

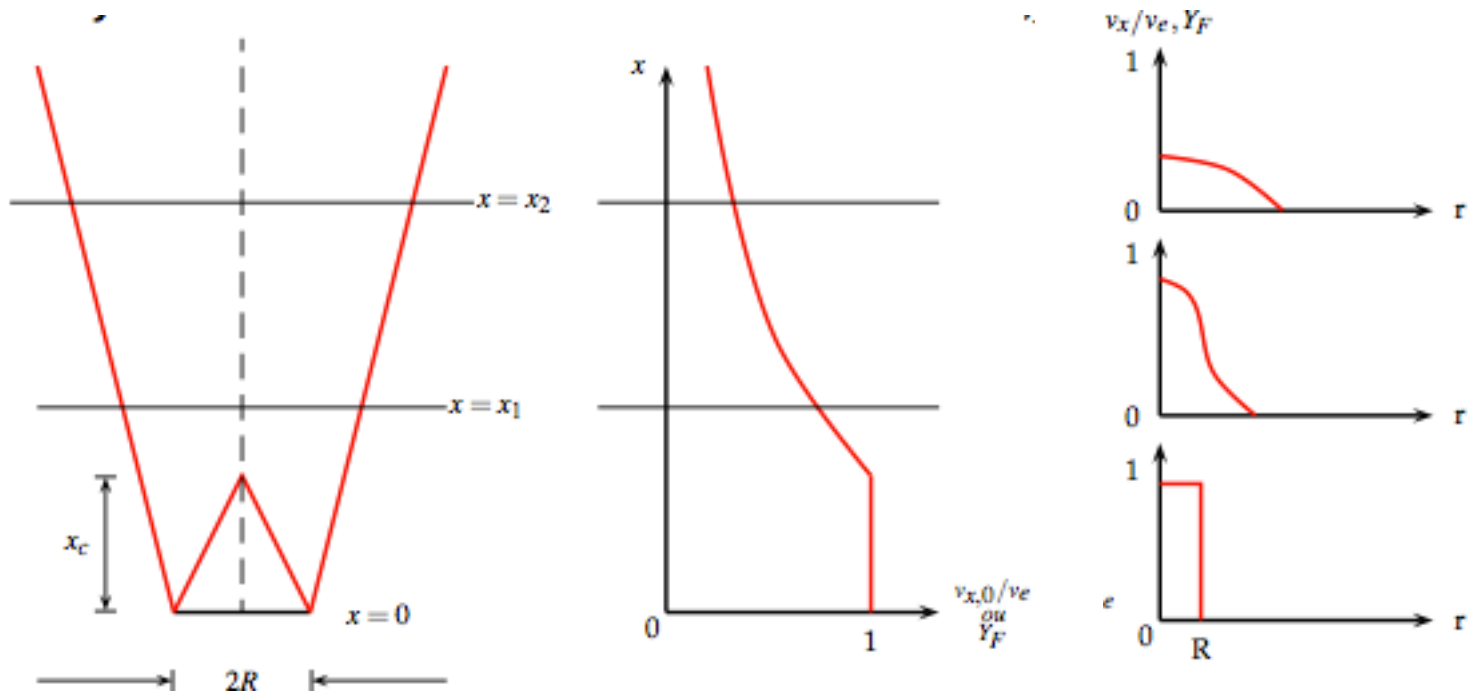
9 – Chamas de difusão laminares

10a Aula

9.1 Introdução

- Aplicações
 - Cone externo bico-bunsen
 - Fornos e fogões domésticos (parcialmente pré-mistura)
 - Problemas de emissões de *CO* e *NO*

9.2 Análise de jato laminar não reativo



- Na reação central (Potencial core) efeitos viscosos e de difusão são "negligenciados".
Acima de x_c os efeitos viscosos e difusivos se fazem notar em todo o jato.

9.2 Análise de jato laminar

- À medida que o jato avança, ele arrasta ar do meio em repouso. A quantidade de momentum se conserva:

$$\begin{array}{c} \text{Fluxo de momentum } (J) \\ \text{no jato em qualquer} \\ \text{posição } x \end{array} = \begin{array}{c} \text{Fluxo de momentum } (J_e) \\ \text{na saída do jato} \end{array}$$

$$J_x = J_e$$

$$2\pi \int_0^\infty \rho(r, x) v_x^2(r, x) r dr = \rho_e v_e^2 \pi R^2 \quad (290)$$

Então a velocidade decai à medida que o jato "abre".

9.2 Análise de jato laminar

- Massa e momentum são transportados pelos mesmos processos convecção e difusão → similaridade nas distribuições de velocidade ($v_x(r, x)$) e de combustível ($Y_F(x, r)$).

No centro do jato ($Y_{F(0,R)}$) e fora ($Y_F = 0$) ⇒ alto gradiente → fick → difusão radial

A massa de combustível se conserva:
(o jato não reage)

$$2\pi \int_0^\infty \rho(r, x) v_x(r, x) Y_F(r, x) r dr = \rho_e v_e \pi R^2 Y_{F,e} \quad (291)$$

onde $Y_{F,e} = 1.0$

Problema: determinar v_x e $Y_F(r, x)$

9.2 Análise de jato laminar

Hipóteses: 1.

$$\rho = cte \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ iguais pesos moleculares} \\ \bullet \text{ Gás ideal} \\ \bullet \text{ P e T cte} \end{array} \right.$$

2. Difusão molecular $\rightarrow$ Lei de Fick

3. Difusão de momentum e espécies igual e const.

$$Sc \equiv \frac{\nu}{D} = 1$$

4. Difusão axial negligenciada (solução só é valida após certo afastamento da saída)

9.2 Análise de jato laminar

Eq's de conservação → Simplificando as eq's vistas no Cap. 7, para $\rho = cte, S_c = 1$

9.2 Análise de jato laminar

Conservação de massa:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (v_r r)}{\partial r} = 0 \quad (292)$$

Cons. momentum axial: ($\rho = cte$)

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} = \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \quad (293)$$

Cons. espécies: para o combustível

$$v_x \frac{\partial Y_F}{\partial x} + v_r \frac{\partial Y_F}{\partial r} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Y_F}{\partial r} \right) \quad (294)$$

ainda:

$$Y_{OX} = 1 - Y_F \quad (295)$$

10.2 Análise de jato laminar

Condições de contorno: incógnitas: $v_x(r, x)$, $v_r(r, x)$ e $Y_F(r, x)$
na linha de centro (simetria), $r = 0$

$$v_r(0, x) = 0 \quad (296)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r}(0, x) = 0 \quad (297)$$

$$\frac{\partial Y_F}{\partial r}(0, x) = 0 \quad (298)$$

9.2 Análise de jato laminar

fora do jato ($r \rightarrow \infty$)

$$v_x(\infty, x) = 0 \quad (299)$$

$$Y_F(\infty, x) = 0 \quad (300)$$

na saída do jato: ($x = 0$)

$$\begin{aligned} v_x(r \leq R, 0) &= v_e \\ v_x(r > R, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (301)$$

$$\begin{aligned} Y_F(r \leq R, 0) &= Y_{F,e} = 1 \\ Y_F(r > R, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (302)$$

9.2 Análise de jato laminar

Solução: Assumindo perfis similares (mesma forma) para a velocidade, a distribuição é só função da variável de similaridade r/x (ver Schlichting)

$$v_x = \frac{3}{8\pi} \frac{J_e}{\mu x} \left[1 + \frac{\xi^2}{4} \right]^{-2} \quad (303)$$

$$v_r = \left(\frac{3J_e}{16\pi\rho_e} \right)^{1/2} \frac{1}{x} \frac{\xi - \frac{\xi^3}{4}}{\left(1 + \frac{\xi^2}{4} \right)^2} \quad (304)$$

$$J_e = \rho_e v_e^2 \pi R^2 \quad (305)$$

$$\xi = \left(\frac{3\rho_e J_e}{16\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\mu} \frac{r}{x} \quad (306)$$

9.2 Análise de jato laminar

substituindo:

$$v_x/v_e = 0.375 \left(\frac{\rho_e v_e R}{\mu} \right) \left(\frac{x}{R} \right)^{-1} \left[1 + \frac{\xi^2}{4} \right]^{-2} \quad (307)$$

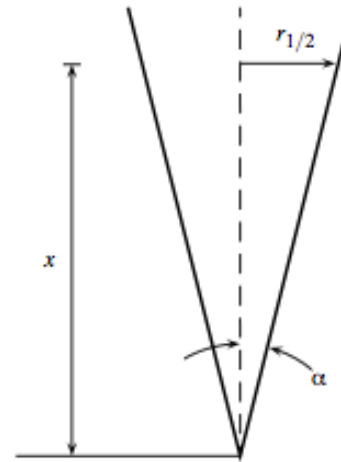
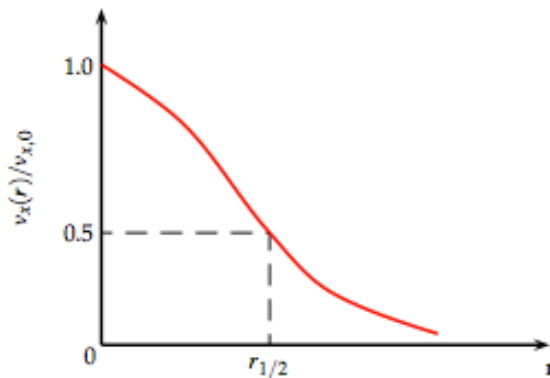
na linha de centro:

$$v_{x,0}/v_e = 0.375 \underbrace{\left(\frac{\rho_e v_e R}{\mu} \right)}_{Re_j \equiv \frac{\rho_e v_e R}{\mu}} \left(\frac{x}{R} \right)^{-1} \quad (308)$$

$Re_j \downarrow$ decaimento $\uparrow$

10.2 Análise de jato laminar

- Taxa de abertura do jato (spreading rate)



com (307) e (308):

$$r_{1/2} = 2.97 Re_j^{-1} \quad (309)$$

$$\alpha \equiv \tan^{-1}(r_{1/2}/x) \quad (310)$$

$Re_j \uparrow, \alpha \downarrow$

9.2 Análise de jato laminar

- Campo de concentrações:

Se $v = D$ ($S_c = 1$) a forma da curva é a mesma

$$Y_F = \frac{3}{8\pi} \frac{Q_F}{Dx} \left[1 + \frac{\xi^2}{4} \right]^{-2} \quad (311)$$

$$Q_F = v_e \pi R^2$$

para $S_c = 1$

$$Y_F = 0.375 Re_j \left(\frac{x}{R} \right)^{-1} \left[1 + \frac{\xi^2}{4} \right]^{-2} \quad (312)$$

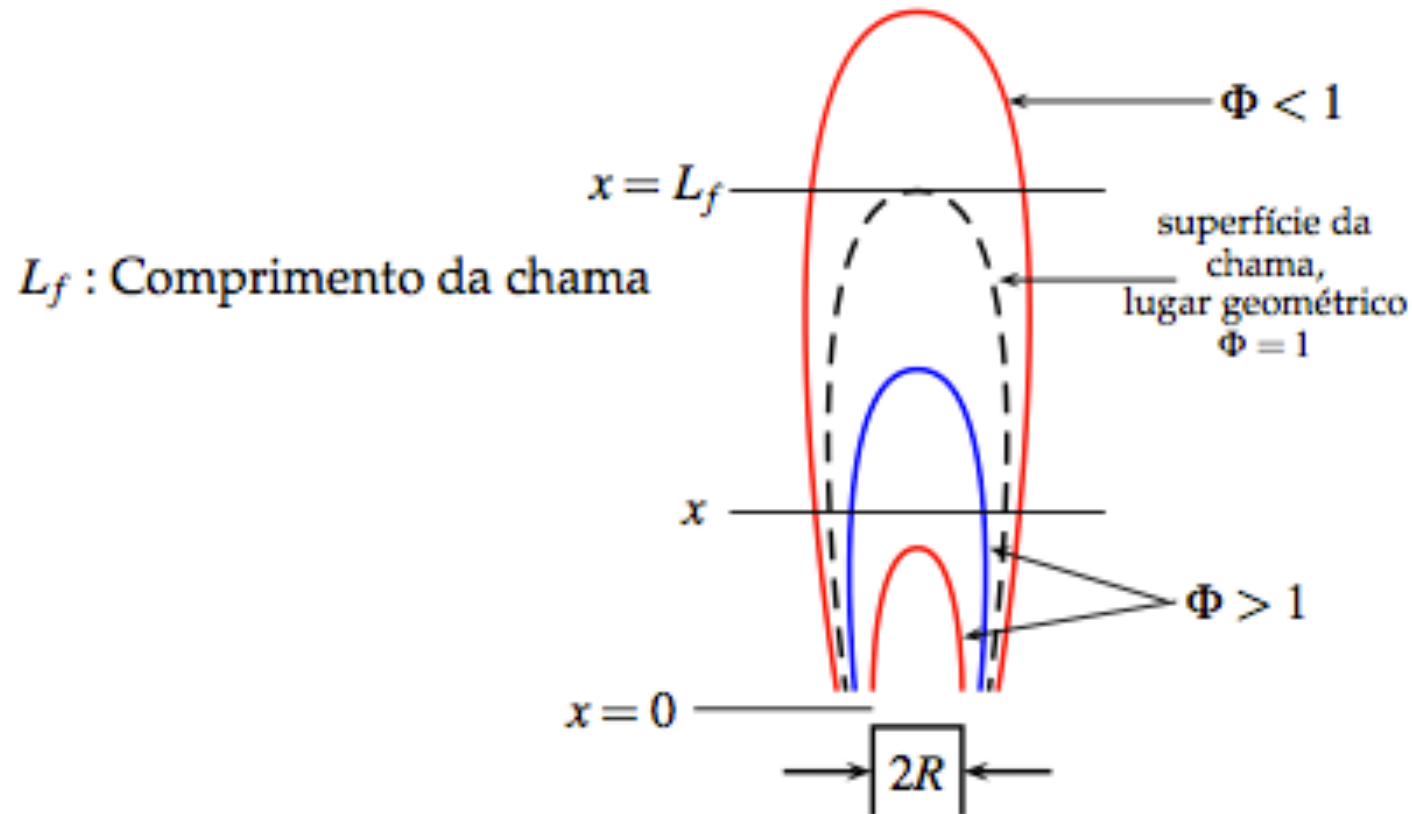
na linha de centro:

$$Y_{F,0} = 0.375 Re_j \left(\frac{x}{R} \right)^{-1} \quad (313)$$

veja que $x \neq 0$

$$\left(\frac{x}{R} \right) \gtrsim 0.375 Re_j \quad (314)$$

9.3 Análise de jato reativo - chama



9.3 Análise de jato reativo - chama

- Combustível difunde radialmente para fora, ar difunde radialmente para dentro
- Superfície da chama: estreita região $\Phi = 1$
- Região anular (ex. temperatura)
- Topo da chama: gases quentes $\rightarrow$ empuxo $\rightarrow$ Aceleração do fluido $\rightarrow$ estreitamento
- Hidrocarbonetos:
 - Formação de fuligem na base
 - Oxidação no topo
 - Cor amarela

9.3 Análise de jato reativo - chama

- Comprimento da chama: da análise de jato eq. (311) para $Y_F = Y_{ST}$ e $r = 0 \rightarrow (\xi = 0)$

$$L_f \approx \frac{3}{8\pi} \frac{\overbrace{Q_F}^{\text{Vazão de comb.}}}{DY_{F,ST}}$$

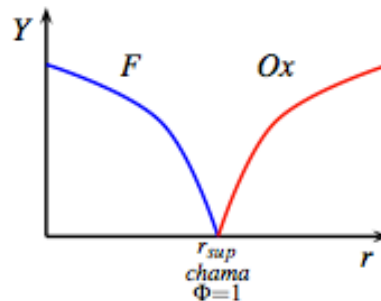
independe de "R"

9.3 Análise simplificada

Burke/Shumann (1928) → Ropper (1977)

Hipóteses:

1. Fluxo laminar, Reg. permanente, simetria axial, ar ambiente em repouso
2. Espécies: comb. (F), oxidante (Ox), produtos (Pr), (F) e (Ox) não coexistem



9.3 Análise simplificada

3. Na sup. da chama $\Phi = 1$, reações químicas com velocidade "infinita"

"Flame-Sheet Approximation"

Fora da "folha" não há reação

4. Transporte molecular $\rightarrow$ Lei de Fick

5. Difusividades térmicas e de espécies iguais $\rightarrow Le = \frac{\alpha}{D} = 1$

6. Sem Radiação

7. Difusão axial negligenciada

8. Chama vertical para cima ($g \downarrow$)

— — — — —

9.3 Análise simplificada

Massa:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} = 0 \quad (315)$$

Momentum axial:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (r \rho v_x v_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_x v_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = (\rho_\infty - \rho) g \quad (316)$$

Espécies: (da eq. 217) com $\dot{m}_i''' = 0$ fora da chama

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (r \rho v_x Y_i) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r Y_i) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho D \frac{\partial Y_i}{\partial r} \right) = 0 \quad (317)$$

i : F dentro da chama

i : Ox fora da chama

Todo o fenômeno da reação está embutido e também define o contorno da chama (e da eq. 317) ainda

$$Y_{Pr} = 1 - Y_F - Y_{Ox} \quad (318)$$

9.3 Análise simplificada

Energia: Eq. de Shvab-Zeldovich com $\sum h_{j,i}^{\circ} \dot{m}_i''' = 0$ eq. (43) cap. 7.4

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r \rho v_x \int c_p dT \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho v_r \int c_p dT \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho D \frac{\partial \int c_p dT}{\partial r} \right) = 0 \quad (319)$$

9.3 Análise simplificada

- Descontinuidade na superfície da chama
- A chama é a própria cond. de contorno ainda

$$\rho = \frac{PMW_{mist}}{R_u T} \quad (320)$$

$$MW_{mist} = \left(\sum \frac{Y_i}{MW_i} \right)^{-1} \quad (321)$$

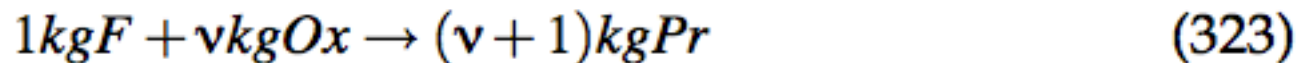
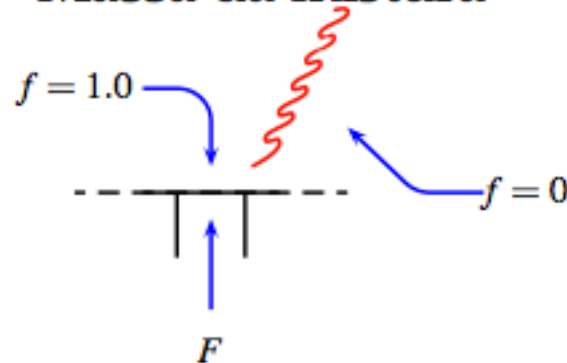
Resumo do modelo: 6 eq.'s, 6 incóg. ($v_r, v_x, T, Y_F, Y_{Ox}, P$)

Cond. Contorno: Definidas na posição da chama, que é desconhecida.
Mais fácil seria C.C. em $r = 0, x$ e $r = \infty, x$

9.4 Análise por Escalar Conservativo

- Fração de mistura (f)

$$f \equiv \frac{\text{Massa de material cuja origem é o jato}}{\text{Massa da mistura}} \quad (322)$$



$$f = Y_F + \left(\frac{1}{\nu + 1} \right) Y_{Pr} \quad (324)$$

9.4 Análise por Escalar Conservativo

- Fração de mistura (f)

Fração de mistura é uma fração mássica especial – Eq.324

Localmente, (f) representa a fração mássica de combustível que chegou num V.C. antes da reação acontecer (instantaneamente e “discontínua”)

$$f = Y_F \quad (324b)$$

9.4 Análise por Escalar Conservativo

- Relação entre Fração de mistura (f) e Razão de Equivalência Φ

$$\frac{m_{mist}}{m_{mist}} = \frac{m_F}{m_{mist}} + \frac{m_{ox}}{m_{mist}} \Rightarrow 1 = Y_F + Y_{Ox}$$

Substituindo 324b para a fração
mássica de combustível, torna-se:

$$m_{ox} = (1 - f)m_{mist}$$

9.4 Análise por Escalar Conservativo

- Relação entre Fração de mistura (f) e Razão de Equivalência Φ

Utilizando 324b na relação F/A

$$\frac{F}{A} = \frac{m_F}{m_{ox}} = \frac{f \cdot m_{mist}}{(1-f) \cdot m_{mist}} = \frac{f}{(1-f)}$$

9.4 Análise por Escalar Conservativo

- Relação entre Fração de mistura (f) e Razão de Equivalência Φ

Com a definição de Razão de Equivalência:

$$\Phi = \frac{(F / A)}{(F / A)_{st}} = \frac{f / (1 - f)}{(F / A)_{st}}$$

9.4 Análise por Escalar Conservativo

Eq. da conservação da fração de mistura

- f é carbono (C) ou Hidrogênio (H) presente no combustível
 - A massa dos elementos (C ou H) se conserva durante as reações químicas
- termo de fonte é nulo
para a massa de combustível (Y_F)

$$\dot{m}'' \frac{dY_F}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{dY_F}{dx} \right) = \dot{m}_F''' \quad (325)$$

Para os produtos (Y_{Pr})

$$\dot{m}'' \frac{dY_{Pr}}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{dY_{Pr}}{dx} \right) = \dot{m}_{Pr}''' \quad (326)$$

9.4 Análise por Escalar Conservativo

$\div (\nu + 1)$

$$\dot{m}'' \frac{d}{dx} \left(\frac{Y_{Pr}}{(\nu + 1)} \right) - \frac{d}{dx} \left[\rho D \frac{d}{dx} \left(\frac{Y_{Pr}}{(\nu + 1)} \right) \right] = \frac{1}{(\nu + 1)} \dot{m}_{Pr}''' \quad (327)$$

da conservação da massa:

$$\frac{\dot{m}_{Pr}'''}{(\nu + 1)} = -\dot{m}_F''' \quad (328)$$

Subst. em (327) e somando com (325):

$$\dot{m}'' \frac{d}{dx} \left(\frac{Y_F + Y_{Pr}}{(\nu + 1)} \right) - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{d}{dx} \left(\frac{Y_F + Y_{Pr}}{(\nu + 1)} \right) \right) = 0 \quad (329)$$

Eq. (329) não tem termo de fonte.

9.4 Análise por Escalar Conservativo

Usando a definição de f

$$\dot{m} \frac{d(f)}{dx} - \frac{d}{dx}(\rho D \frac{df}{dx}) = 0 \quad (330)$$

Então, a fração de mistura f é um escalar conservativo. Em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\rho v_x f) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r f) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r\rho D \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0 \quad (331)$$

- Não há descontinuidade na chama

9.4 Análise por Escalar Conservativo

Entalpia Absoluta

Da Eq da energia de Shvab-Zeldovich:

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\rho v_x h) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r h) - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho D \frac{\partial h}{\partial r}\right) = 0 \quad (336)$$

Cond. de contorno:

$$\frac{\partial h}{\partial r}(0, x) = 0 \quad (337)$$

$$h(\infty, x) = h_{Ox} \quad (338)$$

$$\left. \begin{aligned} h(r \leq R, 0) &= h_F \\ h(r > R, 0) &= h_{Ox} \end{aligned} \right\} \quad (339)$$

9.4 Análise por Escalar Conservativo

Equações Adimensionais

$$x^* \equiv x/R$$

$$r^* \equiv r/R$$

$$v_x^* \equiv v_x/v_e$$

$$v_r^* \equiv v_r/v_e$$

$$h^* \equiv \frac{h - h_{Ox,\infty}}{h_{F,e} - h_{Ox,\infty}}$$

Na saída do bocal: $h = h_{F,e} \Rightarrow h^* = 1$

em $r \rightarrow \infty$ $h = h_{Ox,\infty} \Rightarrow h^* = 0$

$$\rho^* \equiv \frac{\rho}{\rho_e}$$

9.4 Análise por Escalar Conservativo

continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* v_x^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*}(r^* \rho^* v_r^*) = 0 \quad (340)$$

Momentum axial:

$$\frac{\partial}{\partial x^*}(r^* \rho^* v_x^* v_x^*) + \frac{\partial}{\partial r^*}(r^* \rho^* v_r^* v_x^*) - \frac{\partial}{\partial r^*} \left[\left(\frac{\mu}{\rho_e v_e R} \right)^{r^*} \frac{\partial v_x^*}{\partial r^*} \right] = \frac{gR}{v_e^2} \left(\frac{\rho^\infty}{\rho_e} - 1 \right) r^* \quad (341)$$

Fração de mistura

$$\frac{\partial}{\partial x^*}(r^* \rho^* v_x^* f) + \frac{\partial}{\partial r^*}(r^* \rho^* v_r^* f) - \frac{\partial}{\partial r^*} \left[\left(\frac{\rho D}{\rho_e v_e R} \right) r^* \frac{\partial f^*}{\partial r^*} \right] = 0 \quad (342)$$

9.4 Análise por Escalar Conservativo

Entalpia

$$\frac{\partial}{\partial x^*}(r^* \rho^* v_x^* h) + \frac{\partial}{\partial r^*}(r^* \rho^* v_r^* h) - \frac{\partial}{\partial r^*} \left[\left(\frac{\rho D}{\rho_e v_e R} \right) r^* \frac{\partial h^*}{\partial r^*} \right] = 0 \quad (343)$$

$$\text{C.C. } v_r^*(0, x^*) = 0$$

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial r^*}(0, x^*) = \frac{\partial f}{\partial r^*}(0, x^*) = \frac{\partial h^*}{\partial r^*}(0, x^*) = 0$$

$$v_x^*(r^* \leq 1, 0) = f(r^* \leq 1, 0) = h^*(r^* \leq 1, 0) = 1$$

$$v_x^*(r^* > 1, 0) = f(r^* > 1, 0) = h^*(r^* > 1, 0) = 1$$

9.4 Análise por Escalar Conservativo

Hipótese adicional

- Empuxo negligenciado na eq. (341)
- ainda: Numero de Schmidt

$$S_c \equiv \frac{\text{Difusividade Momentum}}{\text{Difusividade Massa}} = \frac{\nu}{D} = \frac{\mu}{\rho D} \quad (344)$$

Assumindo $S_c = 1$ eq. (341) torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial x^*}(r^* \rho^* v_x^* \zeta) + \frac{\partial}{\partial r^*}(r^* \rho^* v_r^* \zeta) - \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{Re} r^* \frac{\partial \zeta}{\partial r^*} \right) = 0 \quad (345)$$

onde

$$\zeta = v_x^* = f = h^* \quad e \quad Re = \frac{\rho_e v_e R}{\mu}$$

Resolvendo (345 $\rightarrow \zeta$) e continuidade (340 $\rightarrow v_r^*$)
o problema é resolvido

- Relações de estado
- falta ainda

$$\begin{array}{c} \rho^*(f) \\ \downarrow \\ \text{Gás Ideal} \\ (T, Y_i) \end{array}$$

9.4 Análise por Escalar Conservativo

no "Flame Sheet Model":

- Dentro da chama ($f_{st} < f \leq 1$)

$$Y_F = \frac{f - f_{st}}{1 - f_{st}} \quad (346)$$

$$Y_{Ox} = 0 \quad (347)$$

$$Y_{Pr} = \frac{1 - f}{1 - f_{st}} \quad (348)$$

- Na chama ($f = f_{st}$)

$$Y_F = 0 \quad (349)$$

$$Y_{Ox} = 0 \quad (350)$$

$$Y_{Pr} = 1 \quad (351)$$

- Fora da chama ($0 \leq f \leq f_{st}$)

$$Y_F = 0 \quad (352)$$

$$Y_{Ox} = 1/f_{st} \quad (353)$$

$$Y_{Pr} = f/f_{st} \quad (354)$$

onde

$$f_{st} = \frac{1}{(\nu + 1)} \quad (355)$$

9.4 Análise por Escalar Conservativo

Relação $T = T(f)$

Assume-se:

1. $c_{p,F} = c_{p,Ox} = c_{p,Pr} \equiv c_p$
2. $h_{f,Ox}^\circ = h_{f,Pr}^\circ = 0$

então a equação calórica:

$$h = \sum Y_i h_i = Y_F \Delta h_c + c_p (T - T_{ref}) \quad (356)$$

$$\Delta h_c \equiv h_{f,F}^\circ + \nu h_{f,Ox}^\circ - (\nu + 1) h_{f,Pr}^\circ$$

Subst. (356) na definição de h^* (pg 105)

$$h^* = \frac{Y_F \Delta h_c + c_p (T - T_{Ox,\infty})}{\Delta h_c + c_p (T_{F,e} - T_{Ox,\infty})} \equiv f \quad (357)$$

Então:

$$T = (f - Y_F) \frac{\Delta h_c}{c_p} + f (T_{F,e} - T_{Ox,\infty}) + T_{Ox,\infty} \quad (358)$$

Com as expressões para Y_F nas três regiões da chama, chega-se a:

9.4 Análise por Escalar Conservativo

- Dentro da chama

$$T = T(f) = f \left[(T_{F,e} - T_{Ox,\infty}) - \frac{f_{st}}{1 - f_{st}} \frac{\Delta h_c}{c_p} \right] + T_{Ox,\infty} + \frac{f_{st}}{(1 - f_{st})c_p} \Delta h_c \quad (359)$$

- Na chama ($f = f_{st}$)

$$T = f_{st} \left(\frac{\Delta h_c}{c_p} + T_{F,e} + T_{Ox,\infty} \right) + T_{Ox,\infty} \quad (360)$$

- Fora da Chama

$$T = f \left(\frac{\Delta h_c}{c_p} + T_{F,e} + T_{Ox,\infty} \right) + T_{Ox,\infty} \quad (361)$$

Resumo:

$$\left. \begin{array}{l} Y_F(f) \\ Y_{Ox}(f) \\ Y_{Pr}(f) \end{array} \right\} \text{Eq's da 35 a 40}$$

$$T(f) \rightarrow \text{Eq's da 45 a 47}$$

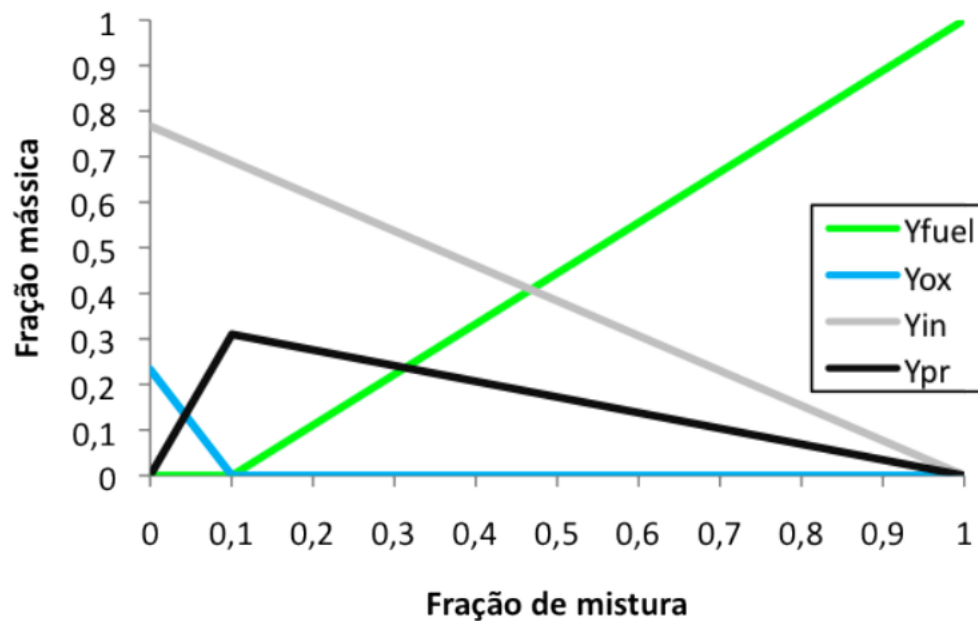
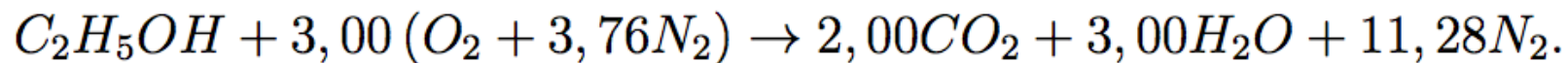


Figura 3.1 – Fração mássica das espécies em função da fração de mistura.

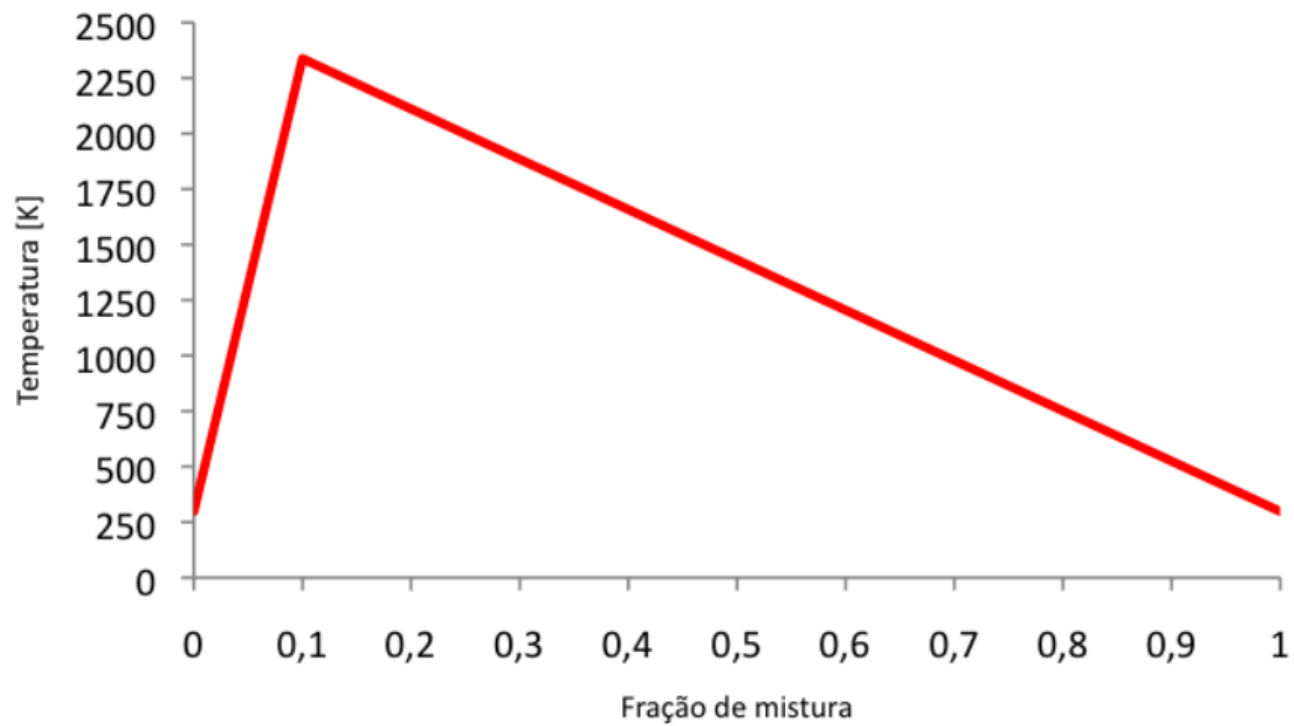


Figura 3.2 – Temperatura da mistura em função da fração de mistura.