Formulação Multidimensional – Operações Globais

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor

Prof. Bruno S. Carmo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

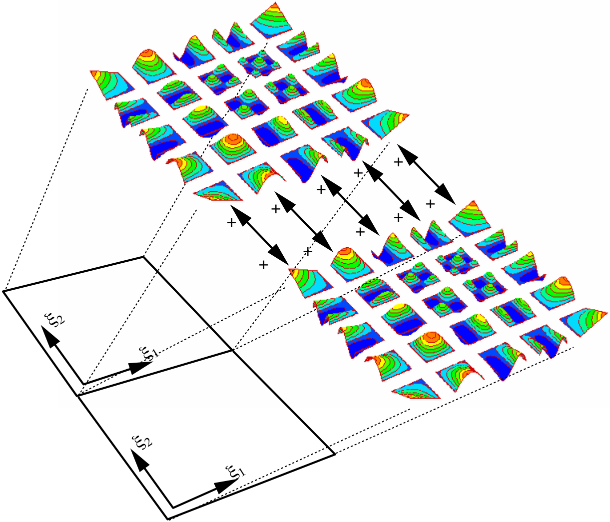
2017

Introdução

- Até agora, só tratamos de operações locais (elementares) na formulação multidimensional
- Aproximação global deve ser C^0 (Obs[1])
- Operação de montagem global
- Decomposição dos modos elementares em contorno-interior
- Vantagem em fazer a maior parte das operações no nível do elemento

[1] Requisitos de continuidade alternativos podem ser impostos, como, por exemplo, em Galerkin Descontínuo

Introdução



Sumário

Modos de expansão globais

Sendo $\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$ os modos de expansão locais definidos para os elementos padrão Ω_{st}, e considerando que o domínio de interesse Ω seja dividido em N_{el} elementos denotados por Ω^e, os modos de expansão globais $\phi^e_{pq}(\xi_1, \xi_2)$ são definidos assim:

$$\phi^e_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2), & (x_1, x_2) \in \Omega^e, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega^e, \end{cases}$$

onde

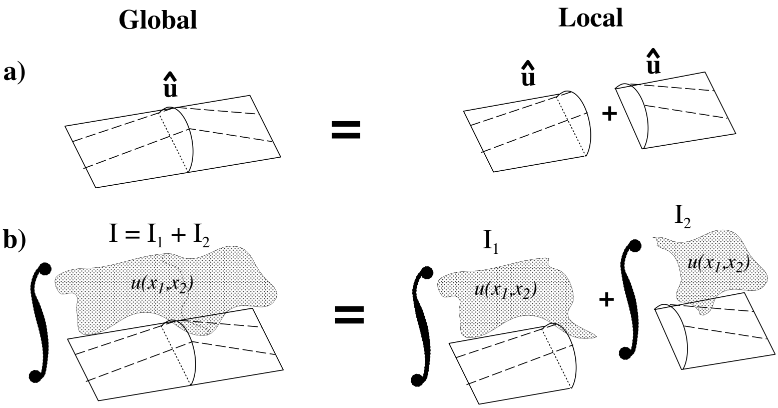
$$\xi_1 = [\chi^e_1]^{-1}(x_1, x_2), \quad \xi_2 = [\chi^e_2]^{-1}(x_1, x_2).$$

$\rightsquigarrow$ Modos de interior são naturalmente C^0, mas os modos de fronteira não.

Procedimento de mapeamento e montagem I

1. Desenvolver a formulação de Galerkin utilizando um conjunto de modos globais que constituem o espaço de teste $\mathcal{X}$;
2. Dividir cada modo global em contribuições locais em todos os elementos, onde todas as operações são feitas;
3. Remontar o sistema global.

Procedimento de mapeamento e montagem II



Graus de liberdade locais e globais I

Chamando de $\hat{\mathbf{u}}^e$ o vetor de coeficientes da expansão elementar, então o vetor de coeficientes de todos os graus de liberdade locais, $\hat{\mathbf{u}}_l$, é dado por:

$$\hat{\mathbf{u}}_l = \underline{\hat{\mathbf{u}}^e} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^1 \\ \hat{\mathbf{u}}^2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}^{N_{\mathrm{el}}} \end{bmatrix},$$

que tem dimensão N_{eof}. Aqui estamos utilizando a notação de que sublinhado quer dizer uma extensão sobre todos os elementos.

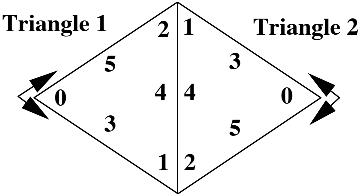
O vetor $\hat{\mathbf{u}}_l$ se relaciona com o vetor de graus de liberdade globais, $\hat{\mathbf{u}}_g$, através da matriz $\boldsymbol{\mathcal{A}}$:

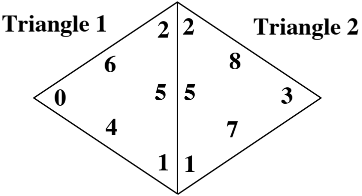
$$\hat{\mathbf{u}}_l = \boldsymbol{\mathcal{A}}\hat{\mathbf{u}}_g$$

Graus de liberdade locais e globais II

- A matriz $\mathcal{A}$ é esparsa e retangular, com dimensões $N_{\text{eof}} \times N_{\text{dof}}$;
- Valores não nulos serão 1 ou -1, dependendo da forma dos modos de fronteira dos elementos adjacentes;
- Se a expansão é nodal, todos os valores são positivos.

Exemplo – dois triângulos com $P_1 = P_2 = 2$ (só modos de fronteira, numerados conforme convenção):





Graus de liberdade locais e globais III

Dimensões da matriz $\boldsymbol{\mathcal{A}}$: $N_{\mathrm{eof}} = 2N_m = 12$, $N_{\mathrm{dof}} = 9$.

$$
\hat{\mathbf{u}}_l = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^1[0] \\ \hat{\mathbf{u}}^1[1] \\ \hat{\mathbf{u}}^1[2] \\ \hat{\mathbf{u}}^1[3] \\ \hat{\mathbf{u}}^1[4] \\ \hat{\mathbf{u}}^1[5] \\ \cdots \\ \hat{\mathbf{u}}^2[0] \\ \hat{\mathbf{u}}^2[1] \\ \hat{\mathbf{u}}^2[2] \\ \hat{\mathbf{u}}^2[3] \\ \hat{\mathbf{u}}^2[4] \\ \hat{\mathbf{u}}^2[5] \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & 1 &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_g[0] \\ \hat{\mathbf{u}}_g[1] \\ \hat{\mathbf{u}}_g[2] \\ \hat{\mathbf{u}}_g[3] \\ \hat{\mathbf{u}}_g[4] \\ \hat{\mathbf{u}}_g[5] \\ \hat{\mathbf{u}}_g[6] \\ \hat{\mathbf{u}}_g[7] \\ \hat{\mathbf{u}}_g[8] \end{bmatrix}.
$$

Graus de liberdade locais e globais IV

A determinação de $\hat{\mathbf{u}}_l$ a partir de $\hat{\mathbf{u}}_g$ é uma operação de 'espalhamento' (*scattering*). Para determinar $\hat{\mathbf{u}}_g$ a partir de $\hat{\mathbf{u}}_l$, fazemos uma soma, que não é exatamente o inverso da operação de espalhamento.

Considere o produto interno de uma função $u(x_1, x_2)$ com a base global $\Phi_n(x_1, x_2)$:

$$\hat{\mathbf{I}}_g[n] = \int_\Omega u(x_1, x_2)\Phi_n(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \\ = \int_{\Omega^e} u(x_1, x_2)\phi_m(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

onde $n(m, e)$ é uma indexação global de cada contribuição modal elementar m sobre cada elemento e.

Graus de liberdade locais e globais V

A avaliação desta integral para todos os graus de liberdade globais ($0 \leq n \leq N_{\mathrm{dof}}$) é

$$\hat{\mathbf{I}}_g[n] = \boldsymbol{\mathcal{A}}^\top \hat{\mathbf{I}}_l = \boldsymbol{\mathcal{A}}^\top \underline{\hat{\mathbf{I}}^e},$$

onde

$$\hat{\mathbf{I}}^e[m] = \int_{\Omega^e} u(x_1, x_2)\phi_m(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

Observe que $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ não é a inversa de $\boldsymbol{\mathcal{A}}^\top$, isto é,

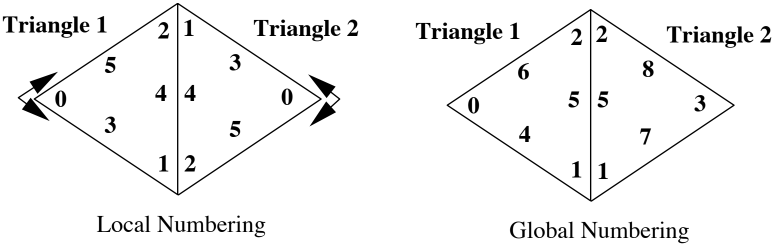
$$\hat{\mathbf{u}}_g \neq \boldsymbol{\mathcal{A}}^\top \boldsymbol{\mathcal{A}} \hat{\mathbf{u}}_g.$$

Matriz de conectividade I

- Construção explícita de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ não é eficiente.
- Melhor é construir uma matriz de conectividade $\mathrm{map}[e][i] = n(e,i)$, que identifica o grau de liberdade local i do elemento e como parte do grau de liberdade global n.
- Dimensões da matriz: $N_{\mathrm{el}} \times \max_e(N_m^e)$, onde N_m^e é o número de graus de liberdade locais do elemento e.
- Definimos também uma outra matriz $\mathrm{sign}[e][i]$ de mesmas dimensões de $\mathrm{map}[e][i]$, que contém 1 ou -1 de acordo com a forma dos modos nas fronteiras entre os elementos.

Matriz de conectividade II

Para o nosso exemplo:



Matriz de conectividade:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 8 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz de conectividade III

Operação de espalhamento ($\hat{\mathbf{u}}_l = \boldsymbol{\mathcal{A}}\hat{\mathbf{u}}_g$):

for $e = 1 : N_{\mathrm{el}}$ **do**
  for $i = 0 : N_m^e - 1$ **do**
    $\hat{\mathbf{u}}^e[i] = \mathrm{sign}[e][i] \cdot \hat{\mathbf{u}}_g[\mathrm{map}[e][i]]$
  end for
end for

Operação de soma $\hat{\mathbf{I}}_g[n] = \boldsymbol{\mathcal{A}}^\top \hat{\mathbf{I}}_l$:

for $e = 1 : N_{\mathrm{el}}$ **do**
  for $i = 0 : N_m^e - 1$ **do**
    $\hat{\mathbf{I}}_g[\mathrm{map}[e][i]] = \hat{\mathbf{I}}_g[\mathrm{map}[e][i]] + \mathrm{sign}[e][i] \cdot \hat{\mathbf{I}}^e[i]$
  end for
end for

Conectividade de contorno I

- Montagem global envolve primordialmente modos de contorno, pois os modos de interior podem ser numerados como modos globais de forma independente.
- Veremos no futuro que com a condensação estática, podemos remover os modos de interior do sistema matricial global.
- Portanto, precisamos somente da matriz de conectividade de contorno bmap[e][i], que é uma submatriz de map[e][i] que considera somente os graus de liberdade de contorno.

Conectividade de contorno II

Assumimos que na numeração dos graus de liberdade do elemento, os modos de contorno vêm primeiro. Havendo $n_b[e]$ modos de contorno no elemento e, a montagem do sistema global é $\hat{\mathbf{l}}_g[n] = \boldsymbol{\mathcal{A}}_b^\top \underline{\hat{\mathbf{l}}_b^e}$, feita da seguinte forma

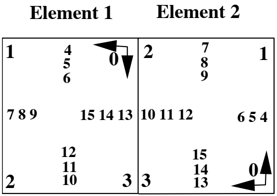
for $e = 1 : N_{\mathrm{el}}$ **do**
  for $i = 0 : n_b[e] - 1$ **do**
    $\hat{\mathbf{l}}_g[\mathrm{bmap}[e][i]] = \hat{\mathbf{l}}_g[\mathrm{bmap}[e][i]] + \mathrm{sign}[e][i] \cdot \hat{\mathbf{l}}^e[i]$
  end for
end for

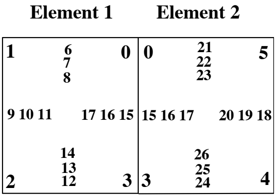
Conectividade de aresta em expansões modais I

- É preciso considerar a orientação do sistema de coordenadas local.

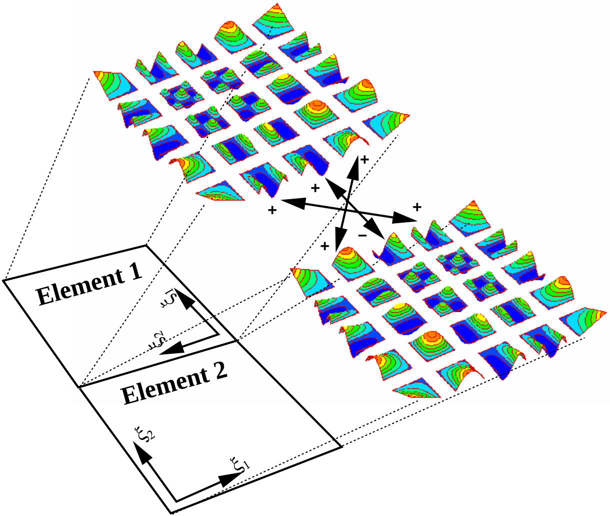
- Se os eixos paralelos das arestas de cada um dos elementos tiver orientação oposta, os modos ímpares de um deles devem ser negados.

- Pode parecer que a ordem dos modos de aresta preciso ser revertido. Entretanto, esse não é o caso, pois a numeração dos modos é feita de acordo com o grau do polinômio.





Conectividade de aresta em expansões modais II



Conectividade de aresta em expansões modais III

Procedimento automático para identificar quais arestas precisam ter os modos ímpares negados:

Se, por exemplo, dois elementos e e k tem uma aresta em comum, sendo que no elemento e a aresta é aquela com $\xi_2 = -1$ e no elemento k a aresta é aquela com $\xi_1 = -1$, os vetores paralelos a esta aresta orientados de acordo com o sistema local de coordenadas são

$$\mathbf{\Delta x}^e_{\text{edg}} = \begin{bmatrix} \chi_1(1,-1) - \chi_1(-1,-1) \\ \chi_2(1,-1) - \chi_2(-1,-1) \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} x_1 = \chi_1(\xi_1,\xi_2), \\ x_2 = \chi_2(\xi_1,\xi_2) \end{array}$$

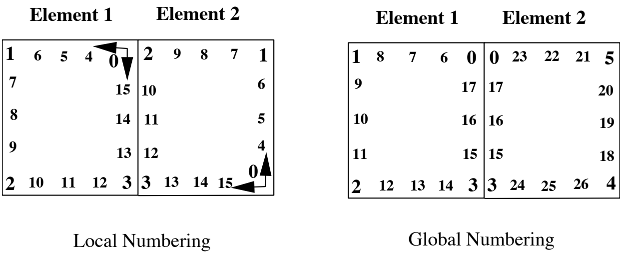
$$\mathbf{\Delta x}^k_{\text{edg}} = \begin{bmatrix} \chi_1(-1,1) - \chi_1(-1,-1) \\ \chi_2(-1,1) - \chi_2(-1,-1) \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} x_1 = \chi_1(\xi_1,\xi_2), \\ x_2 = \chi_2(\xi_1,\xi_2) \end{array}$$

Os modos ímpares do elemento k devem ser negados se

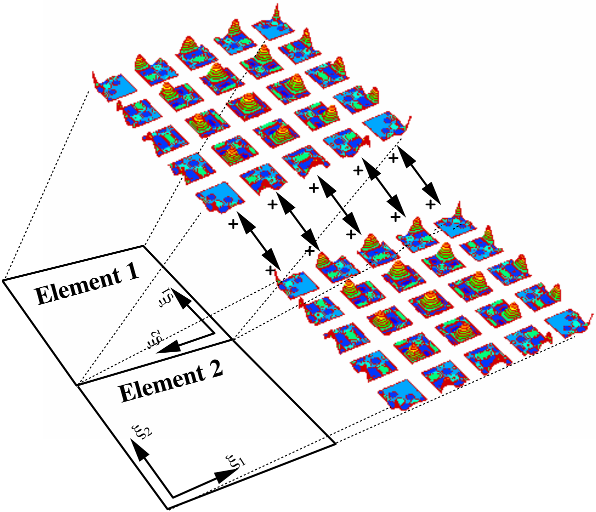
$$\mathbf{\Delta x}^e_{\text{edg}} \cdot \mathbf{\Delta x}^k_{\text{edg}} < 0 \quad \text{e} \quad k > e$$

Conectividade de aresta em expansões nodais I

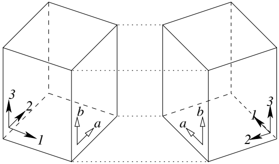
- "Casamos" os modos referentes aos mesmos nós.
- Utilizamos uma convenção de numeração no sentido anti-horário para os modos.
- Desta forma, a ordem dos modos tem que ser sempre revertida para um dos elementos.



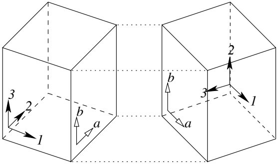
Conectividade de aresta em expansões nodais II



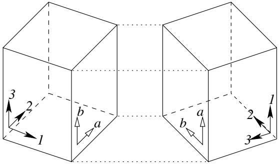
Complexidade extra devida ao número de diferentes orientações possíveis



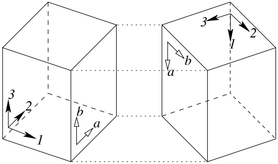
1) same orientation



2) 'a' direction opposite



3) 'a' and 'b' transposed



4) 'a' and 'b' transposed
and opposite directions

Conectividade de faces quadrilaterais II (modal e nodal)

Técnica para determinar orientação e sentido das coordenadas da face, considerando que a face em questão do elemento e seja aquela com $\xi_3 = -1$:

$$\mathbf{\Delta x}_a^e = \left[\begin{array}{c} \chi_1(1,-1,-1) - \chi_1(-1,-1,-1) \\ \chi_2(1,-1,-1) - \chi_2(-1,-1,-1) \\ \chi_3(1,-1,-1) - \chi_3(-1,-1,-1) \end{array} \right],$$

$$\mathbf{\Delta x}_b^e = \left[\begin{array}{c} \chi_1(-1,1,-1) - \chi_1(-1,-1,-1) \\ \chi_2(-1,1,-1) - \chi_2(-1,-1,-1) \\ \chi_3(-1,1,-1) - \chi_3(-1,-1,-1) \end{array} \right],$$

$$x_1 = \chi_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \quad x_2 = \chi_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \quad x_3 = \chi_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

Definimos também analogamente dois outros vetores $\mathbf{\Delta x}_a^k$ e $\mathbf{\Delta x}_b^k$ na face adjacente do elemento k, com o mesmo vértice comum $(\chi_1^e(-1,-1,-1), \chi_2^e(-1,-1,-1), \chi_3^e(-1,-1,-1))$

Conectividade de faces quadrilaterais III (modal e nodal)

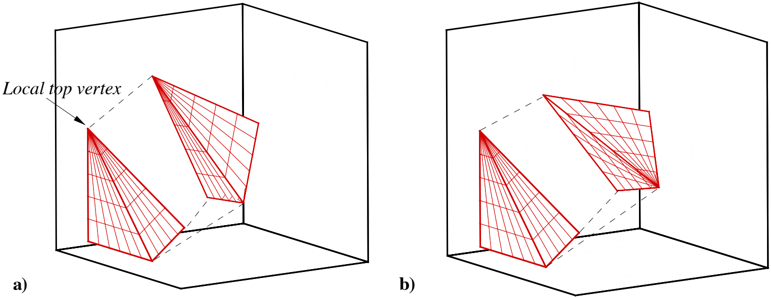
Teste para orientação:

$$
\begin{array}{l}
\textbf{if } \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_a^e \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_a^k = |\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_a^e||\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_a^k| \textbf{ then} \\
\qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_a^e || \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_a^k \quad \Rightarrow \quad a^e||a^k, \; b^e||b^k \\
\textbf{else} \\
\qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_a^e || \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_b^k \quad \Rightarrow \quad a^e||b^k, \; b^e||a^k \\
\textbf{end if}
\end{array}
$$

Teste para o sentido: o mesmo teste definido para arestas no caso bidimensional.

Para expansões nodais pode-se também parear cada um dos graus de liberdade checando a correspondência com os graus de liberdade globais.

Conectividade de faces triangulares (modal) I



Permitido

Proibido

Conectividade de faces triangulares (modal) II

Sendo o vértice colapsado da base $(\xi_1 = -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1)$ e o vértice colapsado do topo $(\xi_1 = -1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 1)$, um procedimento que leva à orientação correta de malhas tetraédricas é

1. O vértice colapsado do topo é aquele de menor número global
2. O vértice colapsado da base é aquele de segundo menor número global
3. Os outros dois vértices são orientados de forma consistente com a rotação local do elemento (tipicamente anti-horária)

Não é possível estabelecer um procedimento geral para todas as malhas (que utilizam tetraedros, prismas e pirâmides). Contudo, existem permutações de conectividades suficientes para garantir uma boa flexibilidade.

Sistemas matriciais globais I

Exemplo: transformação para frente global.

Recapitulando a transformação para frente elementar, usando projeção de Galerkin:

$$\mathbf{M}^e\hat{\mathbf{u}}^e = (\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e\mathbf{B}^e\hat{\mathbf{u}}^e = (\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e\mathbf{u}^e.$$

Podemos representar esta transformação para todos os elementos através das matrizes bloco diagonais:

$$\underline{\mathbf{M}^e} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{M}^{N_{\mathrm{el}}} \end{bmatrix}$$

Sistemas matriciais globais II

$$\underline{(\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}^1)^\top \mathbf{W}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\mathbf{B}^2)^\top \mathbf{W}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\mathbf{B}^{N_{\mathrm{el}}})^\top \mathbf{W}^{N_{\mathrm{el}}} \end{bmatrix}$$

de forma que o sistema global é

$$\underline{\mathbf{M}^e}\hat{\mathbf{u}}_l = \underline{(\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e}\mathbf{u}_l,$$

que é possível e determinado porque os sistemas locais são desacoplados e possíveis e determinados. Entretanto, não há garantia de continuidade entre os elementos. Sabendo que $\hat{\mathbf{u}}_l = \boldsymbol{\mathcal{A}}\hat{\mathbf{u}}_g$, podemos escrever:

$$\underline{\mathbf{M}^e}\boldsymbol{\mathcal{A}}\hat{\mathbf{u}}_g = \underline{(\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e}\mathbf{u}_l$$

Sistemas matriciais globais III

Para termos uma matriz quadrada, temos que pré-multiplicar os dois lados da equação por $\boldsymbol{\mathcal{A}}^\top$:

$$\left[\boldsymbol{\mathcal{A}}^\top \underline{\mathbf{M}^e} \boldsymbol{\mathcal{A}}\right] \hat{\mathbf{u}}_g = \mathbf{M}\hat{\mathbf{u}}_g = \boldsymbol{\mathcal{A}}^\top \underline{(\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e} \mathbf{u}_l$$

$\mathbf{M}$ é a matriz de massa global. Um procedimento idêntico pode ser seguido para qualquer matriz elementar, como a matriz laplaciana $\left(\mathbf{L} = \boldsymbol{\mathcal{A}}^\top \underline{\mathbf{L}^e} \boldsymbol{\mathcal{A}}\right)$.

Não é eficiente montar as matrizes explicitamente desta forma. Entretanto, o termo $\underline{(\mathbf{B}^e)^\top \mathbf{W}^e} \mathbf{u}_l$ pode ser calculado no nível do elemento (fazendo uso de fatoração da soma) e depois mapeado para um vetor global através da tabela de conectividade.

Condensação estática I

Sistema global é do tipo

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \boldsymbol{\mathcal{A}}^\top \underline{\mathbf{M}^e} \boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathbf{f}.$$

Utilizando a numeração dos graus de liberdade apropriada, as matrizes elementares tem a estrutura

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_b^e & \mathbf{M}_c^e \\ (\mathbf{M}_c^e)^\top & \mathbf{M}_i^e \end{bmatrix}$$

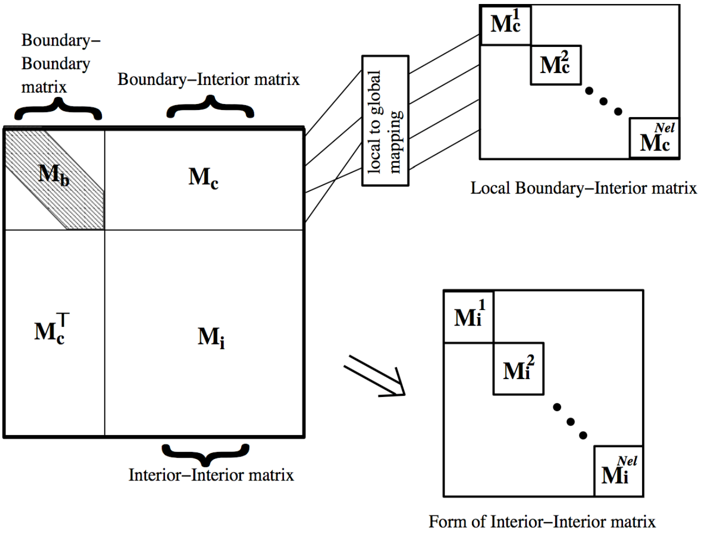
onde $\mathbf{M}_b^e$ são os componentes resultantes de interações contorno-contorno, $\mathbf{M}_c^e$ são componentes resultantes de acoplamento contorno interior e $\mathbf{M}_i^e$ se refere interações de modos interior-interior.

Condensação estática II

Se os graus de liberdade globais são numerados de forma apropriada (primeiro os graus de liberdade de contorno dos elementos, seguidos pelos modos de interior, numerados consecutivamente de acordo com o elemento), este tipo de estrutura é replicado na matriz global:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & \mathbf{M}_c \\ \mathbf{M}_c^\top & \mathbf{M}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix}.$$

Condensação estática III



Condensação estática IV

Pré-multiplicando pela matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{M}_c\mathbf{M}_i^{-1} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

chegamos a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c\mathbf{M}_i^{-1}\mathbf{M}_c^\top & 0 \\ \mathbf{M}_c^\top & \mathbf{M}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b - \mathbf{M}_c\mathbf{M}_i^{-1}\mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix}.$$

A equação para as incógnitas de contorno é, portanto,

$$\left(\mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c\mathbf{M}_i^{-1}\mathbf{M}_c^\top\right)\mathbf{x}_b = \mathbf{f}_b - \mathbf{M}_c\mathbf{M}_i^{-1}\mathbf{f}_i.$$

Uma vez que $\mathbf{x}_b$ está determinado, pode-se calcular $\mathbf{x}_i$ utilizando as linhas seguintes do sistema:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{M}_i^{-1}\mathbf{f}_i - \mathbf{M}_i^{-1}\mathbf{M}_c^\top\mathbf{x}_b.$$

Condensação estática V

Assim, a solução do sistema foi dividida em três passos:

1. Calcular e inverter a matriz de complemento de Schur, $\mathbf{M}_b - \mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^\top$ (operação mais cara);
2. Calcular $\mathbf{M}_i^{-1}$;
3. Calcular $\mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} = \left[\mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^\top\right]^\top$.

Os passos 2 e 3 podem ser feitos no nível do elemento.

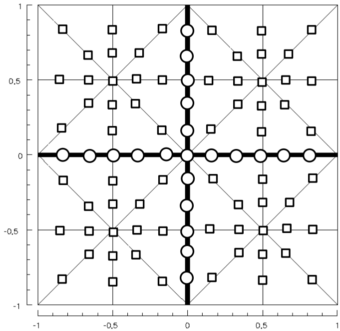
$$\mathbf{M}_i^{-1} = \left[\underline{\mathbf{M}_i^e}\right]^{-1} = \underline{[\mathbf{M}_i^e]^{-1}}$$

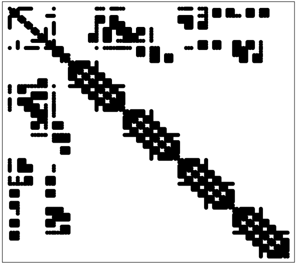
$$\mathbf{M}_c \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{f}_i = \boldsymbol{\mathcal{A}}_b^\top \underline{\mathbf{M}_c^e}\, \underline{[\mathbf{M}_i^e]^{-1}} \mathbf{f}_i$$

$$\mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_c^\top \mathbf{x}_b = \underline{[\mathbf{M}_i^e]^{-1}} \underline{(\mathbf{M}_c^e)^\top} \boldsymbol{\mathcal{A}}_b \mathbf{x}_b$$

Condensação estática multinível

Uma numeração global adequada dos modos de contorno pode levar a uma matriz de complemento de Schur que também contém uma matriz bloco diagonal, onde a condensação estática pode ser reaplicada.



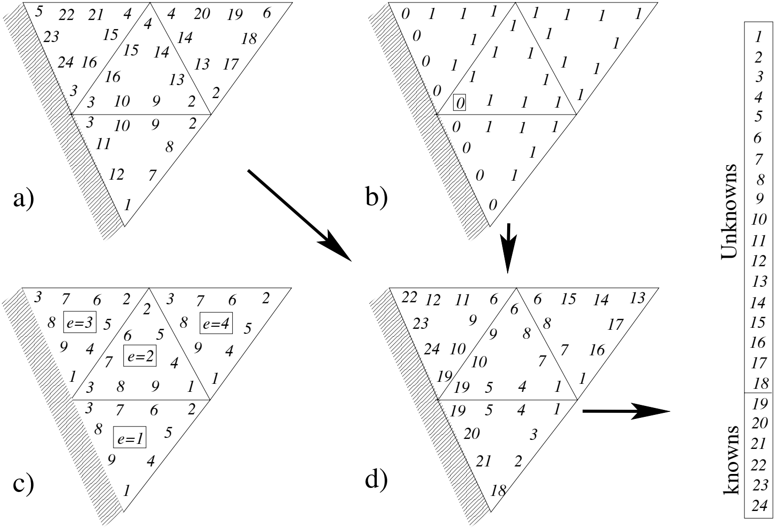


Condições de contorno essenciais I

Estratégia adotada: numerar os graus de liberdade de contorno de forma a posicionar aqueles que tem condição de contorno de Dirichlet no final do vetor.

Solução computacional: aplicação de máscara nos graus de liberdade de contorno – 0 para graus de liberdade com condição de Dirichlet e 1 para os demais

Condições de contorno essenciais II



Reordenação dos graus de liberdade de contorno I

A tabela mask[e][i] contém a máscara do grau de liberdade de contorno i do elemento e, e a tabela Gmask[n] contém a máscara do grau de liberdade global n.

Para certificar que todos os vértices e arestas da fronteira tenham a máscara apropriada, inicializamos Gmask com 1 e fazemos

for $e = 1 : N_{\mathrm{el}}$ **do**
  for $i = 0, n_b[e] - 1$ **do**
    $\mathrm{Gmask}[\mathrm{bmap}[e][i]] = \mathrm{Gmask}[\mathrm{bmap}[e][i]] \times \mathrm{mask}[e][i]$
  end for
end for

Reordenação dos graus de liberdade de contorno II

Corrigimos então a tabela local mask$[e][i]$:

for $e = 1 : N_{\mathrm{el}}$ **do**
  for $i = 0, n_b[e] - 1$ **do**
    $\mathrm{mask}[e][i] = \mathrm{Gmask}[\mathrm{bmap}[e][i]]$
  end for
end for

Inicializamos então o vetor global Gbmap$[n]$ em zero e armazenamos o número total de graus de liberdade globais sem condição de Dirichlet em N_{bslv}.

Reordenação dos graus de liberdade de contorno III

Reordenação:

$n_1 = n_2 = 1$
for $e = 1 : N_{\mathrm{el}}$ **do**
  for $i = 0, n_b[e] - 1$ **do**
    if Gbmap[bmap[e][i]] $= 0$ **then**
      if mask[e][i] $= 1$ **then**
        Gbmap[bmap[e][i]] $= n_1$
        $n_1 = n_1 + 1$
      else
        Gbmap[bmap[e][i]] $= n_2 + N_{\mathsf{bslv}}$
        $n_2 = n_2 + 1$
      end if
    end if
  end for
end for

Reordenação dos graus de liberdade de contorno IV

Atualização da tabela de conectividade dos graus de liberdade de contorno:

for $e = 1 : N_{\mathrm{el}}$ **do**
  for $i = 0, n_b[e] - 1$ **do**
    $\mathrm{bmap}[e][i] = \mathrm{Gbmap}[\mathrm{bmap}[e][i]]$
  end for
end for

Tratamento das condições de contorno essenciais no sistema linear

Decomposição da aproximação:

$$u^{\delta}(\mathbf{x}) = u^{\mathcal{H}}(\mathbf{x}) + u^{\mathcal{D}}(\mathbf{x}) = \sum_{j}^{N^{\mathcal{H}}} \hat{u}_j^{\mathcal{H}} \Phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=N^{\mathcal{H}}+1}^{N^b_{\mathrm{dof}}} \hat{u}_j^{\mathcal{D}} \Phi_j(\mathbf{x})$$