



Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

Conceitos fundamentais em uma dimensão Decomposição elementar e sistema global

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem
com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência de
Calor

Prof. Bruno S. Carmo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo



Sumário

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

1 Introdução

2 Método de resíduos ponderados

3 Formulação de Galerkin

4 Decomposição elementar



Introdução

Conceitos em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

- Conceitos fundamentais envolvidos no projeto e implementação de um método de elementos espectrais/*hp* para problemas elípticos lineares unidimensionais.
- Base para outros tipos de problemas (parabólicos e hiperbólicos), formulações e problemas multidimensionais.
- O método de elementos finitos é uma forma do problema de Rayleigh–Ritz, que transforma a solução de uma equação diferencial na minimização de um funcional expresso na forma de uma equação integral.
- Esta relação é significativa por atribuir rigor matemático ao MEF, embora a forma funcional não seja necessária para a formulação do problema; uma formulação mais geral é possível usando o método de resíduos ponderados.



O método de resíduos ponderados I

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

- Objetivo: resolver numericamente um sistema de equações diferenciais parciais num domínio espacial Ω .
- Ideia: aproximar a solução, constituída por uma série infinita, por uma representação finita, que satisfaça um número finito de condições.
- A escolha das condições a serem satisfeitas é o que define o método numérico.
- Assim como o MEF, o MEE/ hp usa o Método de Resíduos ponderados para especificar estas condições.



O método de resíduos ponderados II

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

O método de resíduos ponderados pode ser descrito considerando uma equação diferencial linear no domínio Ω expressa por

$$\mathbb{L}(u) = 0, \quad (1)$$

sujeita a condições de contorno e iniciais apropriadas.

A solução aproximada que buscamos tem a forma

$$u^\delta(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^{N_{\text{dof}}} \hat{u}_j(t) \Phi_j(\mathbf{x}), \quad (2)$$

onde $\Phi_j(\mathbf{x})$ são funções analíticas chamadas de *funções de expansão* ou *funções de base*, $\hat{u}_j(t)$ são os N_{dof} coeficientes incógnitos, e $u_0(\mathbf{x}, t)$ é selecionado de forma a satisfazer as condições iniciais e de contorno.



O método de resíduos ponderados III

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

As funções $\Phi_j(\mathbf{x})$ devem satisfazer condições de contorno homogêneas, isto é, devem ser zero nas fronteiras com condição do tipo Dirichlet, pois as condições de contorno do problema já são satisfeitas por $u_0(\mathbf{x}, t)$.

Substituindo a aproximação (2) em (1) resulta em um resíduo não nulo, R :

$$\mathbb{L}(u^\delta) = R(u^\delta). \quad (3)$$

Para que se tenha uma maneira única de se determinar os coeficientes $\hat{u}_j(t)$, uma restrição pode ser imposta ao resíduo R de forma que (3) seja reduzido a um sistema de equações diferenciais ordinárias em $\hat{u}_j(t)$. Se a equação original (1) for independente do tempo, então os coeficientes \hat{u}_j podem ser determinados diretamente da solução de um sistema de equações algébricas.



O método de resíduos ponderados IV

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e

Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

O método de resíduos ponderados consiste em impor uma restrição a R tal que o produto interno do resíduo com uma *função de teste* (ou *peso*) arbitrária seja igual a zero, ou seja,

$$(v(\mathbf{x}), R) = 0, \quad (4)$$

onde a função $v(\mathbf{x})$ é a função de teste e o produto interno (f, g) no domínio Ω é definido como

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (5)$$



O método de resíduos ponderados V

Se (4) for verdade para qualquer $v(\mathbf{x})$, a aproximação u^δ é exata. Relaxamos este requisito fazendo com que $v(\mathbf{x})$ seja representado por uma combinação linear arbitrária de um conjunto finito de funções conhecidas, isto é,

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{dof}}} a_i v_i(\mathbf{x}), \quad (6)$$

onde os coeficientes a_i são arbitrários e $v_i(\mathbf{x})$ são funções conhecidas.

Substituindo (6) e (3) em (4) e usando a definição (5) resulta em

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N_{\text{dof}}} a_i v_i(\mathbf{x}) \mathbb{L}(u^\delta) d\mathbf{x} = 0. \quad (7)$$

Conceitos
em 1D –

Decomposição

Elementar e

Sistema

Global

Bruno S.

Carmo

Introdução

Resíduos

ponderados

Galerkin

Decomposição

elementar



O método de resíduos ponderados VI

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Se assumirmos que \mathbb{L} seja independente do tempo e usarmos explicitamente a expressão da aproximação (2) em (7),

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N_{\text{dof}}} a_i v_i(\mathbf{x}) \mathbb{L} \left[u_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N_{\text{dof}}} \hat{u}_j \Phi_j(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{x} =$$

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{dof}}} a_i \left\{ \int_{\Omega} v_i(\mathbf{x}) \mathbb{L}[u_0(\mathbf{x})] d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v_i(\mathbf{x}) \mathbb{L} \left[\sum_{j=1}^{N_{\text{dof}}} \hat{u}_j \Phi_j(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{x} \right\} = 0.$$

Introdução
Resíduos
ponderados
Galerkin
Decomposição
elementar

Como a_i é arbitrário, agora temos um sistema de equações algébricas que é suficiente para determinar \hat{u}_j :

$$\sum_{j=1}^{N_{\text{dof}}} \left\{ \hat{u}_j \int_{\Omega} v_i(\mathbf{x}) \mathbb{L}[\Phi_j(\mathbf{x})] d\mathbf{x} \right\} = - \int_{\Omega} v_i(\mathbf{x}) \mathbb{L}[u_0(\mathbf{x})] d\mathbf{x},$$
$$i = 1, 2, \dots, N_{\text{dof}}.$$



O método de resíduos ponderados VII

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

Este sistema de equações pode ser escrito em forma matricial

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{b}, \quad (8)$$

onde $\hat{\mathbf{u}}$ é o vetor de coeficientes \hat{u}_j , os componentes da matriz \mathbf{A} são

$$A_{ij} = \int_{\Omega} v_i(\mathbf{x}) \mathbb{L}[\Phi_j(\mathbf{x})] d\mathbf{x},$$

e o vetor \mathbf{b} é dado por

$$b_i = - \int_{\Omega} v_i(\mathbf{x}) \mathbb{L}[u_0(\mathbf{x})] d\mathbf{x}.$$



O método de resíduos ponderados VIII

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

No âmbito do Método de Resíduos Ponderados, a escolha das funções de base $\Phi_j(\mathbf{x})$ e funções de teste $v_j(\mathbf{x})$ é o que determina o esquema numérico.

Função de teste	Tipo de método
$v_j(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$	Colocação
$v_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{no interior de } \Omega^j, \\ 0, & \text{fora de } \Omega^j \end{cases}$	Volumes finitos
$v_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial R}{\partial \hat{u}_j}$	Mínimos quadrados
$v_j(\mathbf{x}) = \Phi_j$	Galerkin
$v_j(\mathbf{x}) = \Psi_i (\neq \Phi_j)$	Petrov-Galerkin



Formulação de Galerkin – Forma forte

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

O MEE/ hp usa a formulação de Galerkin, no qual o conjunto de funções de teste é o mesmo conjunto de funções de base, ou seja, $v_j(\mathbf{x}) = \Phi_j(\mathbf{x})$.

A formulação de Galerkin tem algumas propriedades matemáticas significativas, como unicidade da solução, ortogonalidade do erro com relação ao espaço de teste na norma de energia e minimização da norma de energia do erro.

Trabalharemos com um exemplo, a equação de Poisson:

$$\mathbb{L}(u) \equiv \nabla^2 u + f = 0$$

ou, em uma dimensão,

$$\mathbb{L}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = 0 \quad (9)$$



Definição das condições de contorno

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

Consideraremos a solução num domínio $\Omega = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$, com as seguintes condições de contorno:

$$u(0) = g_{\mathcal{D}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1) = g_{\mathcal{N}},$$

onde $g_{\mathcal{D}}$ e $g_{\mathcal{N}}$ são constantes dadas. A primeira condição é do tipo *Dirichlet* ou *essencial* enquanto a segunda é do tipo *Neumann* ou *natural*.



Forma fraca e implementação das condições de Neumann I

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

Para construir a forma fraca de (9), multiplicamos a equação pela função de teste $v(x)$, que por definição é zero em todas as fronteiras com condição de Dirichlet $\partial\Omega_{\mathcal{D}}$, e integramos no domínio Ω de modo a obter o produto interno de $\mathbb{L}(u)$ com v :

$$(v, \mathbb{L}(u)) = \int_0^1 v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \right) dx = 0. \quad (10)$$

Esta equação equivale a igualar o resíduo a zero se utilizarmos u^δ no lugar de u . Integrando a eq. (10) por partes:

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^1 v f dx + \left[v \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^1. \quad (11)$$

Em dimensões superiores, chega-se a um resultado análogo utilizando o teorema de Gauss (teorema da divergência).



Forma fraca e implementação das condições de Neumann II

Conceitos em 1D –
Decomposição Elementar e Sistema Global

Bruno S. Carmo

Introdução

Resíduos ponderados

Galerkin

Decomposição elementar

Como em $x = 0$ definiu-se uma condição essencial, $v(0) = 0$. Impondo então a condição $\partial u(1)/\partial x = g_N$, simplificamos a eq. (11)

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^1 v f dx + v(1)g_N. \quad (12)$$

As condições de contorno de Neumann são incluídas naturalmente no problema. Para $g_N = 0$, simplesmente cancelamos o último termo. Esta operação reduz a ordem do problema discreto e torna a matriz discreta simétrica. Esta é a chamada *Forma Fraca*.

Substituindo a solução exata $u(x)$ pela aproximação $u^\delta(x)$, e a função de teste $v(x)$ por uma expansão finita $v^\delta(x)$,

$$\int_0^1 \frac{\partial v^\delta}{\partial x} \frac{\partial u^\delta}{\partial x} dx = \int_0^1 v^\delta f dx + v^\delta(1)g_N. \quad (13)$$



Forma fraca: aplicação de condições de contorno essenciais I

Conceitos em 1D –
Decomposição Elementar e Sistema Global

Bruno S. Carmo

Introdução

Resíduos ponderados

Galerkin

Decomposição elementar

Decompomos da solução aproximada u^δ numa parcela conhecida que satisfaz as condições de contorno de Dirichlet, u^D e uma parcela desconhecida que seja homogênea nas fronteiras onde há condições de contorno de Dirichlet, u^H , isto é,

$$u^\delta = u^H + u^D \quad (14)$$

onde $u^H(\partial\Omega_D) = 0$ e $u^D(\partial\Omega_D) = g_D$.

Substituindo (14) em (13) e rearranjando

$$\int_0^1 \frac{\partial v^\delta}{\partial x} \frac{\partial u^H}{\partial x} dx = \int_0^1 v^\delta f dx + v^\delta(1)g_N - \int_0^1 \frac{\partial v^\delta}{\partial x} \frac{\partial u^D}{\partial x} dx. \quad (15)$$



Forma fraca: aplicação de condições de contorno essenciais II

Conceitos
em 1D –

Decomposição

Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

A eq. (15) tem os termos do lado direito todos conhecidos, e pode ser resolvido como um sistema algébrico finito, como veremos a seguir. Este procedimento nos permite usar a mesma base para v^δ e $u^{\mathcal{H}}$, já que ambas são homogêneas nas fronteiras do tipo Dirichlet.

Alternativa a este procedimento seria montar a matriz inteira e zerar as linhas dos graus de liberdade com valor conhecido. Entretanto, isto destrói a simetria do sistema. Em compensação, a técnica de lifting implica numa renumeração dos graus de liberdade e num cálculo do vetor de carregamento que é mais complexo.



Condições de contorno mistas (ou de Robin)

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

É uma condição de contorno do tipo

$$\alpha \frac{\partial u(1)}{\partial x} + \beta u(1) = g_{\mathcal{R}} \quad (\text{com } \alpha \neq 0),$$

onde α , β e $g_{\mathcal{R}}$ são conhecidos. Para impor este tipo de condição de contorno, substituímos

$$\frac{\partial u(1)}{\partial x} = \frac{(g_{\mathcal{R}} - \beta u(1))}{\alpha}$$

na eq. (13), obtendo

$$\int_0^1 \frac{\partial v^\delta}{\partial x} \frac{\partial u^\delta}{\partial x} dx + \frac{\beta}{\alpha} v^\delta(1) u^\delta(1) = \int_0^1 v^\delta f dx + \frac{v^\delta(1) g_{\mathcal{R}}}{\alpha}.$$

A implementação modifica a matriz.

Equação residual para funções C^0 I

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\partial v^\delta}{\partial x} \frac{\partial u^\delta}{\partial x} dx &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\partial v^\delta}{\partial x} \frac{\partial u^\delta}{\partial x} dx \\ &= - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} v^\delta \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial x^2} dx + \sum_{e=1}^{N_{el}} \left[v^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial x} \right]_{\Omega_L^e}^{\Omega_R^e} \\ &= - \int_0^1 v^\delta \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial x^2} dx + \sum_{e=1}^{N_{el}} \left[v^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial x} \right]_{\Omega_L^e}^{\Omega_R^e}\end{aligned}$$

Como a expansão não é C_1 ,

$$v^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial x} \Big|_{\Omega_R^e} \neq v^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial x} \Big|_{\Omega_R^{e+1}}.$$



Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar



Equação residual para funções C^0 II

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

Então substituindo em (13):

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 v^\delta \left(\frac{\partial^2 u^\delta}{\partial x^2} + f \right) dx - v^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial x} \Big|_{\Omega_1^L} + \\ & \sum_{e=1}^{N_{el}-1} \left[v^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial x} \Big|_{\Omega_R^e} - v^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial x} \Big|_{\Omega_L^{e+1}} \right] + \\ & \left[v^\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial x} \Big|_{\Omega_R^{N_{el}}} - v^\delta(1)g_N \right] = 0. \end{aligned}$$

Os termos entre colchetes se anulam à medida em que a solução converge.



Decomposição elementar: extensão do tipo h

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

Vantagens: flexibilidade geométrica, tratamento de operações numa base local elementar.

O domínio Ω é dividido em subdomínios Ω^e que não se sobrepõem uns aos outros. O conjunto de N_{el} elementos é chamado de *malha*.

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_{el}} \Omega^e, \quad \text{onde} \quad \bigcap_{e=1}^{N_{el}} \Omega^e = \emptyset$$

Para o domínio $\Omega = \{x | 0 \leq x \leq L\}$, uma malha pode ser especificada pelos pontos

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_{el}-1} < x_{N_{el}} = L.$$

Portanto, o elemento e é definido como

$$\Omega^e = \{x | x_{e-1} < x < x_e\}.$$



O elemento padrão

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

Definimos o elemento padrão:

$$\Omega_{\text{st}} = \{\xi \mid -1 \leq \xi \leq 1\}$$

Funções de base lineares locais

$$\phi_0(\xi) = \begin{cases} \frac{1 - \xi}{2}, & \xi \in \Omega_{\text{st}}, \\ 0, & \xi \notin \Omega_{\text{st}}, \end{cases} \quad \phi_1(\xi) = \begin{cases} \frac{1 + \xi}{2}, & \xi \in \Omega_{\text{st}}, \\ 0, & \xi \notin \Omega_{\text{st}}. \end{cases}$$



Mapeamento paramétrico I

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

O elemento padrão pode ser mapeado para qualquer domínio elementar Ω^e através da transformação $\chi^e(\xi)$:

$$x = \chi^e(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} x_{e-1} + \frac{1 + \xi}{2} x_e, \quad \xi \in \Omega_{st}.$$

Este mapeamento tem uma inversa analítica

$$\xi = (\chi^e)^{-1}(x) = 2 \frac{x - x_{e-1}}{x_e - x_{e-1}} - 1, \quad x \in \Omega^e.$$

O mapeamento $\chi^e(\xi)$ pode ser interpretado como uma expressão da coordenada global, x , em termos da expansão de elementos finitos:

$$x = \chi^e(\xi) = \phi_0(\xi) x_{e-1} + \phi_1(\xi) x_e, \quad \xi \in \Omega_{st}.$$



Mapeamento paramétrico II

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e

Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

- Expressar a coordenada global, x , em termos das funções de expansão é um procedimento conhecido como *mapeamento paramétrico*.
- Este tipo de mapeamento é conveniente para a representação de superfícies curvas em problemas de dimensão maior que 1, como veremos nas próximas aulas.
- Se a expansão utilizada no mapeamento for da mesma ordem daquela utilizada para representar as variáveis dependentes, dizemos que o mapeamento é *isoparamétrico*.



Modos globais $\phi_i(x)$ I

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

$$\phi_0 = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, & x \in \Omega^1, \\ 0, & x \notin \Omega^1, \end{cases} = \begin{cases} \phi_0(\xi) = \phi_0([\chi^1]^{-1}(x)), & x \in \Omega^1, \\ 0, & x \notin \Omega^1, \end{cases}$$

$$\phi_1 = \begin{cases} \frac{x-x_0}{x_1-x_0}, & x \in \Omega^1, \\ \frac{x-x_2}{x_1-x_2}, & x \in \Omega^2, \\ 0, & x \notin (\Omega^1 \cup \Omega^2), \end{cases} \\ = \begin{cases} \phi_1(\xi) = \phi_1([\chi^1]^{-1}(x)), & x \in \Omega^1, \\ \phi_0(\xi) = \phi_0([\chi^2]^{-1}(x)), & x \in \Omega^2, \\ 0, & x \notin (\Omega^1 \cup \Omega^2). \end{cases}$$



Modos globais $\phi_i(x)$ II

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

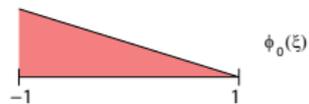
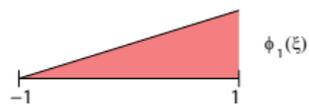
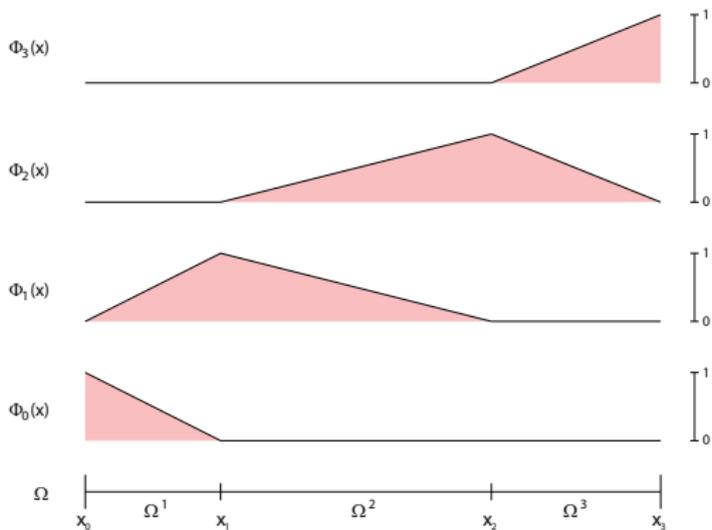
Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar





Montagem do sistema global I

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

Expressão da aproximação u^δ em termos dos modos globais e locais:

$$u^\delta(x) = \sum_{i=0}^{N_{\text{dof}}-1} \hat{u}_i \phi_i(x) = \sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} \sum_{p=0}^P \hat{u}_p^e \phi_p^e(\xi),$$

onde P é a ordem do polinômio da expansão e $\phi_p^e(\xi) = \phi_p([\chi^e]^{-1}(x))$.

Usando um exemplo onde $P = 1$ e $N_{\text{el}} = 3$, para atender o requisito de continuidade, temos que ter $\hat{u}_1^1 = \hat{u}_0^2$ e $\hat{u}_1^2 = \hat{u}_0^3$. A relação entre coeficientes locais e globais é então

$$\begin{aligned} \hat{u}_0^1 &= \hat{u}_0, & \hat{u}_1^1 &= \hat{u}_0^2 = \hat{u}_1, \\ \hat{u}_1^2 &= \hat{u}_0^3 = \hat{u}_2, & \hat{u}_1^3 &= \hat{u}_3. \end{aligned}$$

6 graus de liberdade locais correspondem a 4 graus de liberdade globais.



Montagem do sistema global II

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

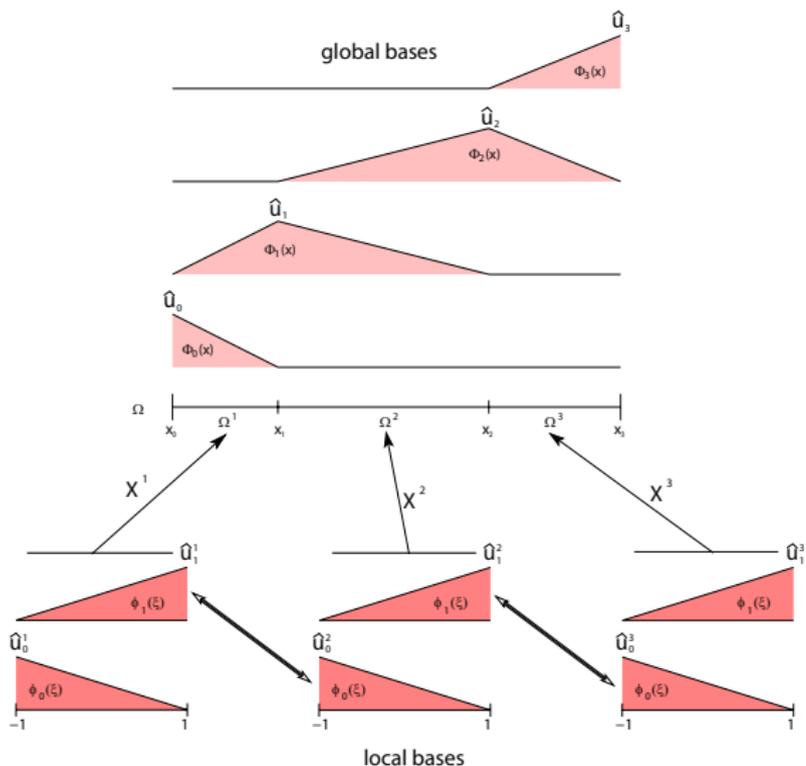
Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar





Montagem do sistema global III

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

Descrição geral: seja $\hat{\mathbf{u}}_g$ o vetor dos coeficientes globais e $\hat{\mathbf{u}}_l$ o vetor de coeficientes locais

$$\hat{\mathbf{u}}_g = [\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{N_{\text{dof}}-1}]^\top$$

$$\hat{\mathbf{u}}_l = [\hat{u}_0^1, \hat{u}_1^1, \dots, \hat{u}_0^{N_{\text{dof}}-1}, \hat{u}_1^{N_{\text{dof}}-1}]^\top$$

A relação entre os graus de liberdade locais e globais pode ser expressa em termos de uma matriz bastante esparsa, chamada de *matriz de montagem*, \mathcal{A} :

$$\hat{\mathbf{u}}_l = \mathcal{A}\hat{\mathbf{u}}_g$$



Montagem do sistema global IV

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

No nosso exemplo:

$$\hat{\mathbf{u}}_I = \begin{bmatrix} \hat{u}_0^1 \\ \hat{u}_1^1 \\ \hat{u}_0^2 \\ \hat{u}_1^2 \\ \hat{u}_0^3 \\ \hat{u}_1^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix}.$$

Operação reversa: construção de operações globais a partir de operações locais. Exemplo: integração.

$$\int_{\Omega} \Phi_1(x) u^\delta(x) dx = \int_{-1}^1 \phi_1^1(\xi) u^\delta(\chi^1) \frac{d\chi^1}{d\xi} d\xi + \int_{-1}^1 \phi_0^2(\xi) u^\delta(\chi^2) \frac{d\chi^2}{d\xi} d\xi$$

Todas as integrais podem ser computadas no elemento padrão $([-1,1])$.



Montagem do sistema global V

Conceitos
em 1D –
Decomposição
Elementar e
Sistema
Global

Bruno S.
Carmo

Introdução

Resíduos
ponderados

Galerkin

Decomposição
elementar

A operação de montagem é feita pela matriz \mathcal{A}^\top . Definindo:

$$I_g[i] = \int_{\Omega} \Phi_i(x) u^\delta(x) dx,$$

e

$$I_I = \begin{bmatrix} I^1 \\ I^2 \\ \vdots \\ I^{N_{el}} \end{bmatrix}, \quad \text{onde } I^e = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \phi_0(\xi) u^\delta(\chi^e) \frac{d\chi^e}{d\xi} d\xi \\ \vdots \\ \int_{-1}^1 \phi_{P-1}(\xi) u^\delta(\chi^e) \frac{d\chi^e}{d\xi} d\xi \end{bmatrix},$$

temos

$$I_g = \mathcal{A}^\top I_I.$$

A matriz \mathcal{A} não é construída na prática, pois é muito esparsa. O que é usado é um vetor de mapeamento (matriz de conectividade).