u}_i(0)$ obtido da média de célula da condição inicial $u(x, 0)$,

- Calcule, para todos os pontos nodais, o fluxo $f_{i\pm}$ correspondente ao esquema de baixa ordem;
- Avance (explicitamente) a solução com o fluxo de baixa ordem para obter \bar{u}_i^{td} ;
- Calcule, para todos os pontos nodais, o fluxo $F_{i\pm}$ correspondente à discretização de alta ordem;
- Calcule e limite o fluxo anti-difusivo
$$A_{i\pm}^c = C_{i\pm}(F_{i\pm} - f_{i\pm}), \quad 0 \leq C_{i\pm} \leq 1;$$



Algoritmo de correção de fluxo II

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

- Empregando um procedimento de reconstrução, obtenha os valores $u_{j\pm}$;
- Atualize (explicitamente) a solução final baseado nos fluxos anti-difusivos limitados, isto é,

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^{\text{td}} - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \sum_{q=0}^2 (A_{j+}^c - A_{j-}^c)^{n-q}.$$

O esquema mais simples de baixa ordem e que preserva a positividade é o upwind,

$$\begin{aligned} f_{j+} &= V_i \bar{u}_i^n, & V_i &\geq 0, \\ f_{j-} &= V_i \bar{u}_i^n, & V_i &< 0. \end{aligned}$$

Exemplo de aplicação de correção de fluxo



Problemas
hiperbólicos

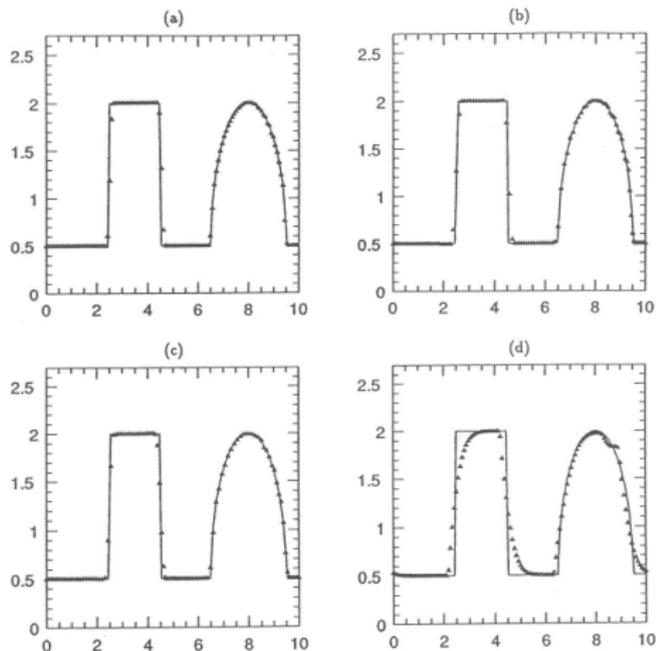
Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas



Advecção linear de uma onda quadrada combinada com uma semicircular.
Métodos com correção de fluxos (a) Fourier; (b) Chebyshev ($N_{el} = 1$); (c)
Chebyshev ($N_{el} = 2$); (d) diferenças finitas de segunda ordem.



Sumário

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

1 Formulação conservativa

2 Monotonicidade

3 Equações de Euler

4 Equações de águas rasas



Equações de Euler em 1d

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Considerando o escoamento unidimensional de um gás politrópico:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0,$$

com

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ u(p + E) \end{pmatrix}, \quad p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right),$$

onde ρ é a densidade, u é a velocidade, p é a pressão, E é a energia total, e $\gamma = c_p/c_v$ a razão de calores específicos do gás.



Equações de Euler em 1d – Características I

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

As condições de contorno e fluxos de interface devem ser impostos via características.

Considerando a matriz jacobiana do sistema $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$, os autovetores direitos são:

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{pmatrix},$$

onde $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ é a velocidade do som e H é a entalpia

$$H = \frac{E + p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}u^2$$



Equações de Euler em 1d – Características II

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Os autovetores esquerdos de \mathbf{A} são:

$$\mathbf{l}_1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2c^2} \left([2c + u(\gamma - 1)] \frac{u}{2}, -c - u(\gamma - 1), \gamma - 1 \right),$$

$$\mathbf{l}_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{c^2} \left(c^2 - (\gamma - 1) \frac{u^2}{2}, u(\gamma - 1), -(\gamma - 1) \right),$$

$$\mathbf{l}_3(\mathbf{u}) = \frac{1}{2c^2} \left(-[2c - u(\gamma - 1)] \frac{u}{2}, c - u(\gamma - 1), \gamma - 1 \right).$$

Podemos então definir a matriz $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{u}})$, onde $\tilde{\mathbf{u}}$ é o estado obtido com a média de Roe entre os estados \mathbf{u}_P^e e \mathbf{u}_0^{e+1} :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\sqrt{\rho_P^e} \mathbf{u}_P^e + \sqrt{\rho_0^{e+1}} \mathbf{u}_0^{e+1}}{\sqrt{\rho_P^e} + \sqrt{\rho_0^{e+1}}}$$



Equações de Euler em 1d – Características III

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Denotamos então as matrizes de autovetores direitos e esquerdos da matriz $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{u}})$ respectivamente por

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1(\tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{r}_2(\tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{r}_3(\tilde{\mathbf{u}})), \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1(\tilde{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{l}_2(\tilde{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{l}_3(\tilde{\mathbf{u}}) \end{pmatrix}$$

de modo que a matriz \mathbf{A} pode ser decomposta

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

sendo os autovalores de \mathbf{A} dados por

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c.$$



Equações de Euler em 1d – Características IV

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

As variáveis características $\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}$ podem ser definidas para ambos os estados

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0^{e+1} &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_0^{e+1}, \\ \mathbf{v}_P^e &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_P^e.\end{aligned}$$

Os valores a serem impostos na interface podem ser então definidos por um fluxo *upwind*

$$(\mathbf{v}_\gamma)_i = \begin{cases} (\mathbf{v}_0^{e+1})_i, & \lambda_i < 0, \\ (\mathbf{v}_P^e)_i, & \lambda_i \geq 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

e podem ser transformados de volta às variáveis físicas por

$$\mathbf{u}_\gamma = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_\gamma.$$



Equações de Euler em 1d – Características V

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Alternativamente, poderiam ser usados o fluxo de Roe:

$$\mathbf{f}_\gamma = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_0^{e+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_P^e)}{2} - \mathbf{R} \cdot |\mathbf{D}| \cdot \mathbf{L} \frac{\mathbf{u}_0^{e+1} - \mathbf{u}_P^e}{2}.$$

ou o fluxo de Lax-Friedrichs

$$\mathbf{f}_\gamma = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_0^{e+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_P^e)}{2} - \alpha(\mathbf{u}_0^{e+1} - \mathbf{u}_P^e),$$

onde α é uma constante relacionada ao maior autovalor de \mathbf{A} .



Aplicação da correção de fluxo às equações de Euler 1d I

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

Algoritmo se baseia no uso da decomposição em características nas interfaces e nas fronteiras.

- Calcule o campo de médias de célula correspondente à condição inicial;
- Calcule os fluxos correspondentes ao esquema de baixa ordem. Por exemplo, aqui utilizamos o esquema de Roe

$$\mathbf{f}_{i+} = \frac{\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_{i+1}) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_i)}{2} - \mathbf{R} \cdot |\mathbf{D}| \cdot \mathbf{R}^{-1} \frac{(\bar{\mathbf{u}}_{i+1} - \bar{\mathbf{u}}_i)}{2},$$

onde \mathbf{R} é a matriz jacobiana que consiste nos autovetores diretos do sistema de Euler linearizado em torno do estado médio de Roe entre $\bar{\mathbf{u}}_{i+1}$ e $\bar{\mathbf{u}}_i$;



Aplicação da correção de fluxo às equações de Euler 1d II

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

- Avance (explicitamente) a média das células no tempo usando os fluxos de baixa ordem, usando um esquema de Adams-Bashfort de terceira ordem, para obter $\bar{\mathbf{u}}_i^{\text{td}}$;
- Calcule os fluxos \mathbf{F} correspondentes à discretização de alta ordem;
- Calcule os fluxos anti-difusivos $\mathbf{A}_i = \mathbf{F}_i - \mathbf{f}_i$ e os limite para obter \mathbf{A}_i^c . É crucial que o limitador seja aplicado aos fluxos anti-difusivos característicos.
- Atualize (explicitamente) as médias das células usando os fluxos anti-difusivos e um esquema de Adams-Bashfort de terceira ordem para obter $\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1}$;
- Reconstrua os valores dos pontos a partir das médias das células.



Equações de Euler em 2d

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial y} = 0,$$

com

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho u v \\ u(p + E) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v v + p \\ v(p + E) \end{pmatrix},$$

$$\text{onde } p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right).$$

Tratamos cada uma das dimensões separadamente, de forma sequencial, de modo que podemos usar os solvers de Riemman unidimensionais aproximados.



Equações de Euler em 2d – Tratamento dos vértices

Problemas hiperbólicos

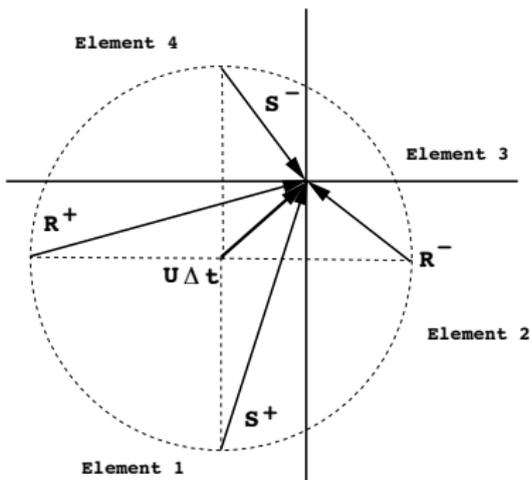
Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas



$$R^+ = u + \frac{2}{\gamma - 1}c,$$

$$R^- = u - \frac{2}{\gamma - 1}c,$$

$$S^+ = v + \frac{2}{\gamma - 1}c,$$

$$S^- = v - \frac{2}{\gamma - 1}c.$$

$$u = \frac{1}{2}(R^+ + R^-),$$

$$v = \frac{1}{2}(S^+ + S^-),$$

$$c = \frac{\gamma - 1}{4}(R^+ - R^- + S^+ - S^-) - c_{up}, \quad s = s_{up}.$$



Equações de Euler - Método de Galerkin Descontínuo I

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

Reescrevendo as equações de Euler em 2d

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0,$$

ou em forma quase linear

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0,$$

onde

$$\mathbf{A}_x \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{A}_y f \equiv \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}.$$

Aplicando o método de resíduos ponderados, integrando o termo de fluxo por partes duas vezes e utilizando o teorema da divergência:

$$\frac{\partial (\mathbf{u}, \mathbf{v})_e}{\partial t} + \int_{\partial \Omega^e} \mathbf{v} [\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_o) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_i)] \cdot \mathbf{n} \, ds + (\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{v})_e = 0$$



Equações de Euler - Método de Galerkin Descontínuo II

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

O fluxo numérico $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_o)$ é calculado usando um solver de Riemman unidimensional. Produzimos então dois estados intermediários \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{A}_x(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2),$$

onde a matriz \mathbf{A}_x para as variáveis conservadas é

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}[(\gamma-3)u^2 + (\gamma-1)v^2] & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 \\ u[(\gamma-1)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \gamma e] & \gamma e - \frac{1}{2}(\gamma-1)(v^2 + 3u^2) & -(\gamma-1)uv & \gamma u \end{pmatrix}$$



Equações de Euler - Método de Galerkin Descontínuo III

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

Esta matriz pode então ser diagonalizada

$$\mathbf{A}_x(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{RDL}$$

e o método das características aplicado.

As matrizes de autovetores direita e esquerda são:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ u - c & u & 0 & u + c \\ v & v & 1 & v \\ H - uc & \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) & v & H + uc \end{bmatrix}$$



Equações de Euler - Método de Galerkin Descontínuo IV

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\beta c + u}{2d} & -\frac{1 + \beta u c}{2c} & -\frac{\beta v}{2} & \frac{\beta}{2} \\ 1 - \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\beta & \beta u & \beta v & -\beta \\ -v & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\beta c - u}{2c} & \frac{1 - \beta u c}{2c} & -\frac{\beta v}{2} & \frac{\beta}{2} \end{bmatrix}$$

onde $\beta = (\gamma - 1)/c^2$.

A matriz diagonal de autovalores é:

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} u - c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u + c \end{bmatrix}$$



Equações de Euler - Condições de Contorno

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Considerando os sinais dos autovalores, λ_i , temos quatro casos possíveis de condições de contorno:

- Entrada supersônica: $\lambda_i < 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$
- Entrada subsônica: $\lambda_i < 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \lambda_4 > 0$
- Saída subsônica: $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_i > 0 \quad i = 2, 3, 4$
- Saída supersônica: $\lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$

Cada autovalor negativo corresponde a uma característica de “entrada”. O número de variáveis a ser prescrita na fronteira é igual ao número de características de “entrada”.



Equações de Euler - Método de Galerkin Descontínuo V

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

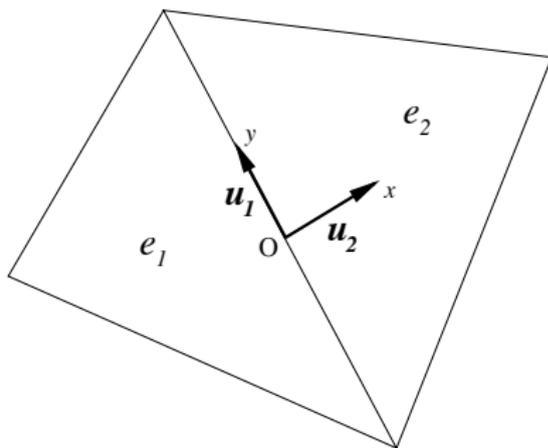
Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

Sistema de coordenadas local para o cálculo das características:





Equações de Euler - Método de Galerkin Descontínuo VI

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

Para os valores do estado $\bar{\mathbf{u}}$ devem ser usadas as médias de Roe:

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_2 \rho_1},$$

$$\bar{u} = \frac{(u\sqrt{\rho})_2 + (u\sqrt{\rho})_1}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}},$$

$$\bar{H} = \frac{(H\sqrt{\rho})_2 + (H\sqrt{\rho})_1}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}}.$$



DGM – fluxos

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

1 *Upwind*

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{R}\mathbf{D}^+ \mathbf{L}\mathbf{u}_1 + \mathbf{R}\mathbf{D}^- \mathbf{L}\mathbf{u}_2),$$

$$\text{onde } \mathbf{D}^\pm = \frac{1}{2}(\text{sign}(\mathbf{D}) \pm 1)$$

2 *Roe*

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{2}[\mathbf{F}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{F}(\mathbf{u}_2)] - \frac{1}{2}\mathbf{R}|\mathbf{D}|\mathbf{L}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1).$$

3 *Lax-Friedrichs*

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{F}(\mathbf{u}_2) - \alpha_{\max}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)}{2},$$

$$\text{onde } \alpha_{\max} = \max(|\mathbf{D}|_{i,i})$$



DGM – convergência - Exemplo 1

Problemas
hiperbólicos

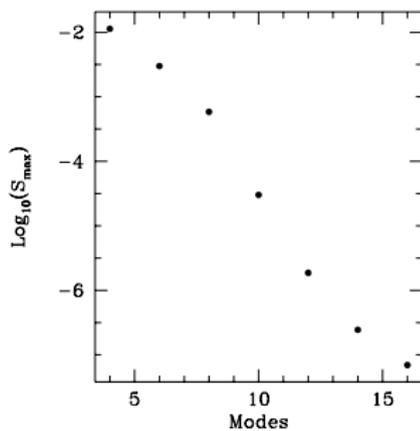
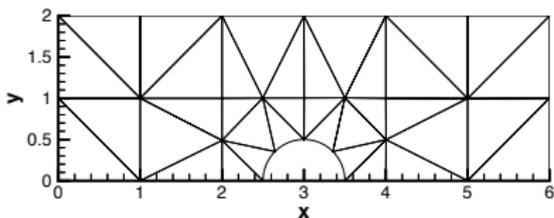
Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas





DGM – convergência - Exemplo 2 - I

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Escoamento de Ringleb (Hartmann, R., 2002)

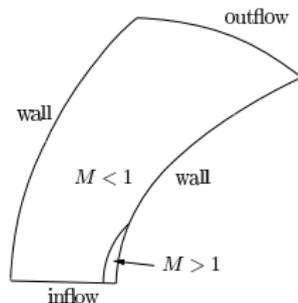


Figure 2.1: Geometry for Ringleb's flow; M denotes the Mach number.

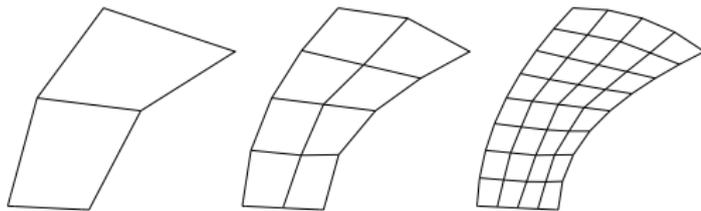


Figure 2.2: Ringleb flow problem: Meshes with 2, 8, 32 elements.



DGM – convergência - Exemplo 2 - II

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

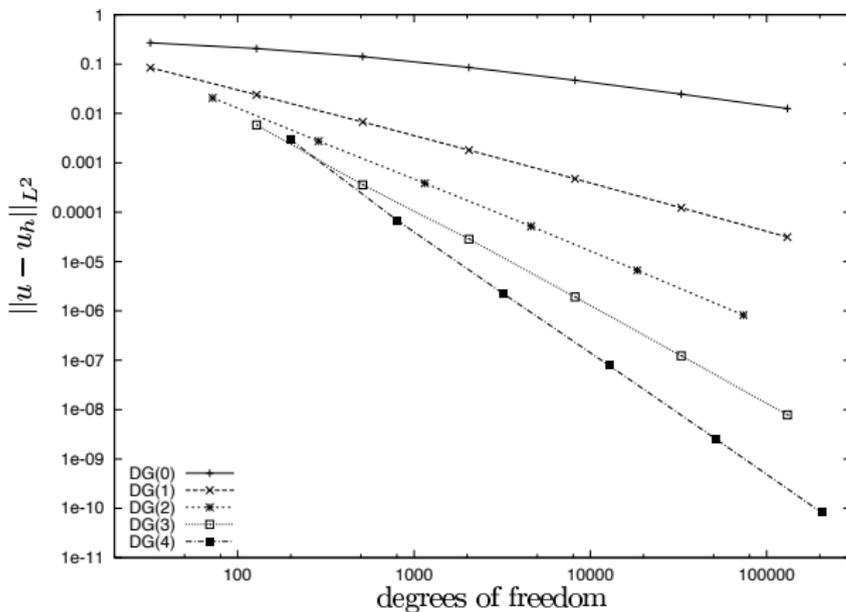
Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Escoamento de Ringleb (Hartmann, R., 2002)





Sumário

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

1 Formulação conservativa

2 Monotonicidade

3 Equações de Euler

4 Equações de águas rasas



Equações de águas rasas

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

- Utilizadas quando as escalas de comprimento nas direções horizontais são grandes comparadas à escala vertical.
- Aplicadas em engenharia hidráulica, costeira e oceânica.
- As equações são bidimensionais e são uma alternativa a simulações completas tridimensionais para se obter soluções relativas ao movimento e comportamento de ondas.
- Um detalhe importante é que o tratamento de domínio variável no tempo, que seria causado pelo movimento da superfície livre, é evitado.



Equações governantes

As equações de águas rasas são um sistema de equações diferenciais parciais não lineares de caráter hiperbólico, bidimensionais. Expressas em termos de variáveis conservativas, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{s}(\mathbf{u}),$$

onde $\mathbf{F} = (\mathbf{f}, \mathbf{g})$ é o vetor de fluxo e

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ uH \\ vH \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} uH \\ u^2H + gH^2/2 \\ uvH \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} vH \\ uvH \\ v^2H + gH^2/2 \end{pmatrix},$$

sendo $H(x_1, x_2, t) = \zeta(x_1, x_2, t) + d(x_1, x_2)$ é a profundidade total, $d(x_1, x_2)$ é a profundidade da água parada e $\zeta(x_1, x_2, t)$ a elevação da superfície. Além disso, $u(x_1, x_2, t)$ e $v(x_1, x_2, t)$ são as velocidades médias (na profundidade) nas direções x_1 e x_2 e g é a aceleração da gravidade.

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas



Termo fonte $\mathbf{s}(\mathbf{u})$

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

O termo fonte $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ é introduzido de modo a levar em conta forças devido ao atrito, inclinações do assoalho, efeitos de Coriolis, entre outros.



Formulação de Galerkin descontínua I

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

De forma similar ao que foi adotado para as equações de Euler, a formulação fraca para a equação de águas rasas num elemento e é

$$(\mathbf{v}, \partial \mathbf{u} / \partial t)_e - (\nabla \mathbf{v}, \mathbf{F}(\mathbf{u}))_e + \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_e = (\mathbf{v}, \mathbf{s}(\mathbf{u}))_e,$$

onde os parênteses denotam o produto interno em Ω^e e os colchetes em ângulo integrais de contorno em $\partial \Omega^e$.

O acoplamento entre os elementos é feito substituindo-se $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ por um fluxo *upwind*, $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_o)$, onde os índices i e o se referem, respectivamente, a grandezas internas e externas ao elemento.



Formulação de Galerkin descontínua II

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Integrando a equação anterior mais uma vez por partes, obtemos a forma de divergência

$$(\mathbf{v}, \partial \mathbf{u} / \partial t)_e - (\mathbf{v}, \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}))_e + \langle \mathbf{v}, [\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_o) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_i)] \cdot \mathbf{n} \rangle_e = (\mathbf{v}, \mathbf{s}(\mathbf{u}))_e,$$

que é atrativa por envolver produtos internos com formas similares àqueles obtidos na formulação contínua.

A discretização da equação é completada substituindo os espaços de teste e de base contínuas \mathbf{v} e \mathbf{u} por espaços finitos \mathbf{v}^δ e \mathbf{u}^δ .

Lembramos que é vantajoso utilizar pontos de quadratura de Gauss ao se avaliar os fluxos através das arestas pelo fato de se evitar a solução de fluxos bidimensionais nos vértices.



Avaliação do fluxo normal, $\tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}$

A avaliação do fluxo $\tilde{\mathbf{F}}$ pode ser reduzido a um problema unidimensional de Riemann na direção normal a uma dada aresta. Começamos introduzindo a matriz de rotação e a sua inversa:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_{x_1} & n_{x_2} \\ 0 & -n_{x_2} & n_{x_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_{x_1} & -n_{x_2} \\ 0 & n_{x_2} & n_{x_1} \end{pmatrix},$$

e definimos $\mathbf{U} = (H, H\bar{u}, H\bar{v})^\top = \mathbf{T}\mathbf{u}$, onde \bar{u} e \bar{v} são as velocidades normal e tangencial à aresta, respectivamente.

O fluxo normal à aresta, $\tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}$, pode então ser escrito em termos do fluxo unidimensional $\tilde{\mathbf{f}}$ como

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_o) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_o).$$

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas



Avaliação das características

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

Definimos $\tilde{\mathbf{f}}$ usando uma abordagem baseada nas invariantes de Riemann, e para isso precisamos determinar a forma característica do sistema e então aplicar uma solução de Riemann baseada na informação característica.

Começamos construindo o jacobiano da função de fluxo, $\mathbf{A} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{U}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - \bar{u}^2 & 2\bar{u} & 0 \\ -\bar{u}\bar{v} & \bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix},$$

onde $c = \sqrt{gH}$ é a velocidade da onda.

Os autovalores de \mathbf{A} são

$$\lambda_1 = \bar{u} - c, \quad \lambda_2 = \bar{u}, \quad \lambda_3 = \bar{u} + c$$



Decomposição da matriz de Roe \mathbf{A}^*

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Usando a definição de \mathbf{A} e construindo as médias de Roe das variáveis,

$$\bar{u}^* = \frac{\bar{u}_i \sqrt{H_i} + \bar{u}_o \sqrt{H_o}}{\sqrt{H_i} + \sqrt{H_o}}, \quad \bar{v}^* = \frac{\bar{v}_i \sqrt{H_i} + \bar{v}_o \sqrt{H_o}}{\sqrt{H_i} + \sqrt{H_o}},$$

$$H^* = \sqrt{H_i H_o}, \quad c^* = \sqrt{0,5(c_i^2 + c_o^2)},$$

podemos calcular a matriz de Roe $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}(\mathbf{U}^*)$ e as automatrizes esquerda, \mathbf{L}^* , e direita, \mathbf{R}^* .

Definimos também a matriz diagonal, \mathbf{D}^* que contém os autovalores λ_i^* tal que

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{L}^* \mathbf{A}^* \mathbf{R}^*.$$



Avaliação do fluxo unidimensional $\tilde{\mathbf{f}}$ I

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

Assim como foi feito no caso das equações de Euler, podemos determinar o fluxo *upwind* unidimensional utilizando diferentes abordagens.

1 Fluxo de Lax–Friedrichs

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_o) = \frac{1}{2}[\mathbf{f}(\mathbf{U}_i) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_o)] - \frac{\max_j |\lambda_j^*|}{2}(\mathbf{U}_o - \mathbf{U}_i)$$

2 Fluxo de Roe

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_o) = \frac{1}{2}[\mathbf{f}(\mathbf{U}_i) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_o)] - \frac{1}{2}\mathbf{R}^*|\mathbf{D}^*|\mathbf{L}^*(\mathbf{U}_o - \mathbf{U}_i)$$



Avaliação do fluxo unidimensional $\tilde{\mathbf{f}}$ II

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

3 Fluxo HLLC

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_o) = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{U}_i), & S_i \geq 0, \\ \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) + S_i(\mathbf{U}_{mi} - \mathbf{U}_i), & S_i \leq 0 \leq S_m, \\ \mathbf{f}(\mathbf{U}_o) + S_o(\mathbf{U}_{mo} - \mathbf{U}_o), & S_m \leq 0 \leq S_o, \\ \mathbf{f}(\mathbf{U}_o), & S_o \leq 0 \leq 0, \end{cases}$$

onde \mathbf{U}_{mi} e \mathbf{U}_{mo} são obtidos de

$$\mathbf{U}_{m(i,o)} = H_{(i,o)} \left(\frac{S_{(i,o)} - \bar{u}_{(i,o)}}{S_{(i,o)} - S_m} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ S_m \\ \bar{v}_{(i,o)} \end{bmatrix}$$



Avaliação do fluxo unidimensional $\tilde{\mathbf{f}}$ III

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

3 Fluxo HLLC (cont.)

Os valores S_i , S_o e S_m são baseados em três estimativas de velocidades de onda,

$$S_i = \bar{u}_i - c_i s_i,$$

$$S_o = \bar{u}_o + c_o s_o,$$

$$S_m = \frac{S_i H_o (\bar{u}_o - S_o) - S_o H_i (\bar{u}_i - S_i)}{H_o (\bar{u}_o - S_o) - H_i (\bar{u}_i - S_i)},$$

onde

$$s_{(i,o)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{H_m^2 + H_m H_{(i,o)}}{2H_{(i,o)}^2}}, & H_m > H_{(i,o)}, \\ 1, & H_m \leq H_{(i,o)}, \end{cases} \quad e$$

$$H_m = \frac{1}{g} \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{gH_i} + \sqrt{gH_o} \right) + \frac{1}{4} (\bar{u}_i - \bar{u}_o) \right)^2.$$



Condições de contorno

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

As condições de contorno podem ser impostas através da utilização de “arestas fantasmas” nos elementos da fronteira. Dessa forma as condições de contorno são impostas de forma análoga à solução dos fluxos nas interfaces dos elementos.

- 1** *Parede*: condição de impermeabilidade $[(u, v) \cdot \mathbf{n} = 0]$

$$H_o = H_i, \quad \bar{u}_o = -\bar{u}_i, \quad \bar{v}_o = \bar{v}_i.$$

- 2** *Entradas*: condição de entrada imposta diretamente às arestas fantasmas, o que significa que a condição de contorno é imposta de forma fraca.
- 3** *Saídas*: condição do estado inicial não perturbado é imposto às arestas fantasmas.



Exemplo I: onda estacionária linear

Problemas
hiperbólicos

Bruno S.
Carmo

Formulação
conservativa

Monotonicidade

Equações de
Euler

Equações de
águas rasas

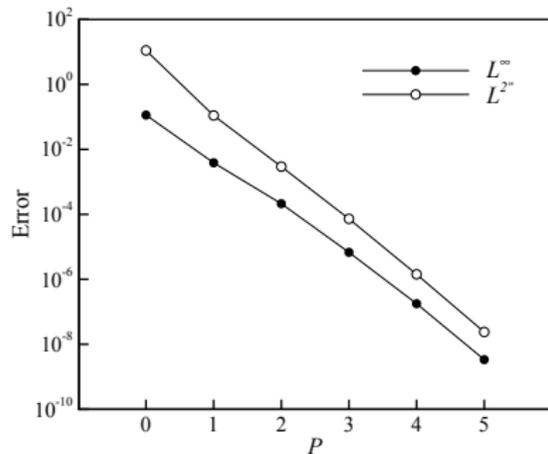
Discretização triangular de Galerkin descontínua, com funções ortogonais com expansão base, e avanço no tempo através de método Runge-Kutta explícito. O problema tem solução analítica.

$$H(x, y, t) = d + a \cos(kx) \cos(\omega t)$$

$$u(x, y, t) = a \frac{\omega}{kd} \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$v(x, y, t) = 0$$

onde a é a amplitude, k o número de onda e ω a frequência, tal que $\omega^2 = gdk^2$.





Exemplo II: simulação de ondas no Porto de Visby

Problemas hiperbólicos

Bruno S. Carmo

Formulação conservativa

Monotonicidade

Equações de Euler

Equações de águas rasas

