



Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Algoritmos para Escoamentos Incompressíveis

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem
com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência
de Calor

Prof. Bruno S. Carmo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

2017



Introdução

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Estudaremos nesta aula o escoamento incompressível e isotérmico de um fluido newtoniano com propriedades constantes. Este escoamento é governado pelas equações de Navier–Stokes para escoamento incompressível.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Discutiremos algoritmos para a solução direta destas equações (DNS) ou somente das grandes escalas (LES).

Estaremos interessados em formulações que podem ser estendidas a três dimensões, usando variáveis primitivas (velocidade e pressão) ou velocidade e vorticidade.



Sumário

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- 1 Formulação variacional do problema de Stokes
- 2 Métodos acoplados para formulação em variáveis primitivas
- 3 Métodos segregados para variáveis primitivas
- 4 Formulação velocidade–vorticidade
- 5 Método dos mínimos quadrados
- 6 Discretização dos termos não lineares
- 7 Verificação e validação
 - Soluções exatas das equações de Navier–Stokes
 - Análise de estabilidade global
 - Simulações diretas de escoamentos turbulentos (DNS)



Sumário

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- 1 Formulação variacional do problema de Stokes
- 2 Métodos acoplados para formulação em variáveis primitivas
- 3 Métodos segregados para variáveis primitivas
- 4 Formulação velocidade–vorticidade
- 5 Método dos mínimos quadrados
- 6 Discretização dos termos não lineares
- 7 Verificação e validação
 - Soluções exatas das equações de Navier–Stokes
 - Análise de estabilidade global
 - Simulações diretas de escoamentos turbulentos (DNS)



Formulação variacional – Stokes estacionário I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Para escrever as equações governantes na forma variacional, precisamos definir os espaços funcionais apropriados para os campos de pressão e velocidade, e para isso precisamos considerar as derivadas espaciais de mais alta ordem envolvidas. Podemos então considerar o problema de Stokes estacionário:

$$\begin{aligned} -\nu \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

onde \mathbf{f} é uma força externa e p está escalada por ρ .

Os espaços apropriados são:

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ em } \partial\Omega\}, \\ L_0^2(\Omega) &= \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\}. \end{aligned}$$



Formulação variacional – Stokes estacionário II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Forma variacional do sistema de equações de Stokes em regime estacionário, a ser resolvido de forma acoplada:

$$\begin{aligned}(\nabla \mathbf{w}, \nu \nabla \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{w}, p) &= (\mathbf{w}, \mathbf{f}), \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{U} \equiv H_0^1(\Omega)^3, \\ -(q, \nabla \cdot \mathbf{v}) &= 0, \quad \forall q \in \mathcal{M} \equiv L_0^2(\Omega).\end{aligned}$$

Os espaços discretos para a velocidade e a pressão $(\mathcal{U}^\delta, \mathcal{M}^\delta)$ podem ser subconjuntos dos espaços definidos acima usando polinômios de grau $\leq P$ para um subdomínio Ω^e . Entretanto, por causa da forma do acoplamento entre pressão e velocidade, precisamos adotar espaços de funções que obedecem à condição inf-sup (div-stability).



Condição inf-sup

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

O espaço das pressões, \mathcal{M} , tem que ser restrito, de forma e excluir modos espúrios, definidos pela condição

$$(\mathbf{w}, \nabla p^*) = 0$$

Se o espaço inteiro \mathcal{M}^δ é utilizado, então qualquer par $[\mathbf{v}^\delta, p^\delta + p^*]$ também é uma solução do problema de Stokes discreto.

Não vamos explorar neste curso os detalhes matemáticos desta condição, ao invés disso, vamos nos ater a dizer que o problema pode ser solucionado usando uma discretização $\mathcal{P}_P(\Omega^e)/\mathcal{P}_{P-2}(\Omega^e)$, ou seja, usar um polinômio de ordem P para o campo de velocidades e um de ordem $P - 2$ para o campo de pressões.



Alternativas para evitar os modos espúrios

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Discretizações que não respeitem a condição inf-sup, mas que sejam mais convenientes do ponto de vista numérico, podem ser utilizadas, desde que outras estratégias sejam empregadas, por exemplo:

- Fazer uma decomposição de valor singular do operador de pressão, de modo a filtrar os modos espúrios (Phillips & Roberts, 1993);
- Usar métodos de estabilização (Franca *et al.* , 1993);
- Complementar espaço de velocidades com função de bolha (suporte local) (Canuto, 1994);
- Usar uma formulação segregada, onde uma equação de Poisson para a pressão é resolvida, com condições de contorno apropriadas.



Sumário

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- 1 Formulação variacional do problema de Stokes
- 2 Métodos acoplados para formulação em variáveis primitivas**
- 3 Métodos segregados para variáveis primitivas
- 4 Formulação velocidade–vorticidade
- 5 Método dos mínimos quadrados
- 6 Discretização dos termos não lineares
- 7 Verificação e validação
 - Soluções exatas das equações de Navier–Stokes
 - Análise de estabilidade global
 - Simulações diretas de escoamentos turbulentos (DNS)



Métodos acoplados para formulação em variáveis primitivas

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- Nos métodos acoplados, a condição de inf-sup tem que ser respeitada.
- Não é necessário definir condições de contorno para a pressão.
- Discutiremos três formulações: Uzawa, subestruturação e penalidade.



Algoritmo de Uzawa I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Forma discreta da equação de Stokes:

$$\begin{aligned}\nu \mathbf{L}\mathbf{v} - \mathbf{D}^\top \mathbf{p} &= \mathbf{M}\mathbf{f}, \\ -\mathbf{D}\mathbf{v} &= 0,\end{aligned}$$

onde a matriz $\mathbf{D} = (\mathbf{D}_{x_1}, \mathbf{D}_{x_2}, \mathbf{D}_{x_3})$ é o operador gradiente discreto.

Isolamos \mathbf{v} na primeira equação:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\nu}(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{D}^\top \mathbf{p} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{f})$$

e substituímos na segunda equação:

$$-\mathbf{D}\mathbf{v} = -\frac{1}{\nu}(\mathbf{D}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{D}^\top \mathbf{p} + \mathbf{D}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{f}) = 0$$



Algoritmo de Uzawa II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Então temos um novo sistema

$$\nu \mathbf{L} \mathbf{v} = \mathbf{D}^T \mathbf{p} + \mathbf{M} \mathbf{f},$$

$$\mathbf{S}_0 \mathbf{p} = -\mathbf{D} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{f},$$

onde a matriz da pressão é

$$\mathbf{S}_0 \equiv \mathbf{D} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{D}^T.$$

Tanto \mathbf{L} quanto \mathbf{S}_0 são matrizes simétricas positivas semi-definidas. A matriz \mathbf{S}_0 não será inversível se a dimensão do espaço de pressões (número de linhas de \mathbf{D}) for maior do que a dimensão do espaço de velocidades (dimensão de \mathbf{L}). Isto pode ser visto como uma manifestação discreta da condição inf-sup.



Algoritmo de Uzawa: solução do sistema

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Primeiro resolvemos a equação da pressão e depois a de velocidade. A matriz \mathbf{S}_0 é cheia (devido à presença do inverso do Laplaciano), embora seja bem condicionada.

A solução do sistema pode ser obtida usando um algoritmo de gradiente conjugado pré-condicionado.

Inicialize \mathbf{p}_0 ; $\mathbf{r}_0 = \mathbf{DL}^{-1}\mathbf{Mf} + \mathbf{S}_0\mathbf{p}_0$; $\mathbf{q}_0 = \mathbf{M}_p^{-1}\mathbf{r}_0$; $\mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0$

for $m = 1$, até a convergência **do**

$$\alpha_m = \mathbf{q}_m^\top \mathbf{r}_m / (\mathbf{p}_m^\top \mathbf{S}_0 \mathbf{p}_m)$$

$$\mathbf{v}_{m+1} = \mathbf{v}_m + \alpha_m \mathbf{p}_m$$

$$\mathbf{r}_{m+1} = \mathbf{r}_m - \alpha_m \mathbf{S}_0 \mathbf{p}_m$$

$$\mathbf{q}_{m+1} = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{r}_{m+1}$$

$$\beta_m = \mathbf{q}_{m+1}^\top \mathbf{r}_{m+1} / (\mathbf{q}_m^\top \mathbf{r}_m)$$

$$\mathbf{p}_{m+1} = \mathbf{q}_{m+1} + \beta_m \mathbf{p}_m$$

end for



Algoritmo de Uzawa: aplicação às equações de Stokes para regime transiente I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Discretizando as equações transientes com um esquema de Euler implícito obtemos um sistema absolutamente estável:

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \nu \mathbf{L} \mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{D}^\top \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{M} \mathbf{f}^{n+1},$$
$$-\mathbf{D} \mathbf{v}^{n+1} = 0.$$

Com o algoritmo de Uzawa, desacoplamos os campos de pressão e velocidade:

$$\mathbf{H} \mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{D}^\top \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{M} \bar{\mathbf{f}}^{n+1},$$
$$\mathbf{S}_t \mathbf{p}^{n+1} = -\mathbf{D} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{M} \bar{\mathbf{f}}^{n+1},$$

onde

$$\bar{\mathbf{f}}^{n+1} \equiv \mathbf{f}^n + \frac{\mathbf{M} \mathbf{v}^n}{\Delta t}, \quad \mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \nu \mathbf{L}, \quad \mathbf{S}_t \equiv \mathbf{D} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{D}^\top.$$



Algoritmo de Uzawa: aplicação às equações de Stokes para regime transiente II

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Assim como no caso estacionário, a matriz \mathbf{S}_t é cheia devida à presença do inverso do operador de Helmholtz. Entretanto, ela não é bem condicionada quando $\Delta t \rightarrow 0$. Por isso, o uso de pré-condicionadores para a equação da pressão é indispensável.

As mesmas ideias aplicadas aqui para as equações de Stokes pode ser replicadas para as equações de Navier–Stokes tratando os termos não lineares de forma explícita e agrupando-os no vetor de carregamento \mathbf{f} .



Subestruturação do problema de Stokes I

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Consiste na aplicação da condensação estática ao sistema de Stokes.

Particionamos o espaço de velocidades, \mathcal{U}^δ , em dois conjuntos consistindo nos modos de interior (subscrito i) e nos modos de contorno (subscrito b). Também decompomos o espaço de pressões, \mathcal{M}^δ , em dois conjuntos consistindo do modo com a pressão média (constante) em cada elemento (subscrito a) e os outros modos de interior (subscrito ι).

Assim como no algoritmo de Uzawa, a pressão é descontínua e os espaços de pressão e velocidade devem obedecer a condição inf-sup.



Subestruturação do problema de Stokes II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Sistema de Stokes:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \nu \mathbf{L}_{bb} & \mathbf{D}_{ab}^\top & \nu \mathbf{L}_{bi} & \mathbf{D}_{\iota b}^\top \\ \mathbf{D}_{ab} & & \mathbf{D}_{ai} & \\ \hline \nu \mathbf{L}_{ib} & \mathbf{D}_{ai}^\top & \nu \mathbf{L}_{ii} & \mathbf{D}_{i\iota}^\top \\ \mathbf{D}_{\iota b} & & \mathbf{D}_{\iota i} & \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{p}_a \\ \mathbf{v}_i \\ \mathbf{p}_\iota \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{g}_a \\ \mathbf{f}_i \\ \mathbf{g}_\iota \end{bmatrix}$$

onde \mathbf{L} e \mathbf{D} são as matrizes laplaciana e de derivada e \mathbf{f} e \mathbf{g} são os termos de carregamento das equações de quantidade de movimento e continuidade depois da imposição das condições de contorno.

Subestruturação do problema de Stokes III



Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Aplicando a condensação estática para eliminar as incógnitas de interior resulta no sistema de contorno

$$\mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{p}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{g}_a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu \mathbf{L}_{bi} & \mathbf{D}_{\iota b}^T \\ \mathbf{D}_{ai} \end{bmatrix} \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{g}_\iota \end{bmatrix}$$

onde a matriz diagonal por blocos, \mathbf{T} , é

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \nu \mathbf{L}_{ii} & \mathbf{D}_{\iota i}^T \\ \mathbf{D}_{\iota i} \end{bmatrix}^{-1}$$

e o complemento de Schur, \mathbf{S} , é

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{bb} & \mathbf{S}_{ab}^T \\ \mathbf{S}_{ab} & \mathbf{S}_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu \mathbf{L}_{bb} & \mathbf{D}_{ab}^T \\ \mathbf{D}_{ab} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu \mathbf{L}_{ib} & \mathbf{D}_{ai}^T \\ \mathbf{D}_{\iota b} \end{bmatrix} \mathbf{T} \begin{bmatrix} \nu \mathbf{L}_{bi} & \mathbf{D}_{\iota b}^T \\ \mathbf{D}_{ai} \end{bmatrix}$$



Subestruturação do problema de Stokes IV

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Uma vez determinadas as incógnitas de contorno, as incógnitas de interior podem ser calculadas por retrossubstituição,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{p}_\ell \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{g}_a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu \mathbf{L}_{ib} & \mathbf{D}_{ai}^T \\ \mathbf{D}_{\ell b} & \end{bmatrix} \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{p}_a \end{bmatrix}$$

Assim como no algoritmo de Uzawa, ao resolvermos o problema transiente o termo com laplaciano, $\nu \mathbf{L}$, é substituído pela matriz de Helmholtz, $\mathbf{H} = \nu \mathbf{L} + \mathbf{M}/\Delta t$.



Método de penalidades I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Desacoplamento do par pressão–velocidade através do relaxamento do vínculo de incompressibilidade:

$$-\frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\varepsilon p$$

onde ε é uma constante pequena.

Discretizando, chegamos a:

$$-\frac{1}{Re}\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{N}(\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{D}^\top\mathbf{p} = \mathbf{f}$$
$$\mathbf{D}\mathbf{u} - \varepsilon\mathbf{M}\mathbf{p} = 0$$

onde \mathbf{L} é a matriz laplaciana, $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ é a matriz referente ao termo convectivo, \mathbf{D}^\top é a matriz gradiente, \mathbf{D} a matriz divergente e \mathbf{M} a matriz de massa.



Método de penalidades II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Podemos então eliminar a pressão chegando a:

$$\left[-\frac{1}{Re} \mathbf{L} + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} + \mathbf{N}(\mathbf{u}) \right] \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

Depois de convergida a velocidade, a pressão pode ser calculada com:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{u}$$

Vantagens:

- Desacoplamento leva a uma redução do número de graus de liberdade;
- Remoção da condição de incompressibilidade do processo de solução significa que o requisito de *div-stability* pode ser ignorado (na formulação discreta).



Método de penalidades III

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Comentários:

- Há também uma formulação contínua (discretização é feita após eliminação da pressão). As matrizes geradas são diferentes e neste caso é preciso respeitar a condição de *div-stability*.
- Quanto menor o valor de ε , melhor a aproximação, e pior o condicionamento da matriz. É preferível usar métodos diretos para a solução do sistema linear.
- Como ε é arbitrário, pode-se usar uma matriz de massa condensada no lugar de \mathbf{M} , de modo a facilitar a sua inversão.
- Referência: Gunzburger (1989).



Sumário

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- 1 Formulação variacional do problema de Stokes
- 2 Métodos acoplados para formulação em variáveis primitivas
- 3 Métodos segregados para variáveis primitivas**
- 4 Formulação velocidade–vorticidade
- 5 Método dos mínimos quadrados
- 6 Discretização dos termos não lineares
- 7 Verificação e validação
 - Soluções exatas das equações de Navier–Stokes
 - Análise de estabilidade global
 - Simulações diretas de escoamentos turbulentos (DNS)



Método de projeção I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Os métodos segregados se baseiam no fato de que é possível obter o campo de velocidades sem que seja necessário aproximar o campo de pressões. A maneira de fazer isso é projetando o campo de velocidades num campo solenoidal (divergência nula).

O espaço $L^2(\Omega)$ pode ser decomposto em uma parcela solenoidal e uma parcela irrotacional:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\mathbf{u} \mid \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \partial\Omega\},$$

$$\mathcal{G}(\Omega) = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} = \nabla\phi\},$$

de forma que funções dos dois espaços são, por definição, ortogonais,

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}\mathbf{w} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{u}\nabla\phi \, ds = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}\phi \, ds + \int_{\partial\Omega} \phi\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0.$$



Método de projeção II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Assim, a um vetor geral \mathbf{q} pode ser aplicada a decomposição de Helmholtz, $\mathbf{q} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. Definimos então o operador de projeção

\mathbb{P}_D

$$\mathbb{P} : L^2(\Omega) \mapsto \mathcal{D}(\Omega),$$

de forma que $\mathbf{u} = \mathbb{P}_D \mathbf{q}$.

Aplicando esta projeção às equações de Navier–Stokes, obtemos uma equação de evolução para a velocidade independente da pressão,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbb{P}_D [\nu \nabla^2 \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}],$$

notando que, por construção, $\mathbb{P}_D \partial \mathbf{v} / \partial t = \partial \mathbf{v} / \partial t$ pois $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.



Método de projeção III

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Na decomposição do vetor \mathbf{q} , normalmente é mais fácil determinar a parte irrotacional \mathbf{w} do que a parte solenoidal \mathbf{u} . Isto é feito resolvendo o seguinte problema elíptico de Neumann:

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}.$$

Com a solução desta equação, fazemos $\mathbf{w} = \nabla \phi$ e $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{w}$.

Em suma, o método de projeção, que é a base dos métodos segregados, aproxima a evolução da equação projetada e não da equação na sua forma primitiva.



Métodos segregados de primeira ordem

Correção da pressão I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Nesse método, a condição de incompressibilidade é inicialmente ignorada e a equação de evolução é utilizada para obter um campo de velocidades intermediário $\hat{\mathbf{v}}$. Assumindo, para simplificar, condições de contorno essenciais homogêneas para a velocidade, no primeiro subpasso temos

$$\frac{\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + (\mathbf{v}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1/2} = \nu \nabla^2 \hat{\mathbf{v}},$$

$$\hat{\mathbf{v}} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

No segundo subpasso, $\hat{\mathbf{v}}$ é projetado no espaço solenoidal através de uma correção da pressão

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \hat{\mathbf{v}}}{\Delta t} = -\nabla \bar{p}^{n+1},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0,$$

$$\mathbf{v}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$



Métodos segregados de primeira ordem

Correção da pressão II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Os termos não lineares podem ser avaliados de forma explícita em algum instante de tempo intermediário denotado por $(n + 1/2)\Delta t$.

A quantidade \bar{p} que assegura a incompressibilidade no segundo subpasso não é a pressão exata p_e , mas satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{p}^{n+1} &= \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{v}}}{\Delta t} \right) \quad \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial n} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega.\end{aligned}$$



Métodos segregados de primeira ordem

Correção da velocidade I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Neste método, a ordem dos subpassos do método anterior é invertida. Primeiramente, um campo de velocidades intermediário e solenoidal é obtido com as equações

$$\frac{\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + (\mathbf{v}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1/2} = -\nabla \bar{p}^{n+1},$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0,$$

$$\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Assim como no primeiro método, resolvemos este primeiro passo aplicando o divergente à equação de forma a obter uma equação de Poisson para a pressão.

No segundo subpasso, é feita uma correção da velocidade,

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}^{n+1},$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$



Métodos segregados de primeira ordem

Condições de contorno da pressão

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Em ambos os métodos, o campo \bar{p}^{n+1} satisfaz condições de contorno de Neumann homogêneas. Entretanto a pressão exata $p_e(\mathbf{x}, t)$ satisfaz

$$\begin{aligned}\nabla^2 p_e &= -\nabla \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] \quad \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial p_e}{\partial n} &= \mathbf{n} \cdot \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad \text{em } \partial\Omega.\end{aligned}$$

A condição de contorno acima é derivada da equação da quantidade de movimento projetada na direção normal. Para métodos de mais alta ordem, veremos que é essencial que as condições de contorno corretas sejam impostas na equação da pressão para que a acurácia esperada seja obtida.



Métodos segregados – fatoração LU I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Uma interpretação interessante dos métodos segregados pode ser feita aplicando uma fatoração LU ao sistema discreto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{D}^\top \\ -\mathbf{D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{f}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \nu\mathbf{L}.$$

Definindo $\mathbf{Q} = \Delta t\mathbf{M}^{-1}$, temos que

$$\mathbf{H}\mathbf{Q} = \left(\frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} + \nu\mathbf{L} \right) (\Delta t\mathbf{M}^{-1}) = \mathbf{I} + \nu\Delta t\mathbf{L}\mathbf{M}^{-1}.$$

Portanto, a seguinte aproximação de $\mathcal{O}(\nu\Delta t)$ para o termo do gradiente pode ser feita:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{D}^\top \\ -\mathbf{D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{f}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Métodos segregados – fatoração LU II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Aplicando agora a fatoração LU ao sistema, obtemos

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & 0 \\ -\mathbf{D} & -\mathbf{D}\mathbf{Q}\mathbf{D}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{p}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{f}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{Q}\mathbf{D}^T \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ \mathbf{p}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{p}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Estes dois sistemas representam os subpassos do esquema segregado.



Métodos segregados de alta ordem

Condição de contorno da pressão I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Para formular métodos segregados de alta ordem, é fundamental que a condição de contorno do tipo Neumann correta para a pressão seja utilizada na forma rotacional,

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = -\nu(\nabla \times \boldsymbol{\omega})^{n+1} \cdot \mathbf{n} \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Esta condição é equivalente àquela da pressão exata, mas reforça a condição de incompressibilidade, pois $\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times \boldsymbol{\omega}$, e resulta num método mais estável

Para ilustrar a diferença entre as duas, introduzindo a notação $w_s = \nabla \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ e $Q = \nabla \cdot \mathbf{v}$, consideraremos a imposição da condição de contorno exata no passo de tempo $(n+1)\Delta t$,

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = \nu \left(\frac{\partial Q^{n+1}}{\partial n} - w_s^{n+1} \right).$$



Métodos segregados de alta ordem

Condição de contorno da pressão II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Expandindo ω_s em série de Taylor,

$$\frac{\partial Q^{n+1}}{\partial n} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} + \omega_s^n + \Delta t \frac{\partial \omega_s^n}{\partial t} + \dots$$

Inserindo a forma laplaciana

$$\frac{\partial p_e}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nu \nabla^2 \mathbf{v} = \nu \left(\frac{\partial Q}{\partial n} - \omega_s \right)$$

na equação acima, concluímos que

$$\frac{\partial Q^{n+1}}{\partial n} \propto \frac{\partial Q^n}{\partial n} + \Delta t \frac{\partial \omega_s^n}{\partial t},$$

que mostra uma acumulação do fluxo do termo de divergência na fronteira em todo passo de tempo.



Métodos segregados de alta ordem

Condição de contorno da pressão III

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Se ao invés disso usarmos a forma rotacional,
 $-\nu(\nabla \times \boldsymbol{\omega})^{n+1} \cdot \mathbf{n}$, obtemos

$$\frac{\partial Q^{n+1}}{\partial n} \propto \Delta t \frac{\partial \omega_s^n}{\partial t},$$

que significa que a magnitude do fluxo do divergente na fronteira é controlado diretamente pelo tamanho do passo de tempo.

Para diminuir este erro e desacoplar a velocidade da pressão na fronteira, podemos usar uma aproximação de múltiplos passos para representar o lado direito da equação acima

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = -\nu \mathbf{n} \cdot \sum_{q=0}^{J_p-1} \beta_q (\nabla \times \boldsymbol{\omega})^{n-q} \Rightarrow \frac{\partial Q^{n+1}}{\partial n} \propto (\Delta t)^{J_p}.$$



Métodos segregados de alta ordem

Condição de contorno da pressão IV

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

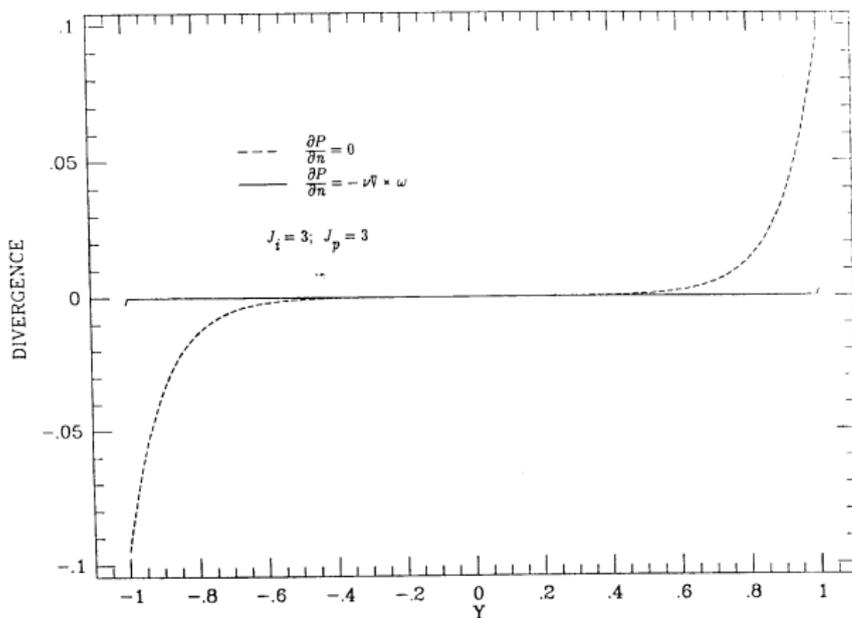
Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Comparações utilizando escoamento de Stokes em um canal – uso da condição de contorno adequada.





Métodos segregados de alta ordem

Condição de contorno da pressão V

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

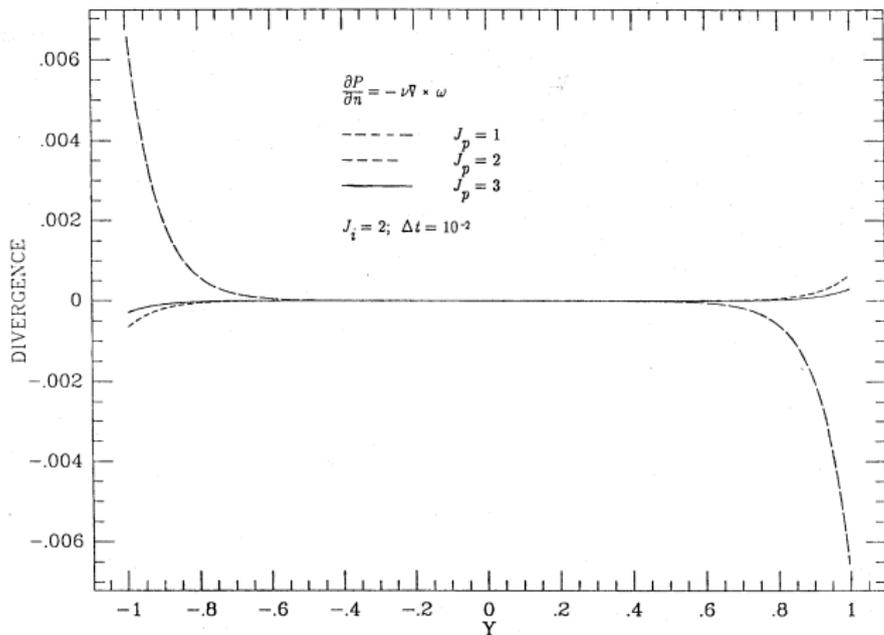
Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Comparações utilizando escoamento de Stokes em um canal – ordem da discretização temporal.





Métodos segregados de alta ordem

Avanço no tempo com diferenciação para trás I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Karniadakis *et al.* (1991) mostraram que, ao se aumentar a ordem da integração no tempo, métodos de integração para frente (família Adams) requerem passos de tempo muito pequenos. A melhor alternativa é utilizar métodos de diferenciação para trás.

Assumindo ordem de integração J_e para os termos de advecção, J_i para os termos de difusão e J_p para a condição de contorno da pressão, o esquema é

$$\frac{\hat{\mathbf{v}} - \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q \mathbf{v}^{n-q}}{\Delta t} = - \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}]^{n-q},$$

$$\frac{\hat{\hat{\mathbf{v}}} - \hat{\mathbf{v}}}{\Delta t} = -\nabla \bar{p}^{n+1},$$

$$\frac{\gamma_0 \mathbf{v}^{n+1} - \hat{\hat{\mathbf{v}}}}{\Delta t} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}^{n+1}.$$



Métodos segregados de alta ordem

Avanço no tempo com diferenciação para trás II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Os coeficientes do esquema são dados na tabela abaixo

Coeficiente	1 ^a ordem	2 ^a ordem	3 ^a ordem
γ_0	1	3/2	11/6
α_0	1	2	3
α_1	0	-1/2	-3/2
α_2	0	0	1/3
β_0	1	2	3
β_1	0	-1	-3
β_2	0	0	1

A segunda equação para a pressão e a terceira equação para a correção viscosa podem ser rearranjadas na forma de equações de Poisson e Helmholtz, respectivamente.



Métodos segregados de alta ordem

Avanço no tempo com diferenciação para trás III

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Para a pressão, assumindo que o campo $\hat{\mathbf{v}}$ tenha divergência nula, temos

$$\nabla^2 \bar{p}^{p+1} = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{v}}}{\Delta t} \right),$$

que é resolvida com a condição de contorno consistente:

$$\frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial n} = - \left[\frac{\partial \mathbf{v}^{n+1}}{\partial t} + \nu \sum_{q=0}^{J_p-1} \beta_q (\nabla \times \boldsymbol{\omega})^{n-q} + \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}]^{n-q} \right] \cdot \mathbf{n}.$$

Esta condição de contorno é análoga à apresentada anteriormente, mas agora foi incluída a parte transiente da velocidade e os termos não lineares de advecção.



Métodos segregados de alta ordem

Avanço no tempo com diferenciação para trás IV

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Para a correção viscosa, temos

$$\left(\nabla^2 - \frac{\gamma_0}{\nu \Delta t} \right) \mathbf{v}^{n+1} = - \left(\frac{\hat{\mathbf{v}}}{\nu \Delta t} \right),$$

para a qual impomos as condições de contorno essenciais.

Na prática, combinamos analiticamente o primeiro e o segundo passo, de forma que o esquema fica com dois passos:

$$\frac{\hat{\mathbf{v}} - \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q \mathbf{v}^{n-q}}{\Delta t} = - \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}]^{n-q} - \nabla \bar{p}^{n+1},$$

$$\frac{\gamma_0 \mathbf{v}^{n+1} - \hat{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}^{n+1}.$$

O método tem boas características de estabilidade até 3ª ordem. Para ordem superiores, geralmente é instável.



Métodos segregados de alta ordem

Conclusões e recomendações I

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- Para esquemas segregados de correção de velocidade, como o que vimos, não é necessário que os espaços de velocidades e pressão obedçam a condição inf-sup. Para esquemas de correção de pressão, se a condição inf-sup é violada a convergência é subótima.
- Métodos segregados são eficientes, mais baratos e particularmente acurados na resolução de escoamentos com números de Reynolds altos
- Esquemas de correção de velocidade ou de pressão, de segunda ordem, tem erros de velocidade $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ e de pressão $\mathcal{O}(\Delta t^{3/2})$ se a condição consistente de pressão, na forma rotacional, for utilizada.



Métodos segregados de alta ordem

Conclusões e recomendações II

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- O esquema de correção de velocidade pode ser estendido para ordens superiores, mas é apenas condicionalmente estável para terceira ordem e superiores devido ao tratamento explícito da condição de contorno da pressão.
- Integração temporal baseada em diferenciação para trás é mais estável do que a baseada em integração para frente.
- Para escoamentos com baixos números de Reynolds, métodos acoplados são mais acurados do que métodos segregados.



Sumário

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- 1 Formulação variacional do problema de Stokes
- 2 Métodos acoplados para formulação em variáveis primitivas
- 3 Métodos segregados para variáveis primitivas
- 4 Formulação velocidade–vorticidade**
- 5 Método dos mínimos quadrados
- 6 Discretização dos termos não lineares
- 7 Verificação e validação
 - Soluções exatas das equações de Navier–Stokes
 - Análise de estabilidade global
 - Simulações diretas de escoamentos turbulentos (DNS)



Características da formulação velocidade–vorticidade

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Os usuários deste tipo de formulação advogam as seguintes vantagens:

- Eliminação da pressão, que leva a uma formulação mais simples de um operador de difusão, ao invés de um operador de Stokes;
- A condição de divergência nula é imposta implicitamente;
- É imposto que o campo de vorticidade, que é normalmente relevante na análise de escoamentos, seja C^0 na interface dos elementos, enquanto que na formulação primitiva esta condição só é alcançada na convergência.

A formulação é complicada pela ausência de condições de contorno de vorticidade e pela restrição de incompressibilidade no campo de velocidades.



Formulação velocidade–vorticidade I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Na formulação apresentada aqui, a restrição de incompressibilidade é substituída por uma equação de Poisson em \mathbf{v} e a definição de vorticidade será imposta na fronteira do domínio, $\partial\Omega$, de forma que será equivalente a uma condição de contorno para a vorticidade.

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times \mathbf{v}) = -\nu \nabla \times \nabla \times \omega \quad \text{em } \Omega,$$

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla \times \omega \quad \text{em } \Omega,$$

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} \quad \text{em } \partial\Omega,$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega,$$

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} \quad \text{no instante } t = 0 \quad \text{em } \Omega,$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dx = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad \text{onde } \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega.$$



Formulação velocidade–vorticidade II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Em domínios com “buracos” no interior, como é o caso do escoamento ao redor de um cilindro, uma restrição extra precisa ser imposta de modo a garantir unicidade da solução. Na superfície do cilindro aplicamos a equação da quantidade de movimento,

$$0 = -\nabla p - \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega}$$

e, depois de integrar ao longo da superfície do cilindro, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \nabla p|_{r=R}(r \, d\theta) = - \int_0^{2\pi} \nu(\nabla \times \boldsymbol{\omega})|_{r=R} R \, d\theta.$$

Portanto, a seguinte condição tem que ser satisfeita na superfície do cilindro

$$\int_0^{2\pi} (\nabla \times \boldsymbol{\omega})|_{r=R} R \, d\theta = 0.$$



Sumário

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- 1 Formulação variacional do problema de Stokes
- 2 Métodos acoplados para formulação em variáveis primitivas
- 3 Métodos segregados para variáveis primitivas
- 4 Formulação velocidade–vorticidade
- 5 Método dos mínimos quadrados**
- 6 Discretização dos termos não lineares
- 7 Verificação e validação
 - Soluções exatas das equações de Navier–Stokes
 - Análise de estabilidade global
 - Simulações diretas de escoamentos turbulentos (DNS)



Método dos mínimos quadrados

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Na formulação de elementos finitos que utiliza o método dos mínimos quadrados ($v_j(\mathbf{x}) = \partial R / \partial \hat{u}_j$, onde R é o resíduo), não é necessária nenhuma compatibilidade especial entre os espaços funcionais para garantir unicidade, e ao mesmo tempo o operador de Stokes permanece acoplado.

Adotando a formulação de velocidade–vorticidade–pressão em duas dimensões, temos

$$\nabla p + \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{f}$$

$$\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{v} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Esta forma é utilizada porque o método dos mínimos quadrados é normalmente aplicado a sistemas de alta ordem.



Condições de contorno para o método dos mínimos quadrados e funcional minimizado

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

A unicidade da solução depende das condições de contorno. As combinações apropriadas estão listadas na tabela abaixo. Perceba que são todas condições de Dirichlet.

CC1:	CC2:	CC3:	CC4:	CC5:	CC6:
Simetria	Entrada	Saída	Saída	Parede, saída	Saída
$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ $\omega = 0$	$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ $p = 0$	$\mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0$ $p = 0$	$\mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0$ $\omega = 0$	$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ $\mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0$	$\omega = 0$ $p = 0$

O funcional a ser minimizado é

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2} (\|\nabla p + \nu \nabla \times \omega - \mathbf{f}\|_0^2 + \|\omega - \nabla \times \mathbf{v}\|_0^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_0^2)$$



Desempenho da formulação de mínimos quadrados

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

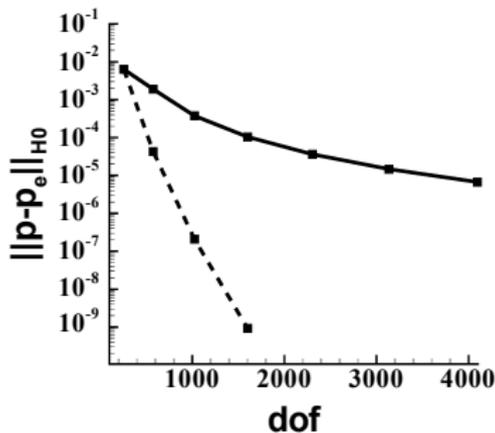
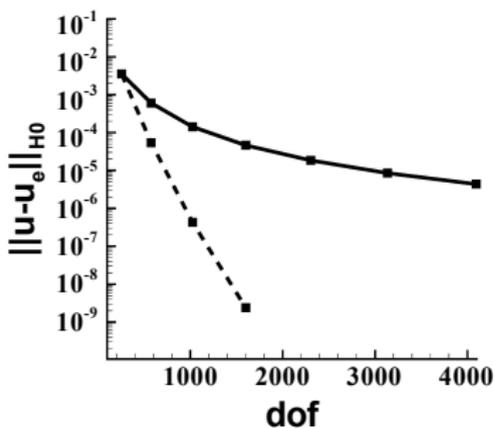
Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Comparação das convergências h (linhas cheias) e p (linhas tracejadas) para um problema modelo de Stokes:





Sumário

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- 1 Formulação variacional do problema de Stokes
- 2 Métodos acoplados para formulação em variáveis primitivas
- 3 Métodos segregados para variáveis primitivas
- 4 Formulação velocidade–vorticidade
- 5 Método dos mínimos quadrados
- 6 Discretização dos termos não lineares**
- 7 Verificação e validação
 - Soluções exatas das equações de Navier–Stokes
 - Análise de estabilidade global
 - Simulações diretas de escoamentos turbulentos (DNS)



Formas dos termos não lineares

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- Convectiva: $D\mathbf{v}/Dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$;
- Conservativa (fluxo): $D\mathbf{v}/Dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v})$;
- Rotacional: $D\mathbf{v}/Dt = \partial\mathbf{v}/\partial t - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + 1/2\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$;
- Antissimétrica: $D\mathbf{v}/Dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + 1/2[(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v})]$.

A forma rotacional requer o cálculo de 6 derivadas, a convectiva 9 e a antissimétrica 18.

Normalmente, os termos não lineares são calculados no espaço físico, mesmo quando expansões modais estão sendo utilizadas.

Não existe consenso sobre qual forma é melhor do que a outra no caso geral. O desempenho depende do tipo de problema e da discretização aplicada.



Discretização temporal da formulação semi-lagrangiana I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Aplicando a formulação semi-lagrangiana às equações de Navier–Stokes:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Aplicando uma discretização temporal de segunda ordem, baseada no método de diferenciação para trás, temos

$$\frac{\frac{3}{2}\mathbf{v}^{n+1} - 2\mathbf{v}_d^n - \frac{1}{2}\mathbf{v}_d^{n-1}}{\Delta t} = (-\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v})^{n+1},$$

onde \mathbf{v}_d^n é a velocidade no ponto de partida \mathbf{x}_d^n no instante de tempo t^n .



Discretização temporal da formulação semi-lagrangiana II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

O ponto de partida \mathbf{x}_d^n é obtido resolvendo-se a equação característica

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{v}^{n+1/2}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t^{n+1}) = \mathbf{x}_a,$$

onde \mathbf{x}_a é o vetor posição nos pontos de chegada, que coincidem com os pontos da malha.

A velocidade no instante $t^{n+1/2}$ é aproximada usando uma extrapolação de segunda ordem, num intervalo Δt

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \frac{3}{2}\mathbf{v}^n - \frac{1}{2}\mathbf{v}^{n-1}$$

O ponto \mathbf{x}_d^{n-1} é obtido resolvendo a seguinte expressão num intervalo de tempo $2\Delta t$

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{v}^n(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t^{n+1}) = \mathbf{x}_a,$$



Discretização temporal da formulação semi-lagrangiana III

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Assim, um esquema segregado de três passos pode ser aplicado para resolver o sistema

$$\frac{\hat{\mathbf{v}} - 2\mathbf{v}_d^n + \frac{1}{2}\mathbf{v}_d^{n-1}}{\Delta t} = 0,$$

$$\frac{\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{v}}}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1},$$

$$\frac{\frac{3}{2}\mathbf{v}^{n+1} - \hat{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}^{n+1}.$$



Convergência da formulação semi-lagrangiana na solução de um vórtice de Taylor

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

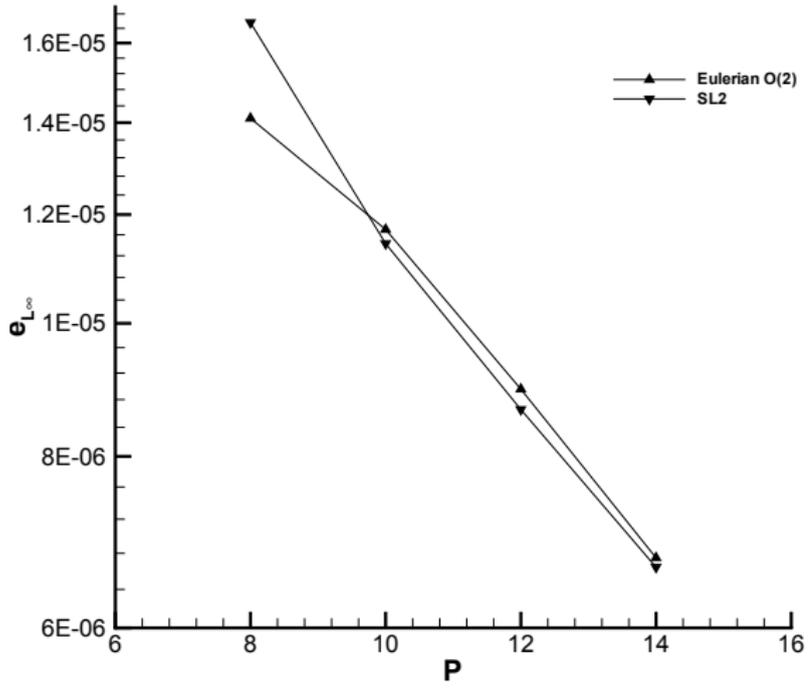
Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências





Dependência de Δt na solução de um vórtice de Taylor

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

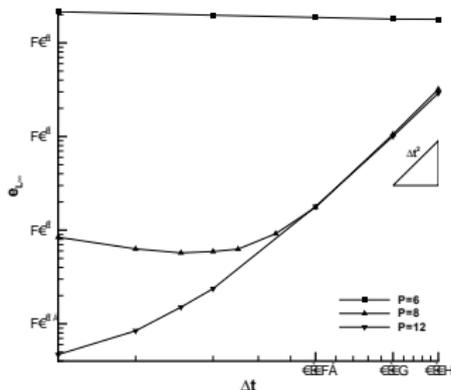
Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

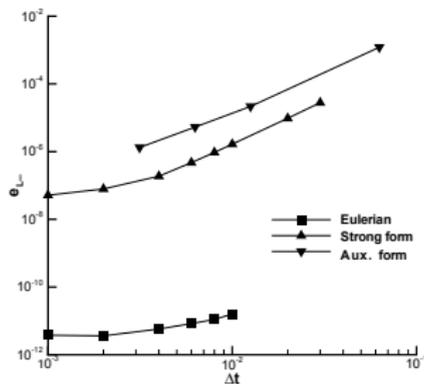
Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências



Resultados para a forma forte do SL



Comparação entre as formas forte, auxiliar e formulação euleriana para $P = 12$



Sumário

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- 1 Formulação variacional do problema de Stokes
- 2 Métodos acoplados para formulação em variáveis primitivas
- 3 Métodos segregados para variáveis primitivas
- 4 Formulação velocidade–vorticidade
- 5 Método dos mínimos quadrados
- 6 Discretização dos termos não lineares
- 7 Verificação e validação**
 - Soluções exatas das equações de Navier–Stokes
 - Análise de estabilidade global
 - Simulações diretas de escoamentos turbulentos (DNS)



Verificação e validação

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Serão apresentados diversos exemplos de simulações de escoamentos incompressíveis.

- 1 Soluções exatas de escoamentos, com fins de validação;
- 2 Análise de estabilidade global, mostrando uma aplicação moderna de simulações numéricas laminares a baixos Re ;
- 3 Simulações diretas de escoamentos turbulentos (DNS), incluindo diagnósticos de resolução;
- 4 Simulações de grandes escalas (LES), focando em discretizações de alta ordem;
- 5 Simulações diretas dinâmicas, onde são utilizados procedimentos adaptativos de refinamento p .



Sumário

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- 1 Formulação variacional do problema de Stokes
- 2 Métodos acoplados para formulação em variáveis primitivas
- 3 Métodos segregados para variáveis primitivas
- 4 Formulação velocidade–vorticidade
- 5 Método dos mínimos quadrados
- 6 Discretização dos termos não lineares
- 7 Verificação e validação
 - Soluções exatas das equações de Navier–Stokes
 - Análise de estabilidade global
 - Simulações diretas de escoamentos turbulentos (DNS)



Turbilhões de Moffat – Parâmetros

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Trata-se do escoamento viscoso próximo a um canto agudo, com número de Reynolds nulo (escoamento de Stokes).

Parâmetros:

- Cunha de razão de aspecto 2:1;
- Discretização com 30 elementos triangulares, utilizando expansões de ordem 8, 11, 14 e 17;
- Passo de tempo $\Delta t = 10^{-4}$;
- Escoamento forçado por uma velocidade parabólica no topo da cunha.

Usando uma solução de similaridade, Moffat (1964) determinou que a solução assintótica para este caso é uma sequência infinita de vórtices, cada um 406 vezes menos intenso (razão entre a máxima velocidade transversa local ao longo da linha de centro) que o anterior.



Turbilhões de Moffat – Malha e campo de velocidade/vorticidade

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

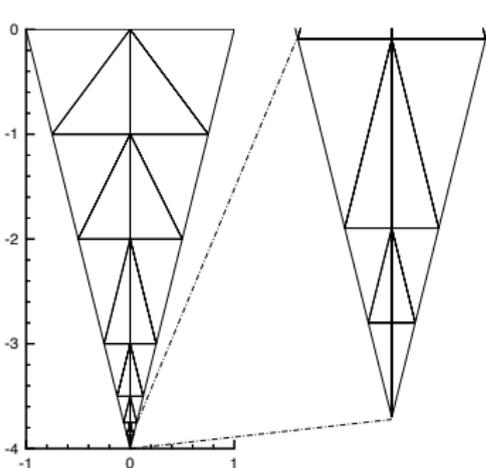
Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

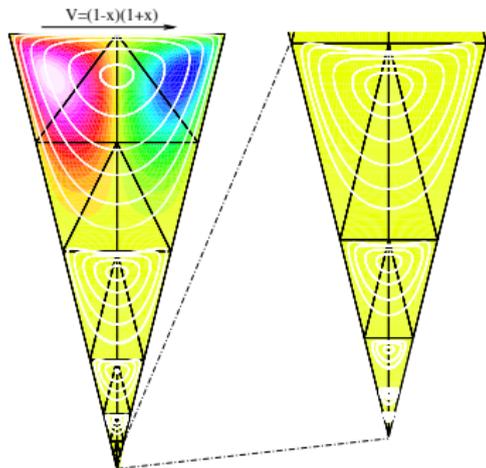
Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências



Malha utilizada



Solução obtida com
 $P = 17$, mostrando 9
vórtices



Turbilhões de Moffat – Resultados e comparações

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Turb.	Ordem da expansão							
	$P = 8$		$P = 11$		$P = 14$		$P = 17$	
	Max. vel.	Razão	Max. vel.	Razão	Max. vel.	Razão	Max. vel.	Razão
1	$-2.0122e^{-01}$		$-2.0099e^{-01}$		$-2.0101e^{-01}$		$-2.0101e^{-01}$	
2	$5.0147e^{-04}$	401.26	$5.0213e^{-04}$	400.28	$5.0213e^{-04}$	400.31	$5.0213e^{-04}$	400.31
3	$-1.2588e^{-06}$	398.35	$-1.2349e^{-06}$	406.63	$-1.2346e^{-06}$	406.72	$-1.2346e^{-06}$	406.72
4	$2.7480e^{-09}$	458.10	$3.0362e^{-09}$	406.71	$3.0354e^{-09}$	406.72	$3.0354e^{-09}$	406.72
5	$-7.4125e^{-12}$	370.72	$-7.4650e^{-12}$	406.72	$-7.4630e^{-12}$	406.72	$-7.4630e^{-12}$	406.72
6	$5.8248e^{-14}$	127.26	$1.8353e^{-14}$	406.74	$1.8349e^{-14}$	406.72	$1.8349e^{-14}$	406.72
7	$-2.0312e^{-16}$	286.76	$-4.5123e^{-17}$	406.74	$-4.5114e^{-17}$	406.72	$-4.5114e^{-17}$	406.72
8	não resolvido		$1.0890e^{-19}$	414.33	$1.1091e^{-19}$	406.75	$1.1092e^{-19}$	406.72
9	não resolvido		não resolvido		$-2.7819e^{-22}$	398.75	$-2.7575e^{-22}$	402.25

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências



Escoamento de Wannier – parâmetros

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Trata-se do escoamento de Stokes ao redor de um cilindro girante próximo a uma parede em movimento. A solução depende do raio do cilindro, r , da rotação do mesmo, ω , da distância do cilindro à parede, d , e da velocidade da parede, U .

Posicionando o centro do cilindro em $(x, y) = (0, 0)$ e definindo $s^2 = d^2 - r^2$ e $\Gamma = (d + s)/(d - s)$ e as constantes

$$a_0 = \frac{U}{\ln \Gamma}, \quad a_1 = -d \left(a_0 + \frac{1}{2} \frac{r^2 \omega}{s} \right),$$
$$a_2 = 2(d + s) \left(a_0 + \frac{1}{2} \frac{r^2 \omega}{s} \right), \quad a_3 = 2(d - s) \left(a_0 + \frac{1}{2} \frac{r^2 \omega}{s} \right).$$



Escoamento de Wannier – solução

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Introduzindo funções da posição (x, y) ,

$$Y_1(y) = y + d, \quad Y_2(y) = 2Y_1,$$

$$K_1(x, y) = x^2 + (s + Y_1)^2, \quad K_2(x, y) = x^2 + (s - Y)^2$$

A solução é dada por

$$u = U - 2(a_1 + a_0 Y_1) \left[\frac{s + Y_1}{K_1} + \frac{s - Y_1}{K_2} \right] - a_0 \ln \left(\frac{K_1}{K_2} \right) + \\ - \frac{a_2}{K_1} \left[s + Y_2 - \frac{(s + Y_1)^2 Y_2}{K_1} \right] - \frac{a_3}{K_2} \left[s - Y_2 + \frac{(s + Y_1)^2 Y_2}{K_2} \right],$$

$$v = \frac{2x}{K_1 K_2} (a_1 + a_0 Y_1) (K_2 - K_1) - \frac{xa_2 (s + Y_1) Y_2}{K_1^2} + \\ - \frac{xa_3 (s - Y_1) Y_2}{K_2^2}.$$

Escoamento de Wannier – malhas

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

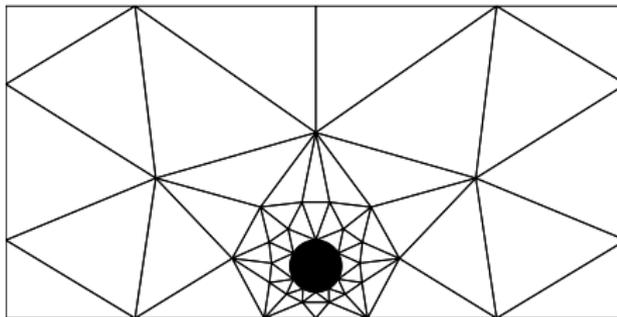
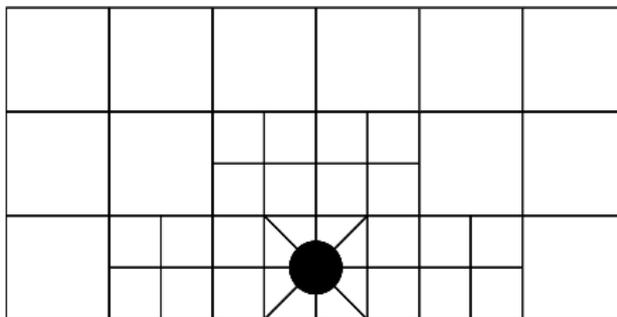
Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências





Escoamento de Wannier – resultados

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

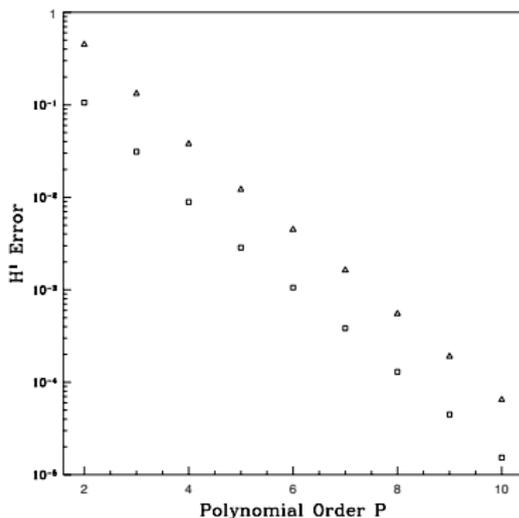
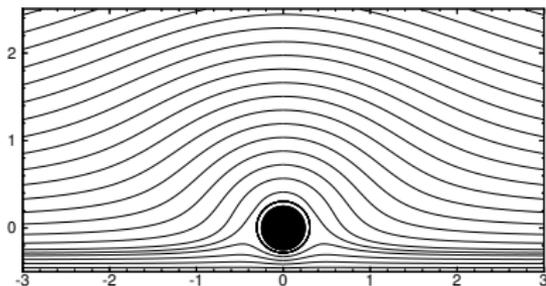
Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências





Escoamento de Kovasznyay – solução exata e malhas

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

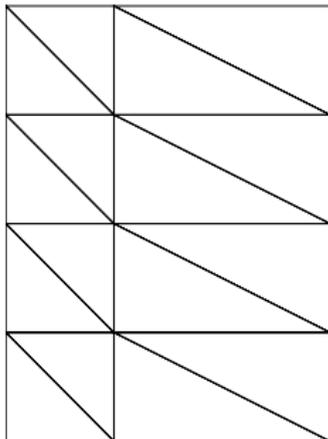
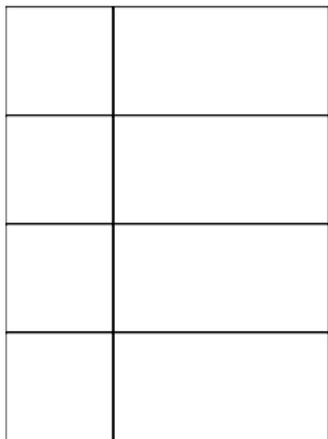
Referências

Escoamento laminar, permanente, atrás de grade bidimensional.

A solução é dada por

$$u = 1 - e^{\lambda x} \cos(2\pi y), \quad v = \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x} \sin(2\pi y), \quad p = \frac{1}{2}(1 - e^{2\lambda x}),$$

onde $\lambda = 1/2\nu - [(1/4\nu^2) + 4\pi^2]^{1/2}$.





Escoamento de Kovasznay – solução numérica e convergência

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

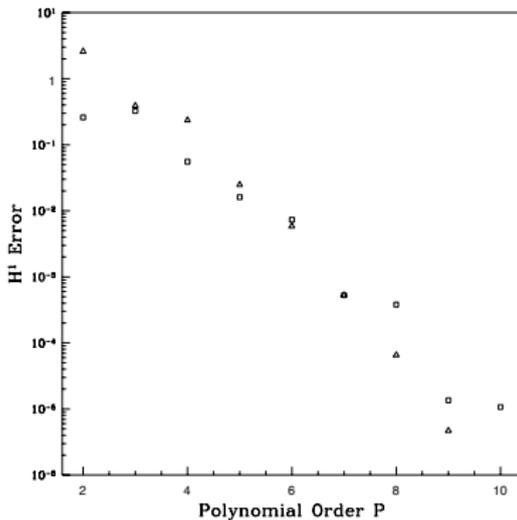
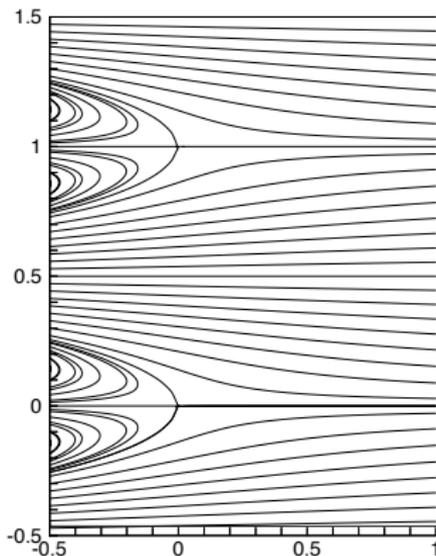
Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências





Sumário

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- 1 Formulação variacional do problema de Stokes
- 2 Métodos acoplados para formulação em variáveis primitivas
- 3 Métodos segregados para variáveis primitivas
- 4 Formulação velocidade–vorticidade
- 5 Método dos mínimos quadrados
- 6 Discretização dos termos não lineares
- 7 Verificação e validação**
 - Soluções exatas das equações de Navier–Stokes
 - **Análise de estabilidade global**
 - Simulações diretas de escoamentos turbulentos (DNS)



Análise de estabilidade global

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

A análise de estabilidade global trata do estudo de escoamentos base bidimensionais (homogêneos em apenas uma direção) ou tridimensionais. Podem ser estacionários ou periódicos no tempo.

Aqui trataremos especificamente de casos análise de estabilidade *linear* e *modal*, embora hajam também muitos trabalhos e desenvolvimentos recentes tanto na área de estabilidade não-linear quanto linear não modal.



Análise global de estabilidade linear

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Campo de velocidade e pressão:

$$u_i = U_i + u'_i, p = P + p' \quad \text{com } u'_i \ll U_i, p' \ll P$$

\Rightarrow termo $u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$ pode ser desprezado.

Equações linearizadas de Navier–Stokes para a perturbação:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} = -u'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - U_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u'_i$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0$$

Ou, em forma abreviada:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} = \mathbb{L}(u'_i)$$



Formulação do problema de autovalor para campo base estacionário I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Chamando as coordenadas $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$, admitindo um campo base estacionário $U_i = U_i(x, y, z)$, e discretizando as equações no espaço obteremos o seguinte sistema semi-discreto,

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A} \mathbf{u},$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{A} é o operador discreto correspondente ao operador contínuo \mathbb{L} e \mathbf{u} é o vetor solução.

Como o sistema é linear, as soluções contínuas terão a forma

$$u'_i = u'_i(x, y, z, t) = \tilde{u}'_i(x, y, z) e^{\sigma t} + \text{c.c.}$$

e seu equivalente discreto

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} e^{\sigma t} + \text{c.c.}$$



Formulação do problema de autovalor para campo base estacionário II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Substituindo na equação discreta, obtemos um problema de autovalor generalizado:

$$\sigma \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}$$

Este sistema só admitirá soluções não nulas se $\det(\mathbf{A} - \sigma \mathbf{M}) = 0$. Os valores de σ que satisfazem esta relação são os autovalores generalizados deste problema.

Os autovetores $\tilde{\mathbf{u}}_k$ associados a cada um dos autovalores σ_k podem ser determinados achando-se uma base do espaço solução do sistema homogêneo:

$$(\mathbf{A} - \sigma_k \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{u}}_k = 0$$



Formulação do problema de autovalor para campo base periódico no tempo I

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Usamos análise de Floquet. Campo base periódico no tempo:
 $U_i(x, y, z, t) = U_i(x, y, z, t + T)$, onde T é o período.

Neste caso, a matriz $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ depende do tempo e também é periódica: $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T)$.

As soluções contínuas terão a forma

$$u'_i = u'_i(x, y, z, t) = \tilde{u}'_i(x, y, z, t)e^{\sigma t} + \text{c.c.}$$

onde \tilde{u}'_i também é periódico no tempo.

$$\tilde{u}'_i(x, y, z, t) = \tilde{u}_i(x, y, z, t + T)$$



Formulação do problema de autovalor para campo base periódico no tempo II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Integrando num período:

$$\int_t^{t+T} \frac{\partial u'_i}{\partial t} = \int_t^{t+T} \mathbb{L}(u'_i) dt \quad \Rightarrow \quad u'_{i,t+T} = \int_t^{t+T} \mathbb{L}(u'_i) dt + u'_{i,t}$$

Definindo o operador $\mathbb{B}(u'_{i,t})$:

$$\mathbb{B}(u'_{i,t}) \equiv \int_t^{t+T} \mathbb{L}(u'_i) dt + u'_{i,t},$$

sabendo que $u'_{i,t+T} = e^{\sigma T} u'_{i,t} = \mu u'_{i,t}$ e discretizando o sistema, teremos:

$$\mu \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u}$$



Formulação do problema de autovalor para campo base periódico no tempo III

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Os autovalores do operador \mathbf{B} são os multiplicadores de Floquet (μ) e os autovetores $\tilde{u}'_i(x, y, z, t)$ são os modos de Floquet:

$$\mu \equiv e^{\sigma T} \begin{cases} |\mu| < 1 & \Rightarrow \text{escoamento estável} \\ |\mu| > 1 & \Rightarrow \text{escoamento instável} \end{cases}$$

Os autovalores de \mathbf{B} podem ser obtidos através de

- Técnicas clássicas, tal como o algoritmo QZ: fornecem todo o espectro de autovalores da matriz, mas consomem muita memória computacional.
- Técnicas baseadas em projeções em subespaços de Krylov: são iterativas e fornecem apenas uma pequena região do espectro (que pode ser escolhida), mas tornam possível o tratamento de problemas grandes, já que prescindem da formação completa da matriz, sendo necessário somente o cálculo da ação do operador sobre o vetor.



Tipos de problemas de análise global

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Caráter	Nome	Campo base	Derivadas	Função de fase
Local	OSE	$\mathbf{U}(y)$	$\partial_x \mathbf{U} = \partial_z \mathbf{U} = 0$	$\alpha x + \beta z - \sigma t$
Não local	PSE	$\mathbf{U}(x^*, y)$	$\partial_x \mathbf{U} \ll \partial_y \mathbf{U}; \partial_z \mathbf{U} = 0$	$\int \alpha(x^*) dx^* + \beta z - \sigma t$
	Biglobal	$\mathbf{U}(x, y)$	$\partial_z \mathbf{U} = 0$	$\beta z - \sigma t$
Global	PSE-3D	$\mathbf{U}(x, y, z^*)$	$\partial_z \mathbf{U} \ll \partial_x \mathbf{U}, \partial_y \mathbf{U}$	$\int \beta(z^*) dz^* - \sigma t$
	Triglobal	$\mathbf{U}(x, y, z)$	—	σt

- O asterisco indica uma dependência fraca com relação à variável (variação mais lenta em relação a esta variável).
- A função de fase é o termo na exponencial da solução. Ou seja, é Θ na expressão $e^{i\Theta}$.



Exemplo: Instabilidade secundária na esteira de von Kármán

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

J. Fluid Mech. (1996), vol. 322, pp. 215–241
Copyright © 1996 Cambridge University Press

215

Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder

By DWIGHT BARKLEY¹ AND RONALD D. HENDERSON²

¹Nonlinear Systems Laboratory, Mathematics Institute,
University of Warwick, Coventry, CV4 7AL, UK

²Aeronautics and Applied Mathematics,
California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, USA

(Received 20 March 1995 and in revised form 16 April 1996)



Barkley & Henderson (1996) – Características

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- Análise de Floquet da esteira periódica bidimensional de von Kármán (escoamento ao redor de cilindro).
- Utilização de Método de Elementos Espectrais/ hp e método de Arnoldi sem formação de matrizes (adaptado a ‘time-steppers’).
- Simulações feitas com erro extremamente baixo.
- Identificação dos modos A e B, observados anteriormente em experimentos (Williamson, 1988).
- Estabilidade de campos 2d a perturbações 3d.



Barkley & Henderson (1996) – Forma da perturbação

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

$$\mathbf{u}'(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{u}}(x, y, \beta, t) e^{i\beta z} d\beta$$

Como o campo base $\mathbf{U} = (u, v, 0)$:

$$\mathbf{u}'(x, y, z, t) = (\hat{u} \cos \beta z, \hat{v} \cos \beta z, \hat{w} \sin \beta z)$$

$$p'(x, y, z, t) = \hat{p} \cos \beta z$$

O problema tridimensional é transformado numa sequência de problemas bidimensionais. Lembramos que:

$$\partial/\partial z = -i\beta, \quad \partial^2/\partial z^2 = -\beta^2$$



Instabilidade secundária – O fenômeno

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

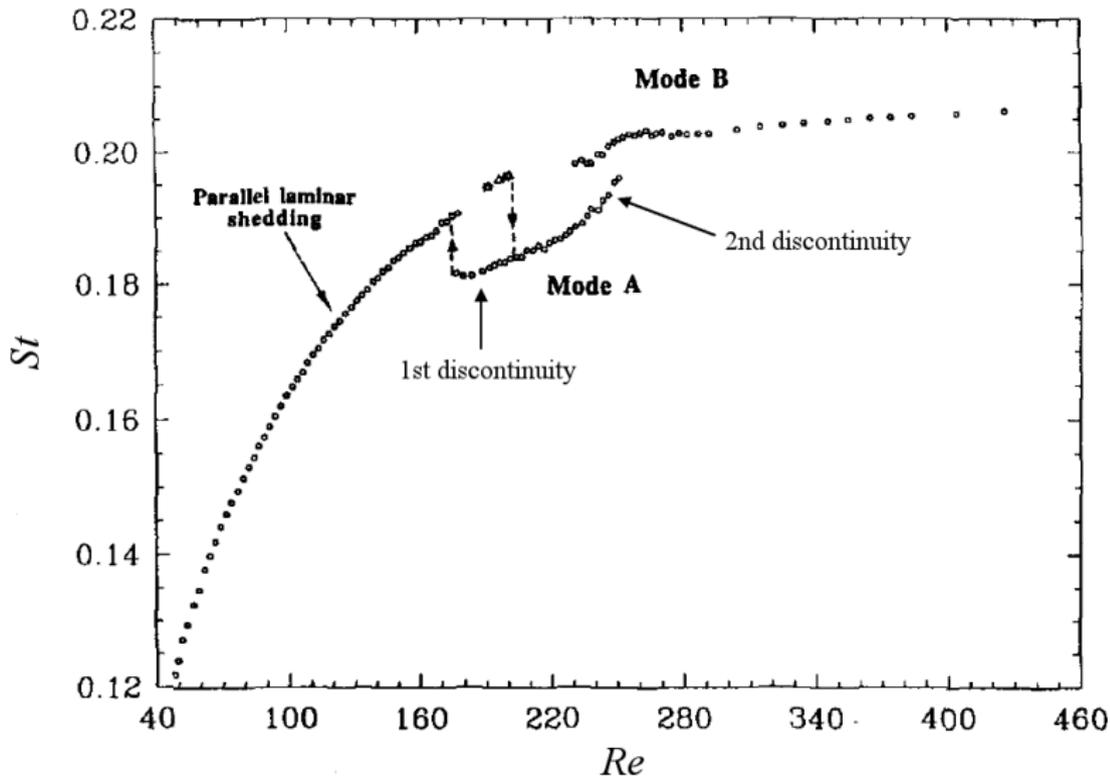
Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências





Instabilidade secundária – Modos A e B

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

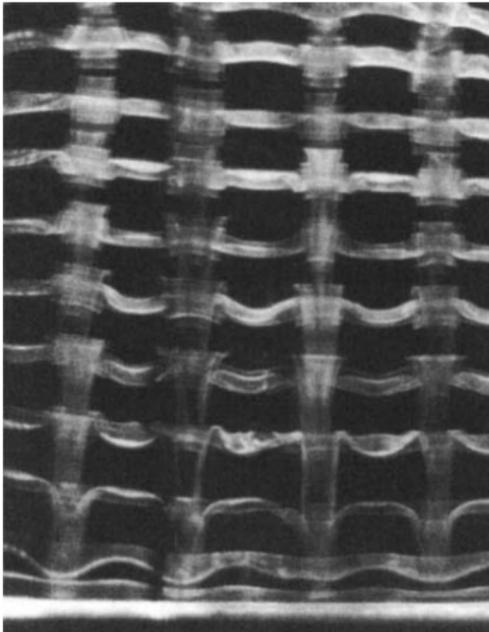
Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

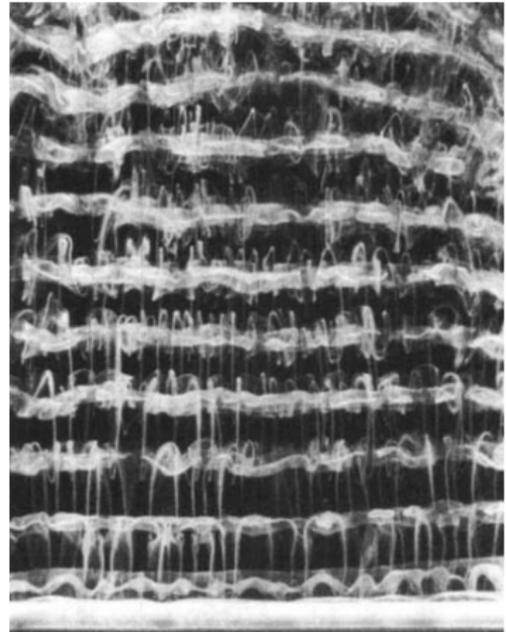
Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências



Modo A



Modo B

Barkley & Henderson (1996) – Autovalores

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

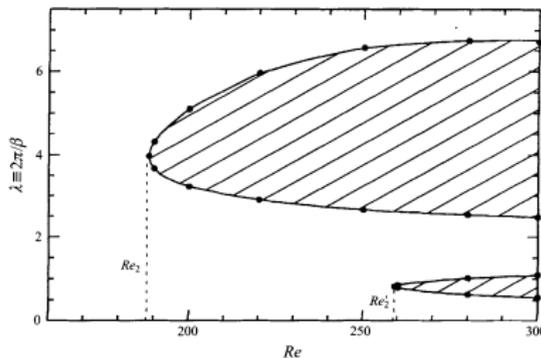
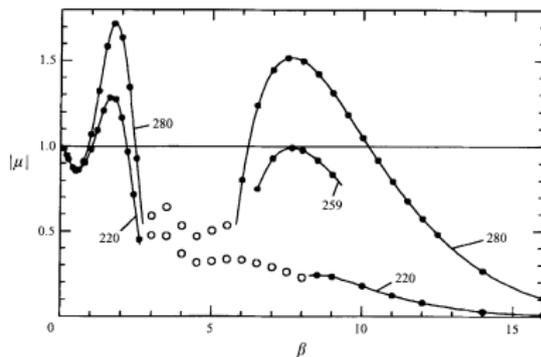
Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências



Barkley & Henderson (1996) – Modo A

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências





Barkley & Henderson (1996) – Modos A e B

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

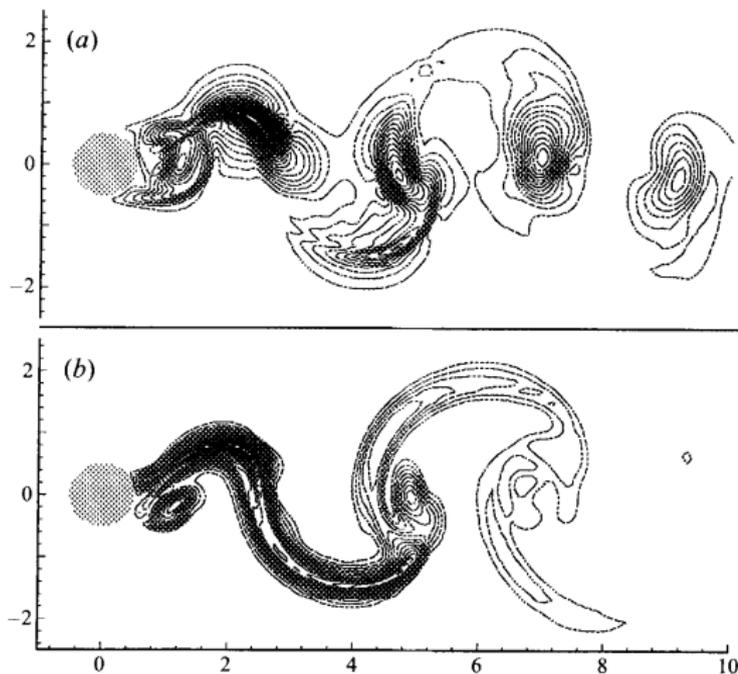
Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências





Sumário

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- 1 Formulação variacional do problema de Stokes
- 2 Métodos acoplados para formulação em variáveis primitivas
- 3 Métodos segregados para variáveis primitivas
- 4 Formulação velocidade–vorticidade
- 5 Método dos mínimos quadrados
- 6 Discretização dos termos não lineares
- 7 Verificação e validação**
 - Soluções exatas das equações de Navier–Stokes
 - Análise de estabilidade global
 - Simulações diretas de escoamentos turbulentos (DNS)



Simulações diretas de escoamentos turbulentos (DNS)

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- Métodos de elementos espectrais são particularmente adequados para o uso em DNS devido ao baixo erro numérico.
- Ainda hoje, é mais comum ver a simulação de escoamentos totalmente turbulentos apenas para geometrias simples. Para geometrias mais complexas, normalmente se chega a números de Reynolds moderados.
- Aqui abordaremos alguns aspectos práticos da implementação e uso de métodos de elementos espectrais em DNS, tais como diagnóstico de baixa resolução e métodos de estabilização.



Diagnóstico de baixa resolução

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Métodos de alta ordem se comportam de forma diferente de métodos de baixa ordem quando se tem um resultado com resolução insuficiente. Eles apresentam mais oscilações, enquanto métodos de baixa ordem são mais difusivos.

Assim, o “número de Reynolds aparente” de simulações mal resolvidas de alta ordem é maior do que o real, enquanto o inverso ocorre para métodos de baixa ordem.



Exemplo: escoamento ao redor de degrau I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

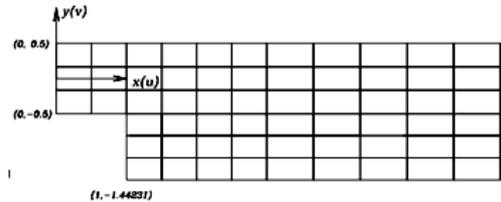
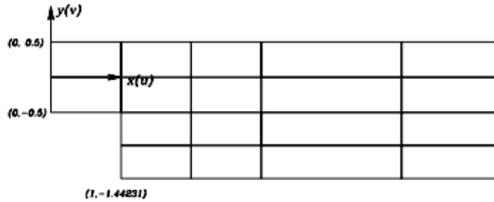
Velocidade-
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências



Exemplo: escoamento ao redor de degrau II

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
vorticidade

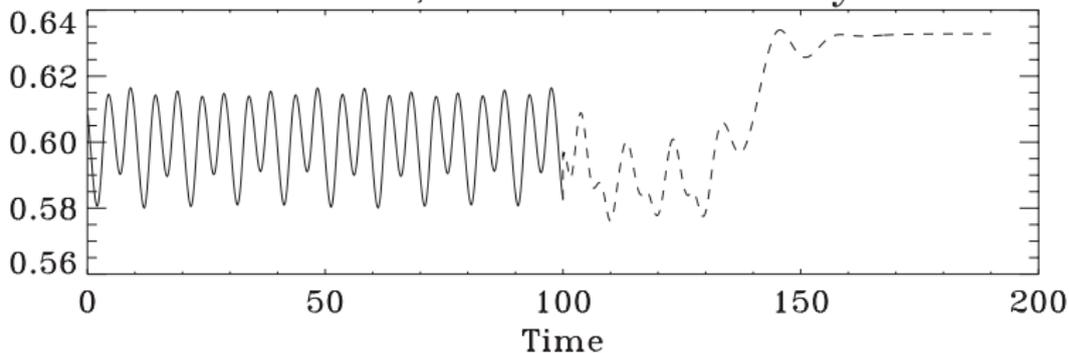
Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

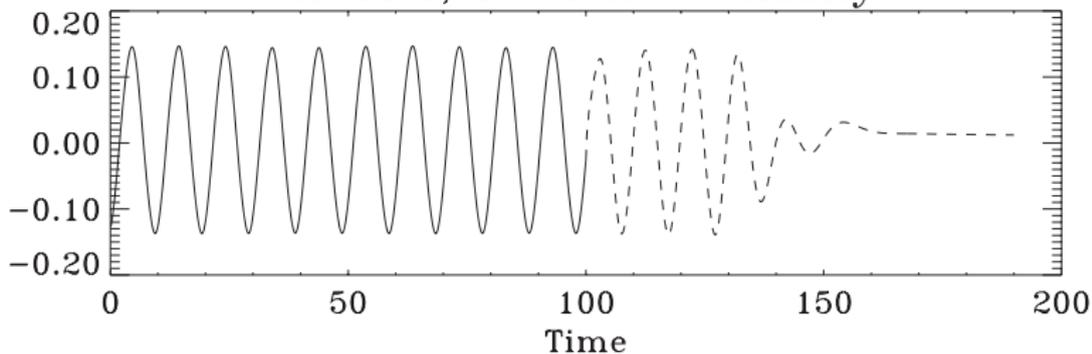
Verificação e
validação

Referências

$X=20.0, Y=-0.5$: U-velocity



$X=20.0, Y=-0.5$: V-velocity





De-aliasing polinomial I

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

Mínimos
quadrados

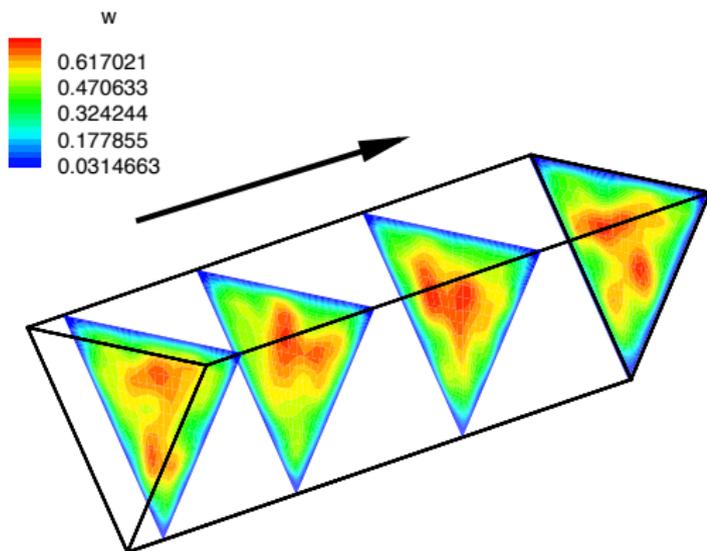
Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Devido à forma quadrática dos termos não lineares, é preciso usar $Q = 3P/2$ pontos na integração destes termos.

Para ilustrar o efeito da subintegração, vamos estudar o exemplo do escoamento num duto triangular.





De-aliasing polinomial II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade-
Vorticidade

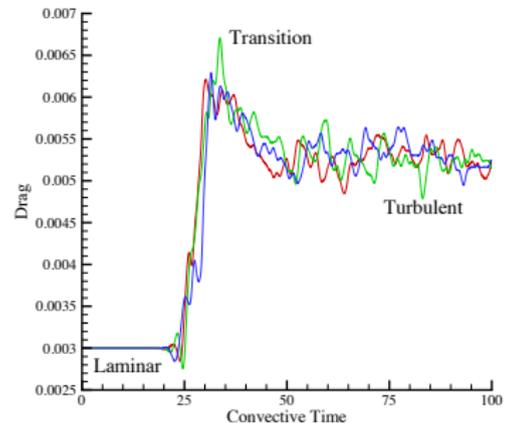
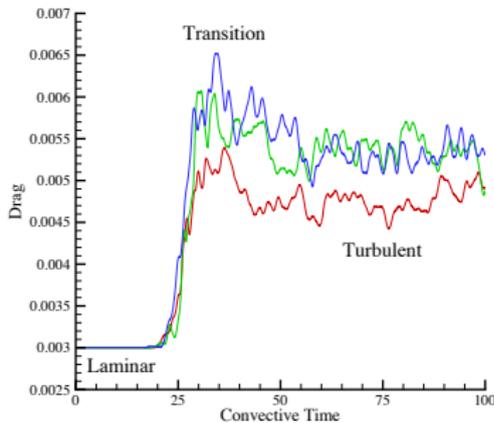
Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Devido à simetria do problema, espera-se que o arrasto médio seja o mesmo nas três paredes do duto.



Forças de cisalhamento na parede em função do tempo para $Q = P + 1$ (esquerda) e $Q = 3P/2$ (direita).



Viscosidade artificial dependente do modo I

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

A viscosidade artificial dependente do modo (SVV, do inglês spectral vanishing viscosity), introduzida na aula sobre a equação de advecção, quando usada corretamente suprime oscilações sem afetar significativamente a acurácia da solução.

Assim como pode ser usada para tratar o fenômeno de Gibbs, pode ser usada para tratar as oscilações numéricas que aparecem quando se tem uma solução mal resolvida com métodos de alta ordem.

Às equações de Navier–Stokes é adicionado um termo ao lado direito com o operador SVV:

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[F_P * \frac{\partial u_P}{\partial x} \right] = -\epsilon \sum_{k=M}^P k^2 \hat{F}_k(t) \hat{u}_k(t) e^{ikt}$$

Viscosidade artificial dependente do modo II

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

Lembramos que $\hat{F}_k(k, M, P) = e^{-\frac{(k-P)^2}{(k-M)^2}}$, $k > M$, onde M é o número de onda acima do qual a viscosidade é ativada, normalmente dado por $M = C\sqrt{P}$, sendo C uma constante.

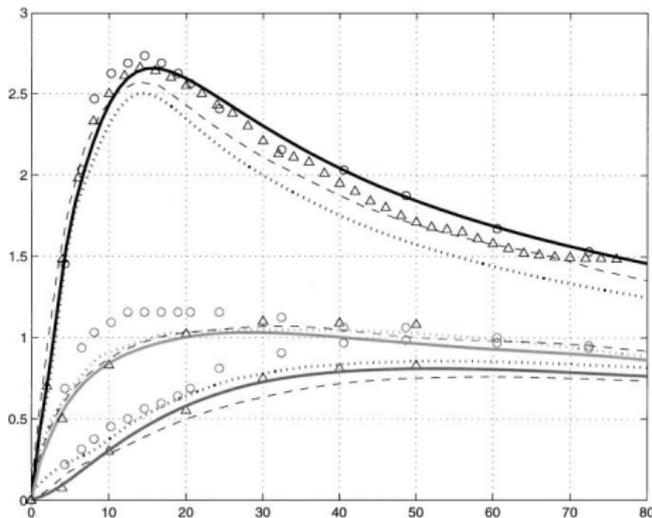


FIG. 13. Comparisons with DNS and experiments: Turbulence intensities. Dotted line—low-resolution (mesh 1) SVV; solid line—high-resolution (mesh 2) SVV; dashed line—spectral LES; circles—Kreplin and Eckelmann [45] at $Re_\tau = 194$; Triangles—Kim *et al.* [41].



Referências I

Esc.

Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- BARKLEY, D. & HENDERSON, R. D. 1996. Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, **322**, 215–241.
- CANUTO, C. 1994. Stabilization of spectral methods by finite element bubble functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **116**(1–4), 13–26.
- FRANCA, L. P., HUGHES, T. J. R. & STENBERG, R. 1993. Stabilized finite element methods. *Página 87 de: GUNZBURGER, M. D. & NICOLAIDES, R. A. (editores), Incompressible computational fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- GUNZBURGER, M. D. 1989. *Finite element methods for viscous incompressible flows: a guide to theory, practice, and algorithms*. Academic Press Inc.
- KARNIADAKIS, G. E., ISRAELI, M. & ORSZAG, S. A. 1991. High-order splitting methods for the incompressible Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, **97**, 414–443.



Referências II

Esc.
Incompressível

Bruno S.
Carmo

Formulação
variacional

Métodos
acoplados

Métodos
segregados

Velocidade–
Vorticidade

Mínimos
quadrados

Termos não
lineares

Verificação e
validação

Referências

- PHILLIPS, T. N. & ROBERTS, G. W. 1993. The treatment of spurious pressure modes in spectral incompressible flow calculations. *Journal of Computational Physics*, **105**(1), 150–164.
- WILLIAMSON, C. H. K. 1988. The existence of two stages in the transition to three-dimensionality of a cylinder wake. *Physics of Fluids*, **31**(11), 3165–3168.