

Equação integral de von Kármán

J. L. Baliño

Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

Apostila de aula
2017, v. 1



Sumário

1 Equação integral de von Kármán



Equação integral de von Kármán

Deduziremos uma equação integral para a camada limite (laminar ou turbulenta) baseada na integração das equações de continuidade e momento na espessura $\delta(x, t)$. A camada limite pode ser transiente. Para simplificar a notação, as variáveis serão consideradas como os valores médios no caso turbulento e os valores instantâneos no caso laminar. As equações de partida são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right)$$

As condições de contorno são:

Na parede ($y = 0$): $u = v = 0$, $\overline{u'v'} = 0$, $\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w$.

No borde da camada limite ($y = \delta$): $\overline{u'v'} \approx 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} \approx 0$, $u = U(x, t)$.



Equação integral de von Kármán

Integrando a equação de continuidade:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy &= v_\delta(x, t) = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u dy + U \frac{\partial \delta}{\partial x} \\
 &= - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u dy + \frac{\partial}{\partial x} (U \delta) - \delta \frac{\partial U}{\partial x} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (U - u) dy - \delta \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (U \delta^*) - \delta \frac{\partial U}{\partial x} \\
 v_\delta(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} (U \delta^*) - \delta \frac{\partial U}{\partial x}
 \end{aligned}$$



Equação integral de von Kármán

No borde da camada limite é válida a equação de Euler para escoamento irrotacional:

$$\nabla p + \rho \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) + \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V} = U \mathbf{i} + v_\delta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{V}^2 = U^2 + v_\delta^2 \cong U^2$$

Multiplicando escalarmente por $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i}$, obtemos a relação de Bernoulli generalizada para escoamentos transientes:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} U^2 \right) + \rho \frac{\partial U}{\partial t} \cong 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cong -\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} U^2 \right) - \rho \frac{\partial U}{\partial t}$$



Equação integral de von Kármán

Expressamos o resto dos termos em forma conservativa:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (u v) - u \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (u v) + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (u v) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2)$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

Substituindo, resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (u v) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} U^2 \right) - \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u' v'}) = 0$$



Equação integral de von Kármán

Integramos cada termo em y entre 0 e δ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial t} (u - U) dy &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta (u - U) dy - [U - U] \frac{\partial \delta}{\partial t} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[U \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \right] = -\frac{\partial}{\partial t} (U \delta^*) \\
 \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} (u^2) dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy - U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy - \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \delta) + \delta \frac{\partial}{\partial x} (U^2) \\
 \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y} (u v) dy &= U v_\delta = U \frac{\partial}{\partial x} (U \delta^*) - U \delta \frac{\partial U}{\partial x} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \delta^*) - U \delta^* \frac{\partial U}{\partial x} - \delta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} U^2 \right)
 \end{aligned}$$



Equação integral de von Kármán

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} U^2 \right) dy = \delta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} U^2 \right)$$

$$\frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\partial \tau}{\partial y} dy = -\frac{1}{\rho} \tau_w$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u' v'}) dy = 0$$

Substituindo, resulta:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} (U \delta^*) + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy - \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \delta) + \delta \frac{\partial}{\partial x} (U^2) + \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \delta^*) \\ - U \delta^* \frac{\partial U}{\partial x} - \delta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} U^2 \right) - \delta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} U^2 \right) + \frac{1}{\rho} \tau_w = 0 \end{aligned}$$



Equação integral de von Kármán

Levando em conta que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} (U^2 \delta^*) &= \int_0^\delta U^2 \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \\ \int_0^\delta \left[u^2 - U^2 + U^2 \left(1 - \frac{u}{U}\right)\right] dy &= \int_0^\delta (u^2 - u U) dy \\ &= -U^2 \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = -U^2 \theta\end{aligned}$$

resulta finalmente a equação integral de von Kármán (1921) (Theodore von Kármán, 1881-1963):

$$\frac{1}{\rho} \tau_w = \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \theta) + U \delta^* \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} (U \delta^*)$$



Equação integral de von Kármán

Procedimento para resolver um problema utilizando o método integral:

- 1 Obter U da solução para o escoamento externo irrotacional.
- 2 Selecionar um perfil de velocidade aproximado "razoável" da forma $\frac{u}{U} = f(\eta)$, onde $\eta = \frac{y}{\delta}$. O procedimento pode ser sofisticado incluindo o gradiente de pressão no perfil de velocidade para determinar a separação (Polhausen, 1921) (método de Ernst Pohlhausen, 1890-1964).

- 3 Calcular os parâmetros necessários θ , τ_w e δ^* em função de δ :

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta \int_0^1 f(1-f) d\eta = C_\theta \delta, \text{ onde } C_\theta = \int_0^1 f(1-f) d\eta$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} (y=0) = \frac{\mu U}{\delta} f'(0) = C_\tau \frac{\mu U}{\delta}, \text{ onde } C_\tau = f'(0)$$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta \int_0^1 (1-f) d\eta = C_* \delta, \text{ onde } C_* = \int_0^1 (1-f) d\eta$$

- 4 Resolver a EDP resultante em δ e calcular ν_δ , τ_w , c_f e C_D :

$$\frac{\nu U}{\delta} C_\tau = C_\theta \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \delta) + C_* U \delta \frac{\partial U}{\partial x} + C_* \frac{\partial}{\partial t} (U \delta)$$



Camada limite turbulenta, gradiente de pressão zero

Utilizaremos o método integral para resolver aproximadamente a camada limite turbulenta em uma placa plana com gradiente de pressão zero. A equação integral de von Kármán fica:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = U^2 \frac{d\theta}{dx}$$

Como perfil de velocidade turbulento é proposto:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \eta^{1/7}$$

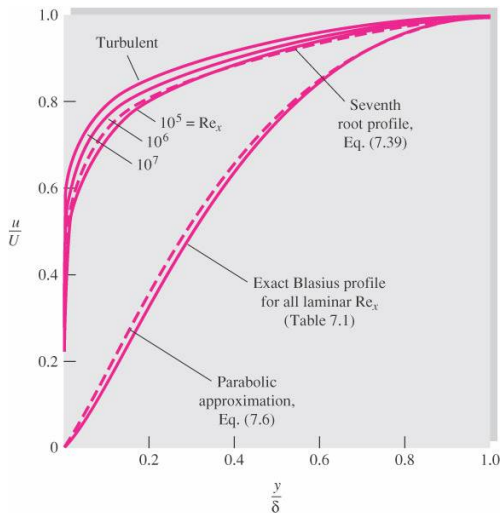
$$C_\theta = \int_0^1 f(1-f) d\eta = \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] d\eta = \frac{7}{72}$$

Para determinar a tensão de cisalhamento, observamos que o perfil escolhido não funciona pois a derivada diverge na parede. Portanto, estimaremos a tensão de cisalhamento de uma maneira alternativa. Da definição do coeficiente de atrito de filme podemos escrever:

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2} \Rightarrow \tau_w = \frac{1}{2} c_f \rho U^2 \Rightarrow c_f = 2 \frac{d\theta}{dx} = 2 C_\theta \frac{d\delta}{dx}$$



Camada limite turbulenta, gradiente de pressão zero



Camada limite turbulenta, gradiente de pressão zero

Para determinar o coeficiente de atrito de filme, consideramos que o perfil de velocidade é o logaritmico, correspondente à camada turbulenta em uma placa plana lisa. Sabendo que $u(\delta) = U$ podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{U}{u_\tau} &= \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{\delta u_\tau}{\nu} \right) + B = \frac{1}{\kappa} \log \left(Re_\delta \frac{u_\tau}{U} \right) + B \\ \frac{U}{u_\tau} &= U \left(\frac{\rho}{\tau_w} \right)^{1/2} = \left(\frac{\rho U^2}{\tau_w} \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{c_f} \right)^{1/2} \\ \Rightarrow \left(\frac{2}{c_f} \right)^{1/2} &= \frac{1}{\kappa} \log \left[Re_\delta \left(\frac{c_f}{2} \right)^{1/2} \right] + B\end{aligned}$$

Da expressão anterior podemos determinar c_f numericamente, como mostrado na tabela. Podemos correlacionar $c_f = c_f(Re_\delta)$ de maneira explícita na forma:

$$c_f = C Re_\delta^{-n} \quad \text{onde } C = 0,02, n = \frac{1}{6}$$



Camada limite turbulenta, gradiente de pressão zero

Re_δ	10^4	10^5	10^6	10^7
c_f	0,00493	0,00315	0,00217	0,00158

Substituindo:

$$C \rho U^2 \left(\frac{U}{\nu} \right)^{-n} \delta^{-n} = 2 C_\theta \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \Rightarrow \delta^n d\delta = \frac{C}{2 C_\theta} \left(\frac{U}{\nu} \right)^{-n} dx$$

Integrando e desprezando o comprimento e espessura da porção laminar da camada limite ($\delta(x=0) = 0$):

$$\frac{\delta^{n+1}}{n+1} = \frac{C}{2 C_\theta} \left(\frac{U}{\nu} \right)^{-n} x \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{\left[(n+1) \frac{C}{2 C_\theta} \right]^{\frac{1}{n+1}}}{Re_x^{\frac{n}{n+1}}}$$

Substituindo as constantes, resulta:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,162}{Re_x^{1/7}} \Rightarrow \delta = 0,16 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/7} x^{6/7}$$



Camada limite turbulenta, gradiente de pressão zero

O coeficiente de atrito de filme e a tensão de cisalhamento resultam:

$$c_f = 2 C_\theta \frac{d\delta}{dx} = 2 \times \frac{7}{72} \times 0,16 \times \frac{6}{7} \times \left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{7}} x^{-1/7} = \frac{0,027}{Re_x^{1/7}}$$

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho U^2 c_f = 0,0135 \frac{\mu^{1/7} \rho^{6/7} U^{13/7}}{x^{1/7}}$$

A força de arrasto e o coeficiente de arrasto resulta:

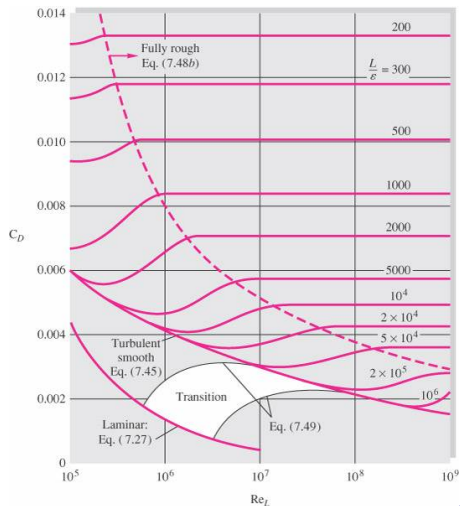
$$\mathcal{D} = \int_0^L \tau_w dx \quad ; \quad C_D = \frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2} \rho U^2 L} = \frac{1}{L} \int_0^L c_f(x) dx = \frac{7}{6} c_f(L) = \frac{0,031}{Re_L^{1/7}}$$

Finalmente, a espessura de deslocamento resulta:

$$C_* = \int_0^1 [1 - \eta^{1/7}] d\eta = \frac{1}{8} \Rightarrow \delta_* = \frac{1}{8} \delta \Rightarrow \frac{\delta_*}{x} = \frac{0,0203}{Re_x^{1/7}}$$



Camada limite turbulenta, gradiente de pressão zero



Camada limite turbulenta, gradiente de pressão zero

Para superfícies rugosas na faixa de turbulência completamente desenvolvida, o coeficiente de atrito de filme independe do Reynolds, resultando:

$$c_f \approx \left[2,87 + 1,58 \log \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right]^{-2,5}$$

$$C_D \approx \left[1,89 + 1,62 \log \left(\frac{L}{\epsilon} \right) \right]^{-2,5}$$

Na região de transição ($5 \times 10^5 < Re_{trans} < 3 \times 10^6$) as curvas sugeridas são:

$$C_D \approx \begin{cases} \frac{0,031}{Re_L^{1/7}} - \frac{1440}{Re_L} & ; Re_{trans} = 5 \times 10^5 \\ \frac{0,031}{Re_L^{1/7}} - \frac{8700}{Re_L} & ; Re_{trans} = 3 \times 10^6 \end{cases}$$

