

Cap. 9.3 e 9.4

Transferência radiativa e a
equação de transporte radiativo

AGA 0293
Jorge Meléndez

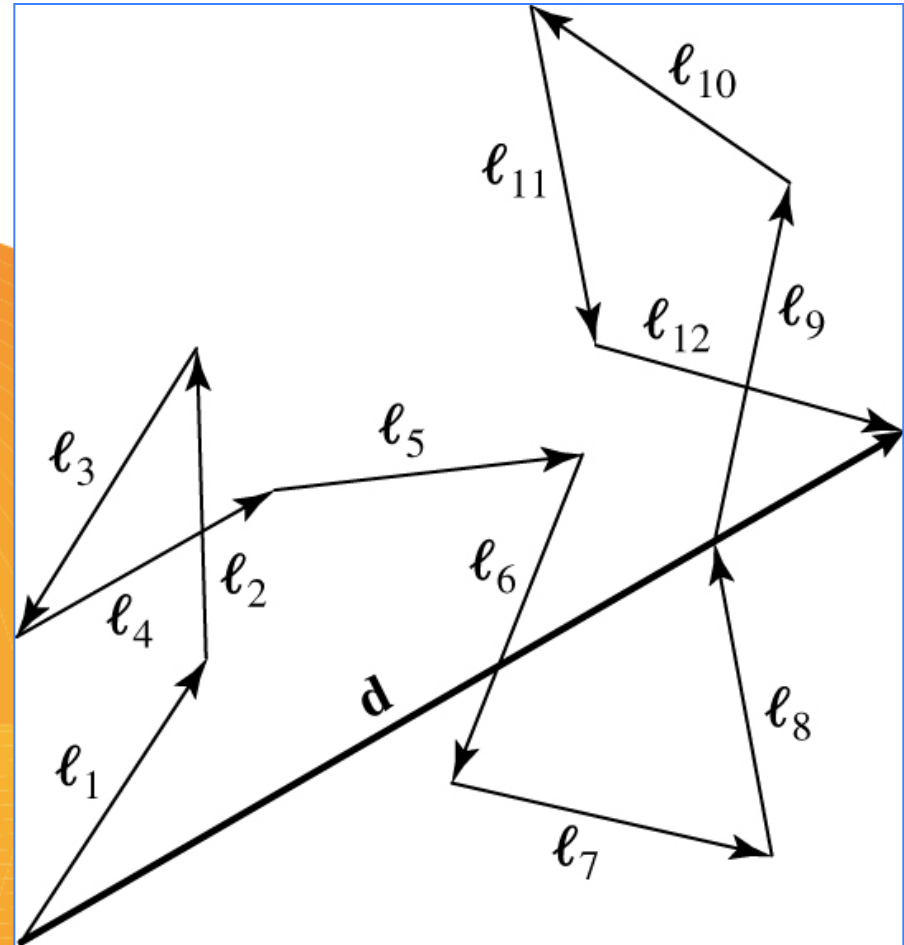
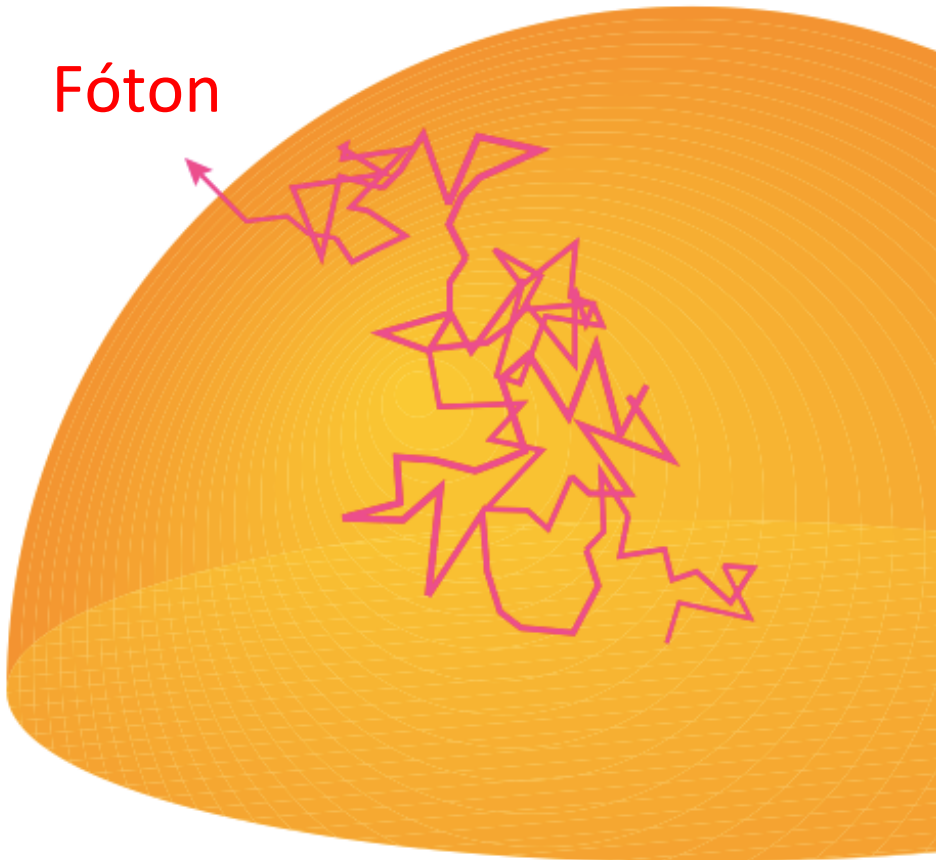
O tortuoso caminho dos fótons no interior das estrelas: **passaio aleatório**

Distância percorrida: $d = \ell\sqrt{N}$

ℓ : caminho livre médio

N: número de passos

Fóton



Passeio aleatório dos fótons

Distância percorrida: $d = \ell\sqrt{N}$

ℓ : caminho livre médio; N : número de passos

Como a profundidade óptica é o número aproximado de caminhos livre médio até a superfície $\rightarrow$ distância até a superfície é: $d = \tau_\lambda \ell = \ell\sqrt{N}$.

$\rightarrow$ Número de passos até a superfície (para $\tau \gg 1$) é:

$$N = \tau_\lambda^2$$

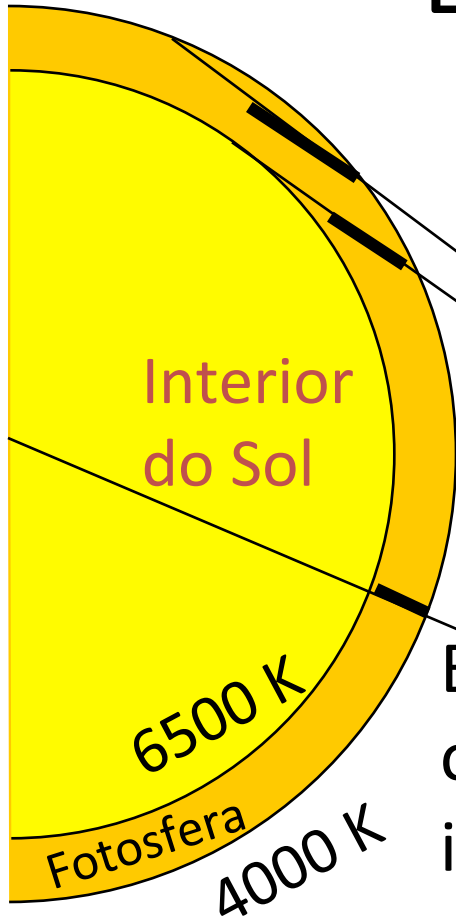
O que acontece com o fóton se $\tau \sim 1$?

“Superfície”? Superfície óptica

Quando observamos o Sol estamos olhando uma camada com profundidade óptica $\tau = 2/3$ em qualquer ângulo



Escurecimento do limbo



Espessura óptica $\tau = 2/3$
ocorre em regiões mais
externas (frias)

Espessura $\tau = 2/3$
ocorre em regiões mais
internas (quentes)

Visão do Sol



$$\tau_{\lambda} = \int_0^s \kappa_{\lambda} \rho ds$$



Gradiente de pressão de radiação

Para radiação de corpo negro:

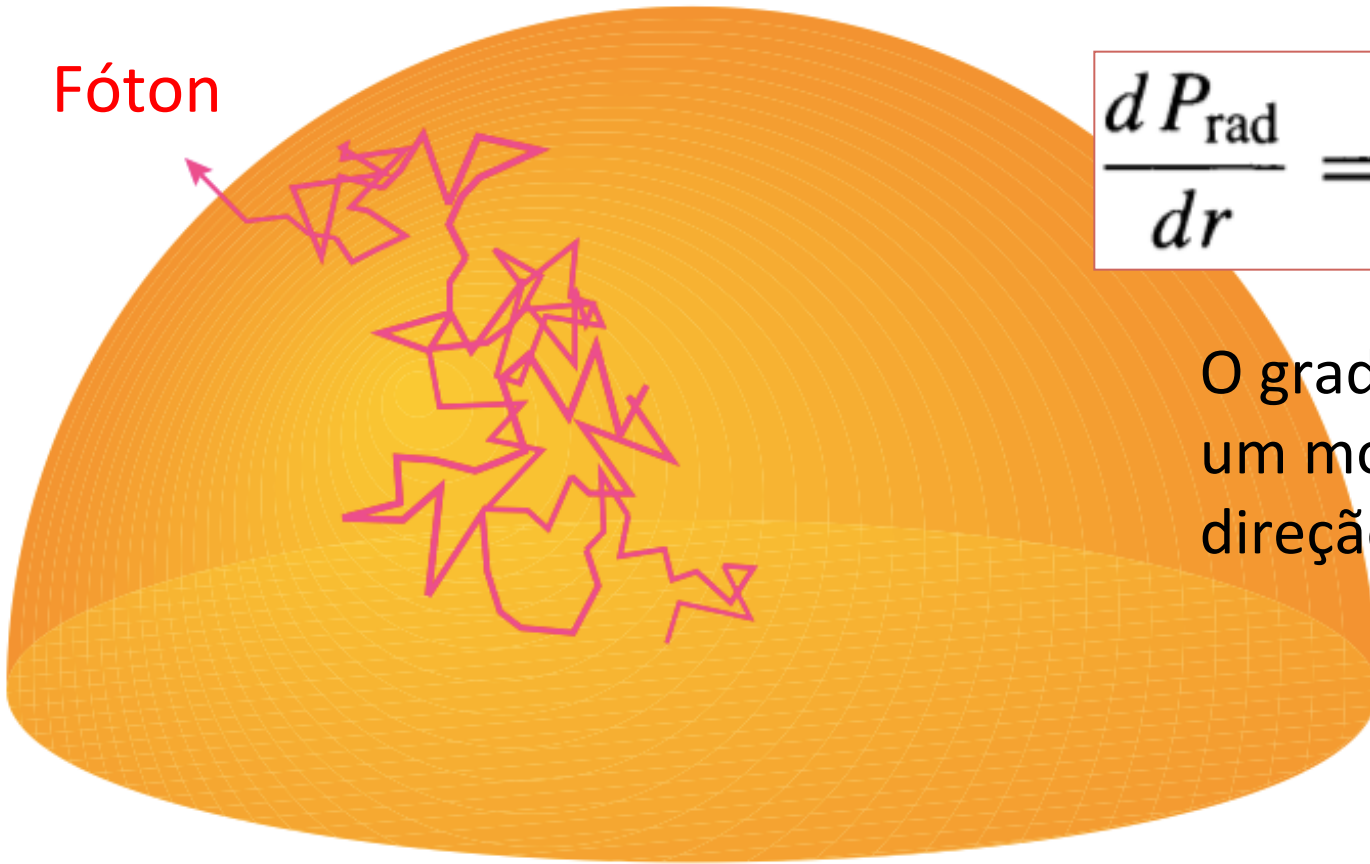
$$P_{\text{rad}} = \frac{4\pi}{3c} \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = \frac{4\sigma T^4}{3c}$$

Temperatura decresce na direção da superfície
→ pressão de radiação também decresce

Fóton

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\bar{\kappa}\rho}{c} F_{\text{rad}}$$

O gradiente produz um movimento na direção da superfície



9.4 A equação de transferência radiativa

- Estudaremos o fluxo de radiação através da atmosfera. Não consideraremos o caminho de um fóton individual, apenas o fluxo de energia em uma determinada direção.
- Obteremos um modelo da variação da temperatura em função da profundidade óptica.
- Importante para diversos problemas, entre eles a variação de intensidade centro-limbo no Sol.



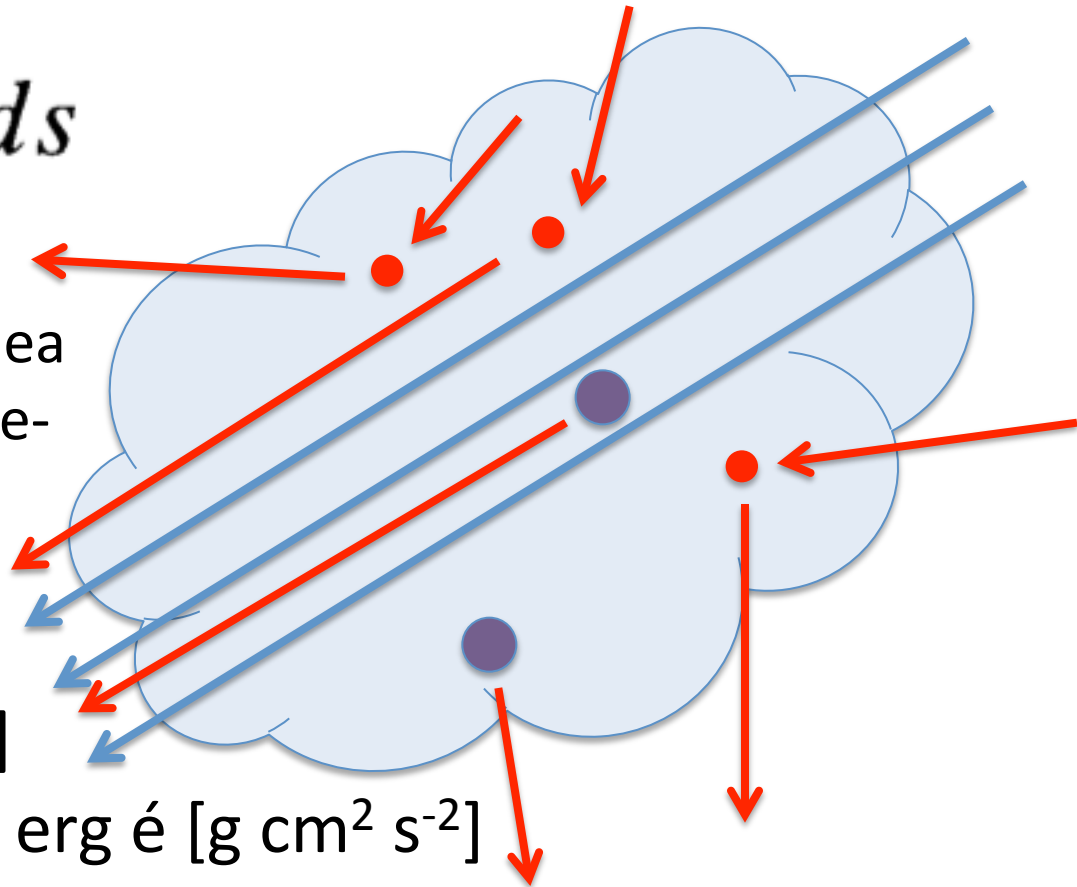
O Coeficiente de emissão

O Incremento de intensidade da luz dI_λ ao atravessar um gás é proporcional à distância percorrida ds , a densidade do gás ρ , e o coeficiente de emissão do gás j_λ :

$$dI_\lambda = j_\lambda \rho ds$$

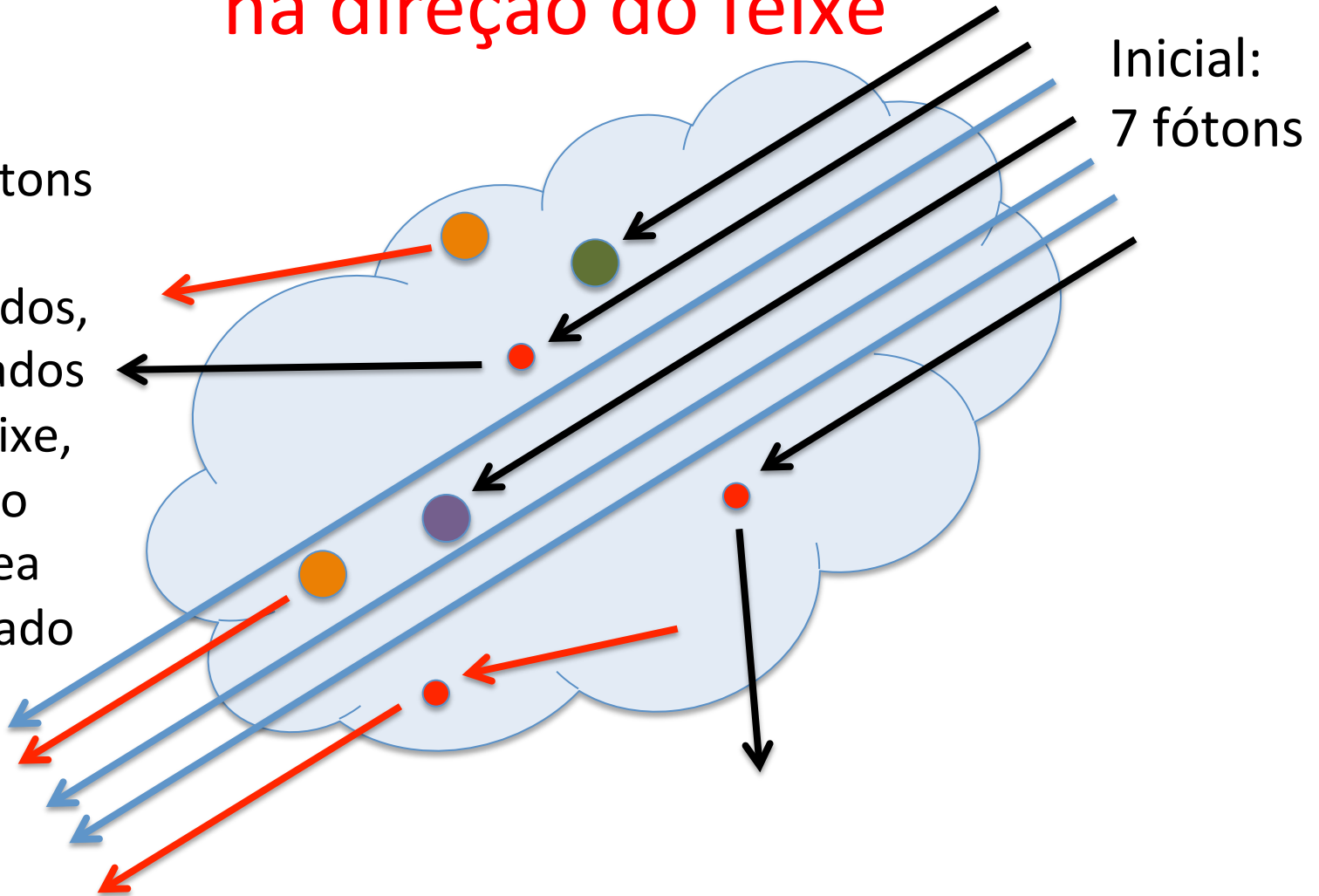
- Emissão espontânea
- Espalhamento de e-

Unidades de j_λ :
[erg s⁻¹ nm⁻¹ sr⁻¹ g⁻¹]
ou [m s⁻³ sr⁻¹], pois erg é [g cm² s⁻²]



$-dI_\lambda$: absorção + espalhamento fora do feixe
 $+dI_\lambda$: emissão espontânea + espalhamento
na direção do feixe

Final: 5 fótons
(7 iniciais,
-2 absorvidos,
-2 espalhados
fora do feixe,
+1 emissão
espontânea
+1 espalhado
no feixe)



Considerando ambos absorção e emissão:

$$dI_\lambda = -\kappa_\lambda \rho I_\lambda ds + j_\lambda \rho ds$$

Dividindo por $-\kappa_\lambda \rho ds$



$$-\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - \frac{j_\lambda}{\kappa_\lambda}$$

Definimos a

função fonte S_λ :

$$S_\lambda \equiv j_\lambda / \kappa_\lambda$$

S_λ descreve como fótons são removidos e acrescentados no feixe de radiação

Equação de
transferência
radiativa:

$$-\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - S_\lambda$$

Equação de
transferência
radiativa

$$-\frac{1}{\kappa_{\lambda}\rho} \frac{dI_{\lambda}}{ds} = I_{\lambda} - S_{\lambda}$$

Se a intensidade não muda $\rightarrow dl_{\lambda}/ds = 0 \rightarrow I_{\lambda} = S_{\lambda}$

Se $I_{\lambda} > S_{\lambda} \rightarrow dl_{\lambda}/ds < 0 \rightarrow I_{\lambda}$ decresce com a distância

Se $I_{\lambda} < S_{\lambda} \rightarrow dl_{\lambda}/ds > 0 \rightarrow I_{\lambda}$ aumenta com a distância

Para radiação de corpo negro, $I_{\lambda} = B_{\lambda}$

Como a radiação está em equilíbrio $\rightarrow dl_{\lambda}/ds = 0$

$$\rightarrow S_{\lambda} = I_{\lambda} = B_{\lambda}$$

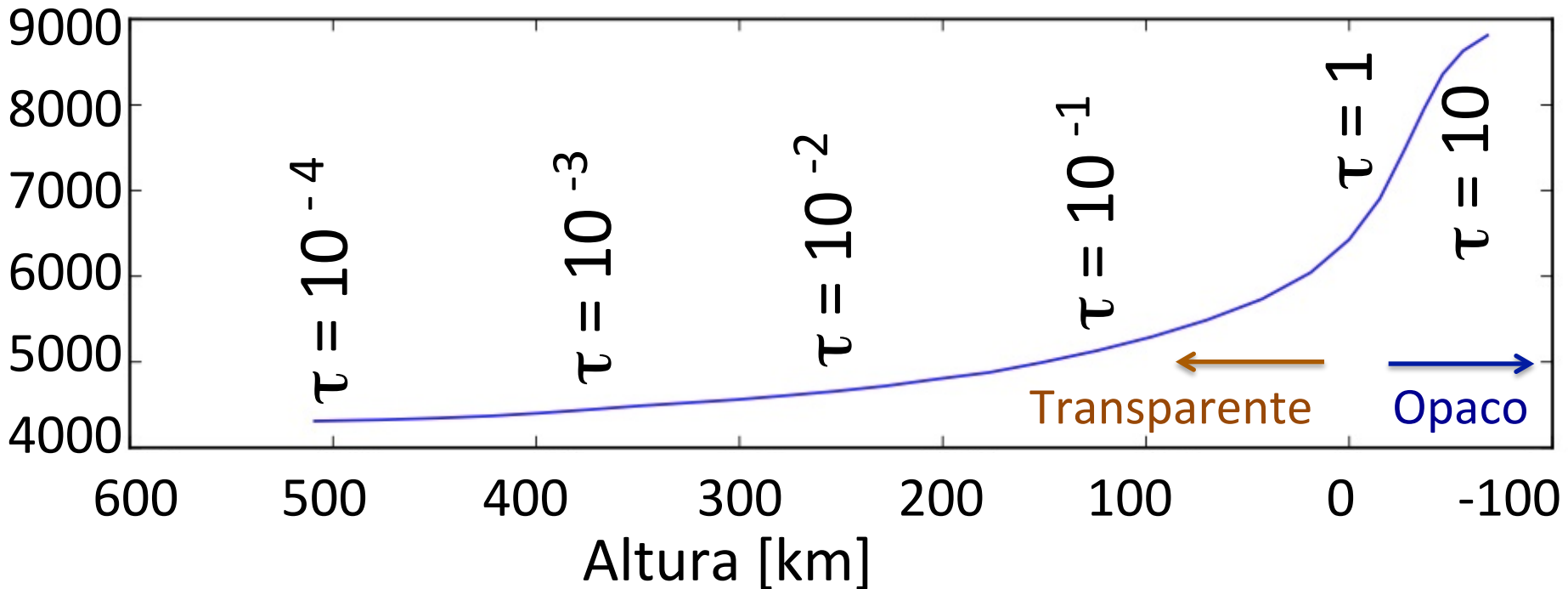
Equilíbrio Termodinâmico Local (ETL)

$$I_{\lambda} = I_{\lambda,0} e^{-\tau_{\lambda}}$$

$$-\frac{1}{\kappa_{\lambda}\rho} \frac{dI_{\lambda}}{ds} = I_{\lambda} - S_{\lambda}$$

Temperatura [K]

$\tau \gg 1$: condições mais próximas de ETL



Número de passos até escapar (para $\tau \gg 1$):
Fótons em regiões de alta $\tau \rightarrow$ mesma T

$$N = \tau_{\lambda}^2$$

Example 9.4.1. To see how the intensity of a light ray tends to become equal to the local value of the source function, imagine a beam of light of initial intensity $I_{\lambda,0}$ at $s = 0$ entering a volume of gas of constant density, ρ , that has a *constant* opacity, κ_λ , and a *constant* source function, S_λ . Then it is left as an exercise to show that the transfer equation (Eq. 9.34) may be easily solved for the intensity of the light as a function of the distance s traveled into the gas:

$$-\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - S_\lambda$$

Para $I_{\lambda,0}$ em $s=0$, e se $\rho = \text{cte}$, $\kappa_\lambda = \text{cte}$, $S_\lambda = \text{cte}$:

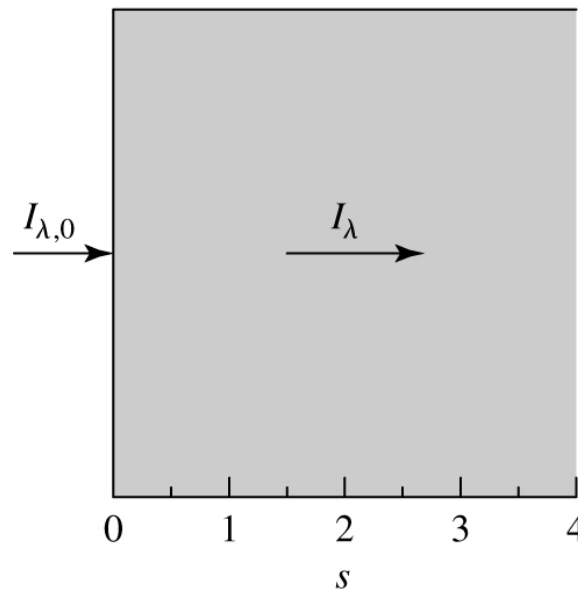
$$\rightarrow I_\lambda(s) = I_{\lambda,0} e^{-\kappa_\lambda \rho s} + S_\lambda (1 - e^{-\kappa_\lambda \rho s})$$

As shown in Fig. 9.13 for the case of $S_\lambda = 2I_{\lambda,0}$, this solution describes the transformation of the intensity of the light ray from its initial value of $I_{\lambda,0}$ to S_λ , the value of the source function. The characteristic distance for this change to occur is $s = 1/\kappa_\lambda \rho$, which is one photon mean free path (recall Example 9.2.2), or one optical depth into the gas.

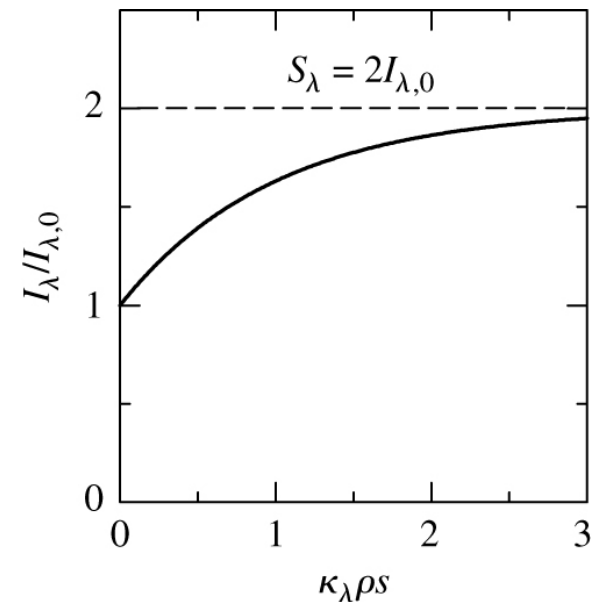
Dica para resolver a equação de transferência:
Multiplicar por

$$\kappa \rho e^{-\kappa \rho s}$$

$$\rightarrow d(I_\lambda e^{-\kappa \rho s})/ds$$



(a)



(b)

Equação de transferência radiativa em função da profundidade óptica

$$-\frac{1}{\kappa_{\lambda}\rho} \frac{dI_{\lambda}}{ds} = I_{\lambda} - S_{\lambda}$$

$$d\tau_{\lambda} = -\kappa_{\lambda}\rho ds$$

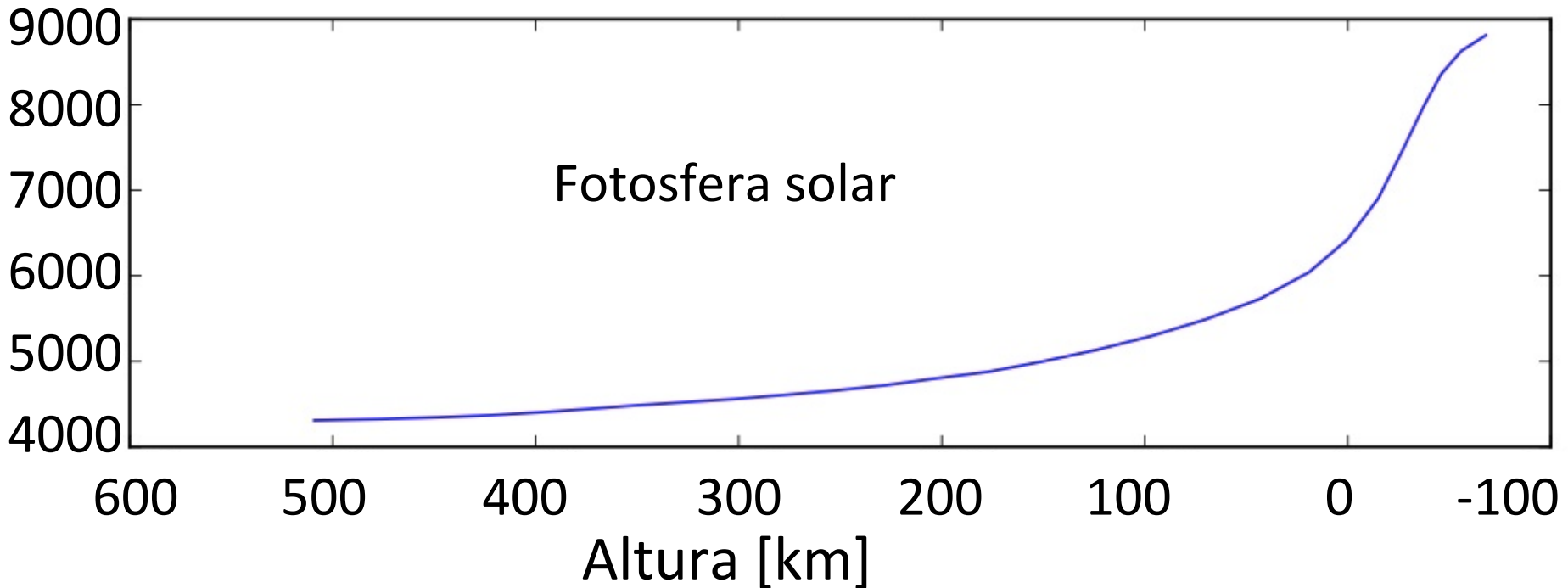
$$\frac{dI_{\lambda}}{d\tau_{\lambda}} = I_{\lambda} - S_{\lambda}$$

Atmosfera plano-paralela

$H_{\text{fotosfera}} \sim 500 \text{ km}$

$R_{\text{sol}} \sim 700\,000 \text{ km} \rightarrow H/R = 7 \times 10^{-4}$

Temperatura [K]



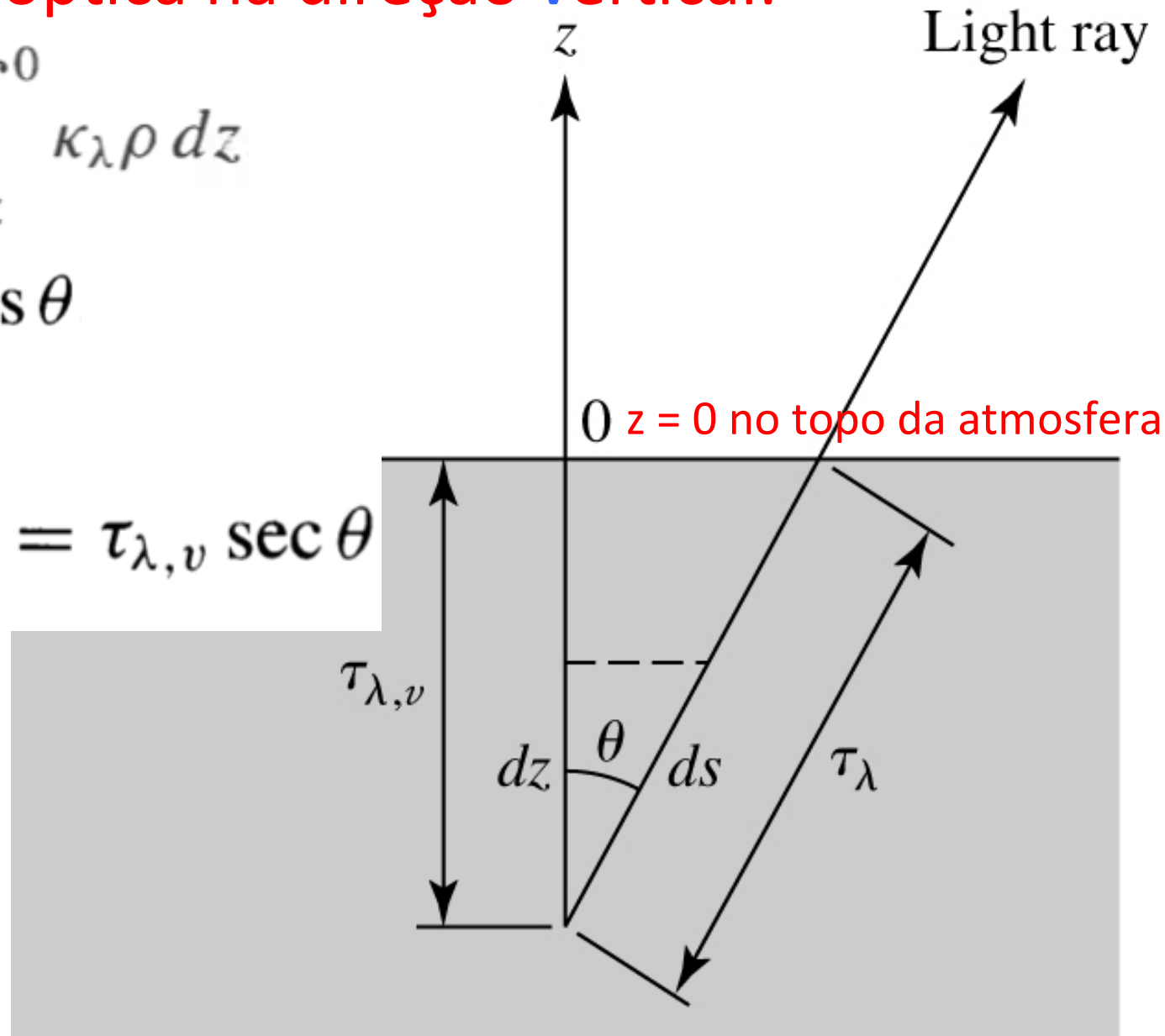
Profundidade óptica na direção vertical:

$$\tau_{\lambda,v}(z) \equiv \int_z^0 \kappa_{\lambda} \rho \, dz$$

$$dz = ds \cos \theta$$



$$\tau_{\lambda} = \frac{\tau_{\lambda,v}}{\cos \theta} = \tau_{\lambda,v} \sec \theta$$



Equação de transferência radiativa usando a profundidade óptica na direção vertical, $\tau_{\lambda,v}$

$$\tau_{\lambda} = \frac{\tau_{\lambda,v}}{\cos \theta}$$

$$\frac{dI_{\lambda}}{d\tau_{\lambda}} = I_{\lambda} - S_{\lambda}$$



$$\cos \theta \frac{dI_{\lambda}}{d\tau_{\lambda,v}} = I_{\lambda} - S_{\lambda}$$

Atmosfera “cinza”

Profundidade óptica $\tau_{\lambda,v}$
depende do comprimento de
onda, pois κ_λ depende de λ

$$\tau_{\lambda,v}(z) \equiv \int_z^0 \kappa_\lambda \rho dz$$

Para identificar 1 camada da atmosfera z com apenas 1 profundidade óptica τ_v , podemos supor que κ não depende de λ (como por ex., para a opacidade média de Rosseland)

Uma atmosfera onde a opacidade não depende do comprimento de onda é chamada de atmosfera cinza

Atmosfera “cinza”

$$\tau_{\lambda,v}(z) \equiv \int_z^0 \kappa_{\lambda} \rho dz \longrightarrow \tau_v(z)$$

$$\cos \theta \frac{dI_{\lambda}}{d\tau_v} = I_{\lambda} - S_{\lambda}$$

$$I = \int_0^{\infty} I_{\lambda} d\lambda$$

$$S = \int_0^{\infty} S_{\lambda} d\lambda$$

Equação de
transferência radiativa
para atmosfera cinza

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau_v} = I - S$$

Relações importantes para a atmosfera cinza

$$\frac{dF_{\text{rad}}}{d\tau_v} = 4\pi(\langle I \rangle - S)$$

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{d\tau_v} = \frac{1}{c} F_{\text{rad}}$$

Em coordenadas esféricas, com origem no centro da estrela ($r = 0$)

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\bar{\kappa}\rho}{c} F_{\text{rad}}$$

Condição de equilíbrio: processos de absorção são balanceados por processos de emissão. O fluxo deve ser o mesmo em todas as camadas:

$$F_{\text{rad}} = \text{constant} = F_{\text{surf}} = \sigma T_e^4$$

Como o fluxo é constante $dF_{\text{rad}}/d\tau_v = 0$

$$\frac{dF_{\text{rad}}}{d\tau_v} = 4\pi(\langle I \rangle - S) \Rightarrow \langle I \rangle = S$$

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{d\tau_v} = \frac{1}{c} F_{\text{rad}} \Rightarrow P_{\text{rad}} = \frac{1}{c} F_{\text{rad}} \tau_v + C$$

C is the constant of integration

Distribuição de temperatura

$$\frac{4\pi}{3} \langle I \rangle = F_{\text{rad}} \left(\tau_v + \frac{2}{3} \right)$$

$$\langle I \rangle = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4 \left(\tau_v + \frac{2}{3} \right)$$

Para ETL: $S = B = \frac{\sigma T^4}{\pi}$ Lembrando: $\langle I \rangle = S$

Então: $\langle I \rangle = \frac{\sigma T^4}{\pi}$

$$T^4 = \frac{3}{4} T_e^4 \left(\tau_v + \frac{2}{3} \right)$$

Detailed solar model by David Gray (2005, Stellar photospheres)



Como se compara com a distribuição de temperatura para o modelo “cinza”?

$\log \tau_0$	T (K)	$\log P_g$ (dyne/cm ²)	$\log P_e$ (dyne/cm ²)	$\log \kappa_0/P_e$ (cm ² /g per dyne/cm ²)	x (km)
Solar model, $S_0 = 1.0$, $\log g = 4.438$ cm/s ²					
-4.0	4310	2.87	-1.16	-1.22	-509
-3.8	4325	3.03	-1.02	-1.23	-476
-3.6	4345	3.17	-0.88	-1.24	-448
-3.4	4370	3.29	-0.74	-1.25	-422
-3.2	4405	3.41	-0.60	-1.26	-397
-3.0	4445	3.52	-0.46	-1.27	-373
-2.8	4488	3.64	-0.32	-1.28	-349
-2.6	4524	3.75	-0.18	-1.29	-325
-2.4	4561	3.86	-0.04	-1.33	-301
-2.2	4608	3.97	0.10	-1.35	-277
-2.0	4660	4.08	0.22	-1.37	-252
-1.8	4720	4.19	0.34	-1.40	-228
-1.6	4800	4.30	0.47	-1.43	-203
-1.4	4878	4.41	0.61	-1.46	-177
-1.2	4995	4.52	0.76	-1.50	-151
-1.0	5132	4.63	0.93	-1.55	-124
-0.8	5294	4.74	1.15	-1.60	-97
-0.6	5490	4.85	1.43	-1.66	-70
-0.4	5733	4.95	1.78	-1.73	-43
-0.2	6043	5.03	2.18	-1.81	-19
0.0	6429	5.10	2.59	-1.91	0
0.2	6904	5.15	2.92	-2.01	15
0.4	7467	5.18	3.16	-2.11	27
0.6	7962	5.21	3.32	-2.18	37
0.8	8358	5.23	3.42	-2.23	46
1.0	8630	5.26		-2.25	56
1.2	8811	5.29		-2.27	68

Cinza:

$$T^4 = \frac{3}{4} T_e^4 \left(\tau_v + \frac{2}{3} \right)$$

$$T_e(\text{Sol}) = 5777 \text{ K}$$

Escurecimento do limbo

Primeiro, resolveremos a equação de transferência radiativa:

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = I_\lambda - S_\lambda$$

Para resolver a equação, multiplicamos por $e^{-\tau_\lambda}$:

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} e^{-\tau_\lambda} - I_\lambda e^{-\tau_\lambda} = -S_\lambda e^{-\tau_\lambda}$$

$$\frac{d}{d\tau_\lambda} (e^{-\tau_\lambda} I_\lambda) = -S_\lambda e^{-\tau_\lambda}$$

$$d(e^{-\tau_\lambda} I_\lambda) = -S_\lambda e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda$$

$$d(e^{-\tau_\lambda} I_\lambda) = -S_\lambda e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda$$

$\tau_\lambda = 0$ where $I_\lambda = I_\lambda(0)$ $I_\lambda(0)$ é a intensidade emergente no topo da fotosfera

$$\left[e^{-\tau_\lambda} I_\lambda \right]_{\tau_{\lambda,0} \text{ where } I_\lambda = I_{\lambda,0}}^{\tau_\lambda = 0 \text{ where } I_\lambda = I_\lambda(0)} = - \int_{\tau_{\lambda,0}}^0 S_\lambda e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda$$

$$e^{-0} I_\lambda(0) - e^{-\tau_{\lambda,0}} I_{\lambda,0} = - \int_{\tau_{\lambda,0}}^0 S_\lambda e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda$$

$$I_\lambda(0) = I_{\lambda,0} e^{-\tau_{\lambda,0}} - \int_{\tau_{\lambda,0}}^0 S_\lambda e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda$$

Intensidade emergente no topo da fotosfera, $I_\lambda(0)$:

$$I_\lambda(0) = I_{\lambda,0}e^{-\tau_{\lambda,0}} - \int_{\tau_{\lambda,0}}^0 S_\lambda e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda$$

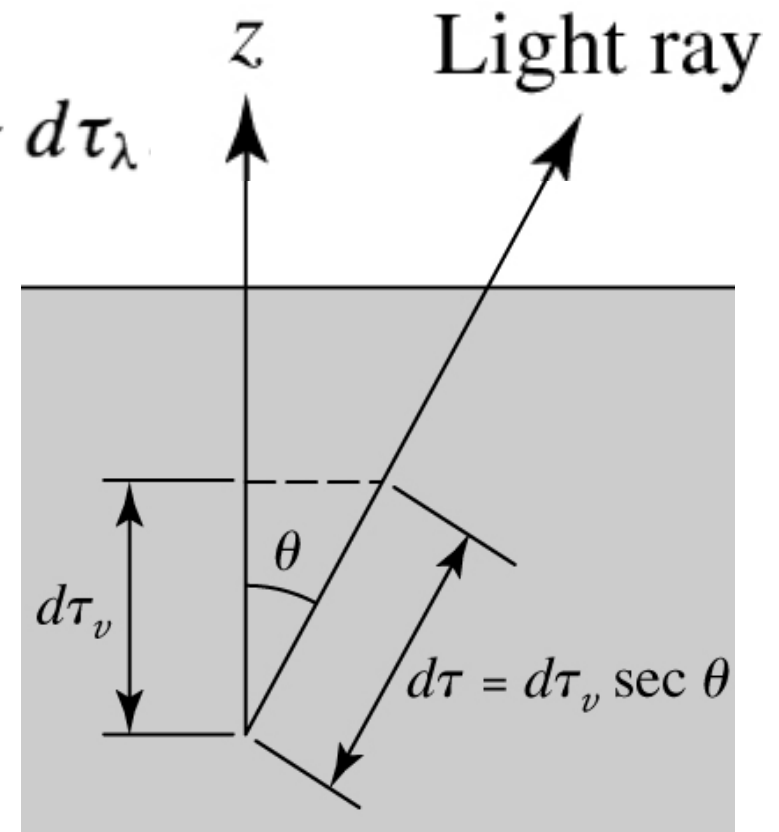
Intensidade inicial $I_{\lambda,0}$
diminuída pela absorção
ao longo do caminho até a
superfície

Emissão atenuada pela
absorção entre o ponto
de emissão e a superfície

O segundo termo é negativo (pois τ diminui na
direção da superfície). Como temos um sinal
negativo $\rightarrow$ contribuição positiva para $I_\lambda(0)$

$$I_{\lambda}(0) = I_{\lambda,0}e^{-\tau_{\lambda,0}} - \int_{\tau_{\lambda,0}}^0 S_{\lambda}e^{-\tau_{\lambda}} d\tau_{\lambda}$$

Para estudar a variação centro-limbo, podemos usar a profundidade óptica vertical (trocar τ_{λ} com $\tau_{\lambda,v} \sec \theta$):



$$I(0) = I_0e^{-\tau_{v,0} \sec \theta} - \int_{\tau_{v,0} \sec \theta}^0 S \sec \theta e^{-\tau_v \sec \theta} d\tau_v$$

I e τ dependem de λ , porem para simplificar a notação vamos ignorar o índice λ . Ou seja, **não é atmosfera cinza**, apenas estamos simplificando a notação

Escurecimento do limbo

$$I(0) = I_0 e^{-\tau_{v,0} \sec \theta} - \int_{\tau_{v,0} \sec \theta}^0 S \sec \theta e^{-\tau_v \sec \theta} d\tau_v$$

Para incluir contribuições de todas as camadas, a profundidade óptica inicial é $\tau_{v,0} = \infty \rightarrow$ 1o termo é zero

→ A intensidade na superfície é:

$$I(0) = \int_0^{\infty} S \sec \theta e^{-\tau_v \sec \theta} d\tau_v$$

Não sabemos a forma exata da função fonte S , porem uma boa aproximação é: $S = a + b\tau_v$

→ $I_{\lambda}(0) = a_{\lambda} + b_{\lambda} \cos \theta$

Escurecimento do limbo

A intensidade na superfície é:

$$I_{\lambda}(0) = a_{\lambda} + b_{\lambda} \cos \theta$$

Podemos usar observações cuidadosas da variação da intensidade centro-limbo para determinar os coeficientes a_{λ} , b_{λ} .

Por exemplo, para 501 nm, temos
 $a_{501} = 1,04 \times 10^{13} \text{ W m}^{-3} \text{ sr}^{-1}$,
 $b_{501} = 3,52 \times 10^{13} \text{ W m}^{-3} \text{ sr}^{-1}$

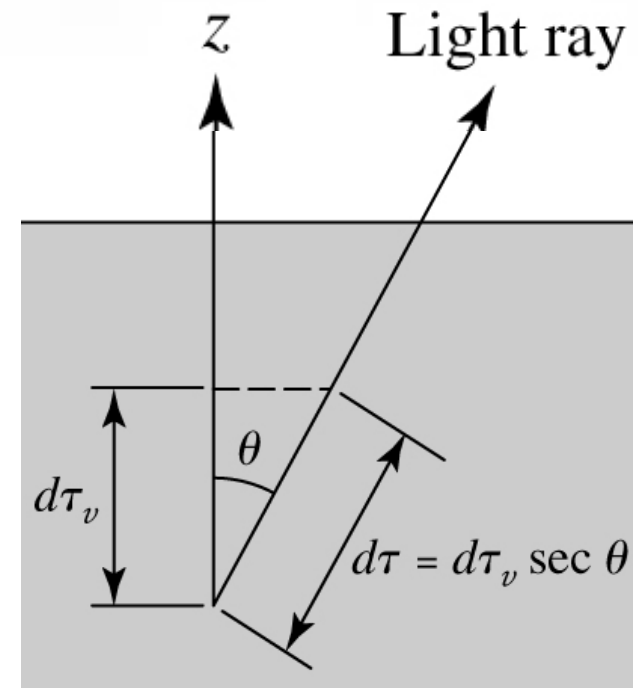


Example 9.4.2. Solar limb darkening provides an opportunity to test the accuracy of our “plane-parallel gray atmosphere in LTE using the Eddington approximation.” In the preceding discussion of an equilibrium gray atmosphere, it was found that the mean intensity is equal to the source function, $\langle I \rangle = S$

$$S = \langle I \rangle = \frac{\sigma T^4}{\pi} = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4 \left(\tau_v + \frac{2}{3} \right)$$

Considerando: $S = a + b\tau_v$

$$a = \frac{\sigma}{2\pi} T_e^4 \quad b = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4$$



A variação
centro-limbo: $\frac{I(\theta)}{I(\theta = 0)} = \frac{a + b \cos \theta}{a + b} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cos \theta$



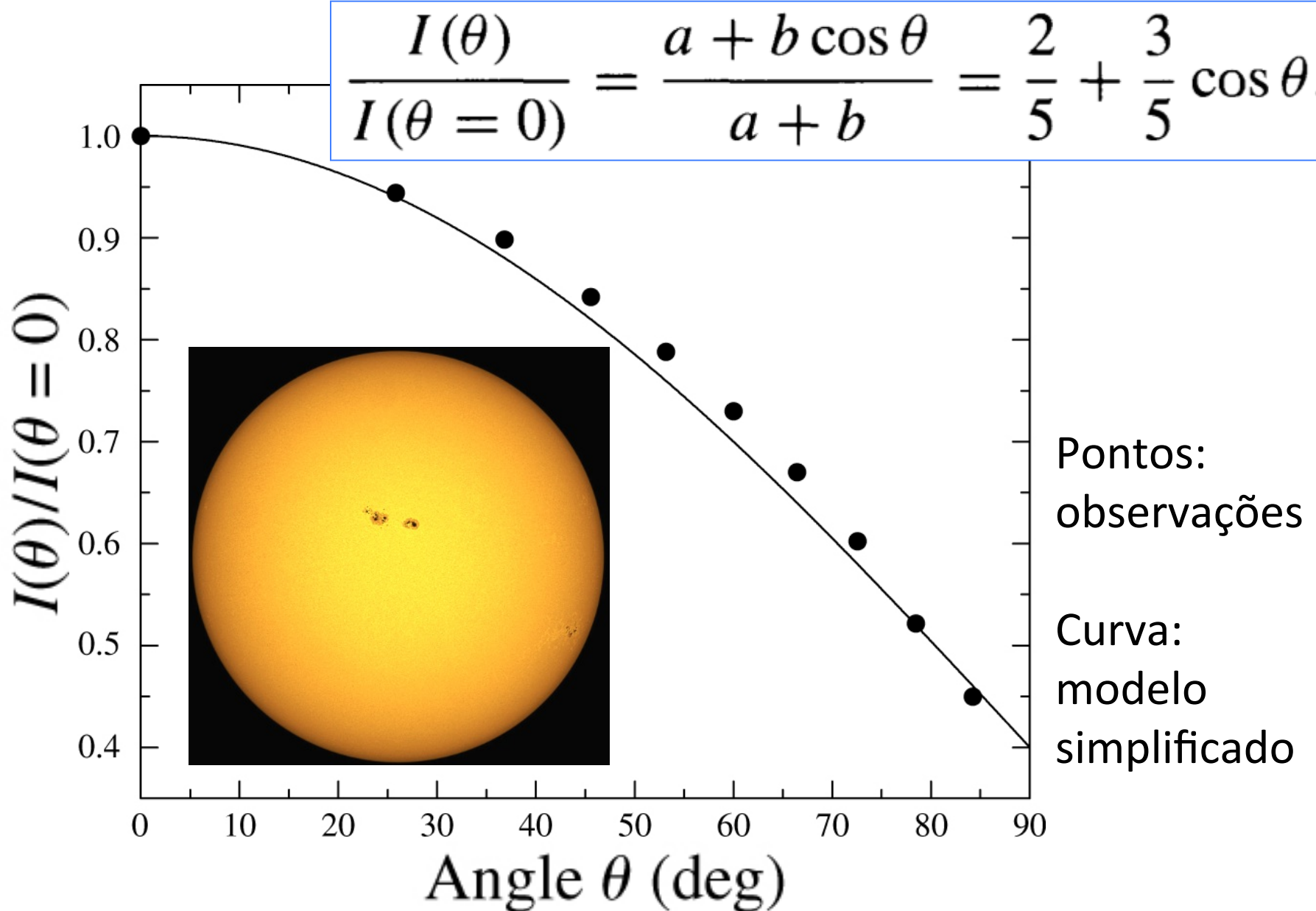


FIGURE 9.17 A theoretical Eddington approximation of solar limb darkening for light integrated over all wavelengths. The dots are observational data for the Sun. Although a good fit, the Eddington approximation is not perfect, which implies that a more detailed model must be developed; see, for example, Problem 9.29.