

# Camada limite laminar

J. L. Baliño

Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

Apostila de aula  
2017, v. 1



# Sumário

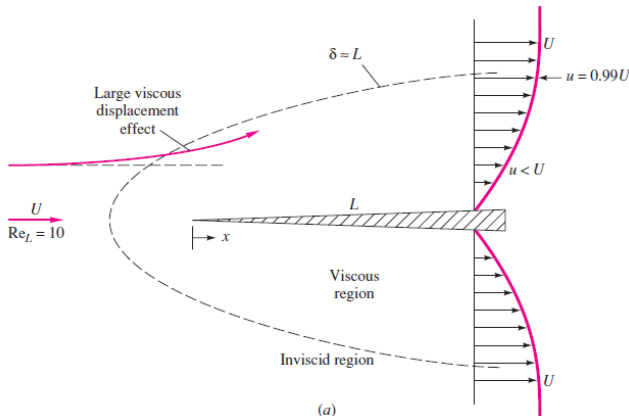
**1** Introdução

**2** Equações da camada limite laminar

**3** Solução de Blasius

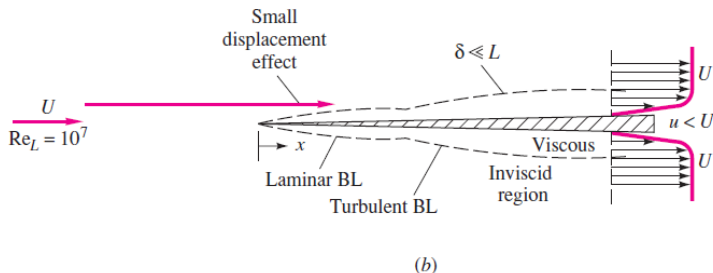


# Escoamento externo em uma placa plana (baixo $Re$ )



Região viscosa é ampla e se estende a montante e para os lados.

# Escoamento externo em uma placa plana (alto $Re$ )



Região viscosa é muito delgada (camada limite):

$$\frac{\delta}{x} = \begin{cases} \frac{5,0}{Re_x^{1/2}} \Rightarrow \delta = 5,0 \nu^{1/2} U^{-1/2} x^{1/2} & 10^3 < Re_x < 10^6 \quad (\text{laminar}) \\ \frac{0,16}{Re_x^{1/7}} \Rightarrow \delta = 0,16 \nu^{1/7} U^{-1/7} x^{6/7} & Re_x > 10^6 \quad (\text{turbulento}) \end{cases}$$

| $Re_x$                     | $10^4$ | $10^5$ | $10^6$ | $10^7$ | $10^8$ |
|----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $(\delta/x)_{\text{lam}}$  | 0.050  | 0.016  | 0.005  |        |        |
| $(\delta/x)_{\text{turb}}$ |        |        | 0.022  | 0.016  | 0.011  |



# Conceitos fundamentais

Podemos definir a camada limite como a região do escoamento próximo a uma parede, na qual os efeitos viscosos são apreciáveis.

Em um escoamento de alto número de Reynolds, podem ser identificadas duas regiões: uma região externa, na qual o escoamento é aproximadamente irrotacional, e uma região muito próxima às paredes sólidas, na qual o escoamento é rotacional (ou com efeitos viscosos, ou com vorticidade).

A viscosidade age através da condição de não escorregamento, difundindo o momento (freando as partículas de fluido) em um efeito que compete com a convecção de momento na direção de movimento.

Do ponto de vista da vorticidade, uma partícula inicialmente irrotacional (na corrente livre) adquire vorticidade através do termo de difusão  $\nu \nabla^2 \omega$  na equação de Helmholtz; a espessura  $\delta$  da camada limite em função da posição fica determinada como um balanço entre difusão e convecção de vorticidade.

Se  $L$  é um comprimento característico do corpo, resulta  $\delta \ll L$ .



# Equacionamento

Consideramos um escoamento bidimensional, estacionário, incompressível e sem forças de volume em uma parede plana (ou com uma curvatura pequena).

Devido à diferença de comprimentos característicos na direção de movimento  $x$  e na direção perpendicular  $y$  (de camada limite de espessura  $\delta$ ) alguns termos podem ser desprezados nas equações de movimento.

Fazemos uma análise de ordens de grandeza nas equações de movimento.

Da equação de continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U}{x} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{v}{\delta} \Rightarrow \frac{U}{x} \sim \frac{v}{\delta} \Rightarrow \frac{v}{U} \sim \frac{\delta}{x}$$

Como  $\frac{\delta}{x} \ll 1$ , resulta  $v \ll u \sim U$ .



# Equacionamento

Da equação de N-S na direção  $x$ :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U^2}{x} ; \quad v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U v}{\delta} \sim \frac{U^2}{x} ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{U}{x^2} \sim \frac{U}{\delta^2} \left( \frac{\delta}{x} \right)^2 ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{U}{\delta^2}$$

Daqui resulta  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . Como na camada limite os termos de inércia e viscosos têm a mesma ordem de grandeza, resulta  $\frac{U^2}{x} \sim \nu \frac{U}{\delta^2}$ , da onde

$$\frac{\delta}{x} \sim \left( \frac{\nu}{U x} \right)^{1/2} = \frac{1}{Re_x^{1/2}} \Rightarrow \delta \sim \left( \frac{\nu x}{U} \right)^{1/2}$$

onde  $Re_x = \frac{U x}{\nu}$ .



# Equacionamento

Da equação de N-S na direção  $y$ :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{U v}{x} \sim \frac{U^2}{x} \frac{\delta}{x} ; \quad v \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{v^2}{\delta} \sim \frac{U^2}{x} \frac{\delta}{x} ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \frac{v}{x^2} \sim \frac{U}{\delta^2} \left( \frac{\delta}{x} \right)^3$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{U}{\delta^2} \frac{\delta}{x}$$

A equação na direção  $y$  é de uma ordem de grandeza menor que a equação na direção  $x$ ; daí resulta  $\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}$ , isto é,  $p = p(x)$ .



# Equacionamento

As equações da camada limite resultam, finalmente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Resultam duas equações com as incógnitas ( $u$ ,  $v$ ) onde devemos conhecer a função externa  $\frac{dp}{dx}$  para achar a solução.

Conhecido o escoamento fora da camada limite, onde é irrotacional, podemos aplicar a equação de Bernoulli:

$$p(x) + \frac{1}{2} \rho U^2(x) = \text{const} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}$$



# Separação

A solução das equações da camada limite depende da função  $\frac{dp}{dx}$ , que liga a camada limite com o escoamento externo irrotacional. Sem resolver as equações, podemos obter informação preliminar acerca da forma do perfil de velocidade. Na parede,  $u = v = 0$  e podemos escrever a equação de momento da camada limite como:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_{y=0}$$

onde  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$  é a tensão de cisalhamento. Daqui resultam:

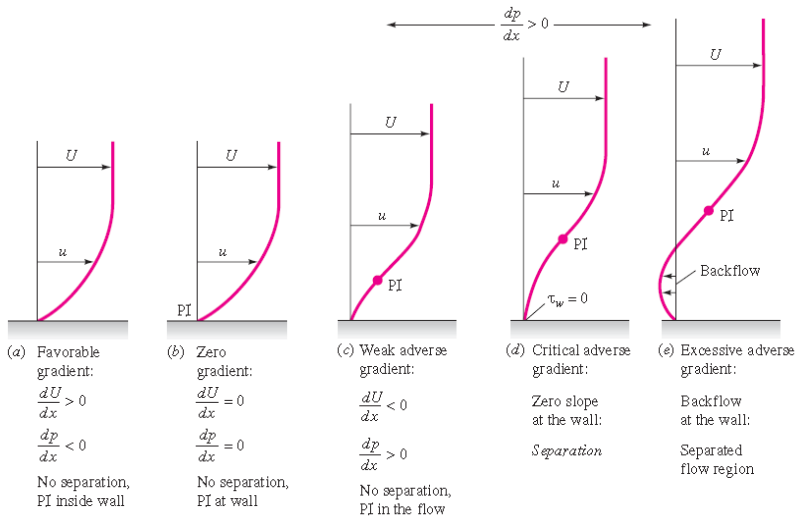
$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\tau_w}{\mu} ; \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

Na borda da camada limite ( $y = \delta$ ) a velocidade é a da corrente livre, a tensão de cisalhamento é desprezível e o perfil de velocidade é suave, resultando:

$$u(y = \delta) \approx U ; \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} \approx 0 ; \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=\delta} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_{y=\delta} \approx 0$$



# Separação



# Separação

Para  $\frac{dp}{dx} < 0$  (gradiente favorável de pressão) o raio de curvatura não troca de sinal e não existe separação.

Para  $\frac{dp}{dx} = 0$  o ponto de inflexão (PI) se localiza na parede.

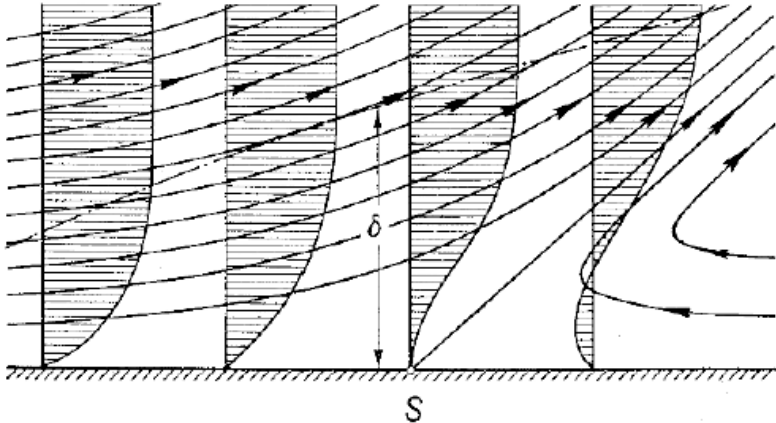
Para  $\frac{dp}{dx} > 0$  (gradiente desfavorável de pressão) o PI se desloca para o interior da camada limite e o raio de curvatura troca de sinal. Enquanto  $\tau_w > 0$  não existe separação.

Para a condição  $\tau_w = 0$  é definido o gradiente de pressão crítico  $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{crit}$ .

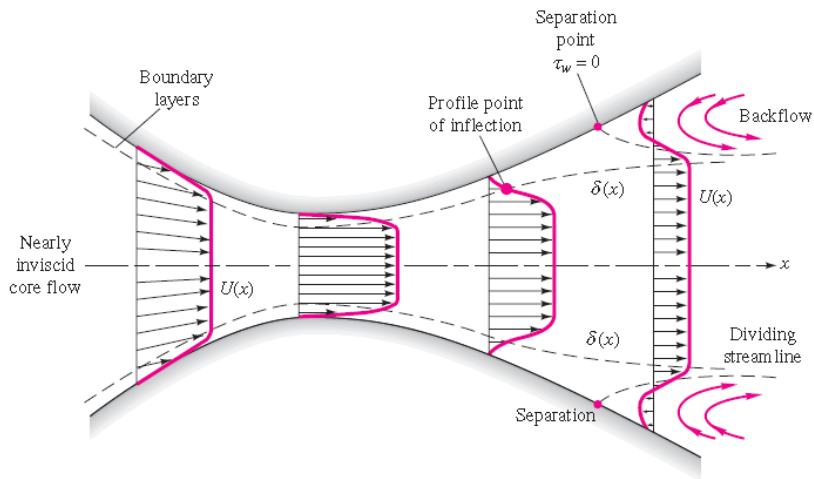
Para  $\frac{dp}{dx} > \left(\frac{dp}{dx}\right)_{crit}$  acontece a separação da camada limite e a recirculação do escoamento. As aproximações feitas nas equações da camada limite não são mais válidas.



# Separação



# Separação



# Solução de autosemelhança

No seu doutorado, Paul Richard Henri Blasius (1908), estudante de Ludwig Prandtl, resolveu a camada limite laminar para  $\frac{dp}{dx} = 0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

com condições de contorno  $u(x, y = 0) = 0$ ,  $v(x, y = 0) = 0$  e  $u(x, y \rightarrow \infty) = U_\infty$ .

O problema não possui nenhum comprimento característico, de maneira que podemos adimensionalizá-lo através de uma variável de autosemelhança, fazendo  $\frac{u}{U_\infty} = \varphi(\eta)$ , onde  $\eta = y \left( \frac{U_\infty}{2\nu x} \right)^{1/2} \sim \frac{y}{\delta(x)}$ .

Introduzindo uma função corrente  $\psi(x, y)$  (componente  $z$  do potencial vector) tal que  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  e  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ , a equação de continuidade é satisfeita automaticamente.



# Solução de autosemelhança

Escolhemos a função corrente seguinte e calculamos os termos na equação de momento:

$$\psi = (2 \nu x U_{\infty})^{1/2} f(\eta)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \left( \frac{U_{\infty}}{2 \nu x} \right)^{1/2} = \frac{\eta}{y} ; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2x} y \left( \frac{U_{\infty}}{2 \nu x} \right)^{1/2} = -\frac{\eta}{2x}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \left( \frac{2 \nu x}{U_{\infty}} \right)^{1/2} U_{\infty} f'(\eta) \frac{\eta}{y} = U_{\infty} f'(\eta)$$

da onde  $\varphi(\eta) = f'(\eta)$ .

$$\begin{aligned} v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\left( \frac{\nu U_{\infty}}{2x} \right)^{1/2} f - (2 \nu x U_{\infty})^{1/2} f' \left( -\frac{\eta}{2x} \right) \\ &= \left( \frac{\nu U_{\infty}}{2x} \right)^{1/2} (\eta f' - f) \end{aligned}$$



# Solução de autosemelhança

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_{\infty} f'' \left( -\frac{\eta}{2x} \right) = -\frac{U_{\infty} \eta}{2x} f''$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_{\infty} f'' \frac{\eta}{y} = \frac{U_{\infty} \eta}{y} f''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_{\infty} \left( f''' \frac{\eta}{y} \frac{\eta}{y} - f'' \frac{\eta}{y^2} + f'' \frac{1}{y} \frac{\eta}{y} \right) = \frac{U_{\infty} \eta^2}{y^2} f'''$$

Substituindo, obtemos:

$$-U_{\infty} f' \frac{U_{\infty} \eta}{2x} f'' + \left( \frac{\nu U_{\infty}}{2x} \right)^{1/2} (\eta f' - f) \frac{U_{\infty} \eta}{y} f'' = \nu \frac{U_{\infty} \eta^2}{y^2} f'''$$

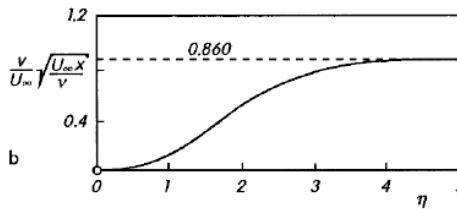
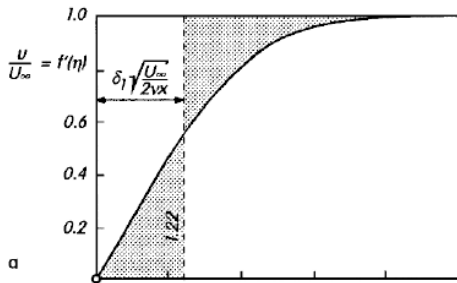
$$f''' + f f'' = 0$$

Transformamos uma EDP (segunda ordem em  $u$ , primeira ordem em  $\nu$ ) em uma EDO, aumentando a ordem (terceira ordem em  $f$ ). As condições de contorno são:  $f'(0) = 0, f(0) = 0, f(\eta \rightarrow \infty) = 1$ .

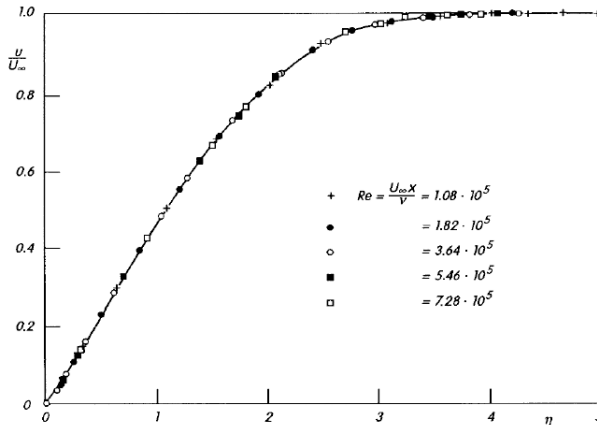


# Solução numérica

| $\eta$ | $f(\eta)$ | $f'(\eta)$ | $f''(\eta)$ |
|--------|-----------|------------|-------------|
| 0.0    | 0.0       | 0.0        | 0.46960     |
| 0.1    | 0.00235   | 0.04696    | 0.46956     |
| 0.2    | 0.00939   | 0.09391    | 0.46931     |
| 0.3    | 0.02113   | 0.14081    | 0.46861     |
| 0.4    | 0.03755   | 0.18761    | 0.46725     |
| 0.5    | 0.05864   | 0.23423    | 0.46503     |
| 0.6    | 0.08439   | 0.28058    | 0.46173     |
| 0.7    | 0.11474   | 0.32653    | 0.45718     |
| 0.8    | 0.14967   | 0.37196    | 0.45119     |
| 0.9    | 0.18911   | 0.41672    | 0.44363     |
| 1.0    | 0.23299   | 0.46063    | 0.43438     |
| 1.1    | 0.28121   | 0.50354    | 0.42337     |
| 1.2    | 0.33366   | 0.54525    | 0.41057     |
| 1.3    | 0.39021   | 0.58559    | 0.39598     |
| 1.4    | 0.45072   | 0.62439    | 0.37969     |
| 1.5    | 0.51503   | 0.66147    | 0.36180     |
| 1.6    | 0.58296   | 0.69670    | 0.34249     |
| 1.7    | 0.65430   | 0.72993    | 0.32195     |
| 1.8    | 0.72887   | 0.76106    | 0.30045     |
| 1.9    | 0.80644   | 0.79000    | 0.27825     |
| 2.0    | 0.88680   | 0.81669    | 0.25567     |
| 2.2    | 1.05495   | 0.86330    | 0.21058     |
| 2.4    | 1.23153   | 0.90107    | 0.16756     |
| 2.6    | 1.41482   | 0.93060    | 0.12861     |
| 2.8    | 1.60328   | 0.95288    | 0.09511     |
| 3.0    | 1.79557   | 0.96905    | 0.06771     |
| 3.2    | 1.99058   | 0.98037    | 0.04637     |
| 3.4    | 2.18747   | 0.98797    | 0.03054     |
| 3.6    | 2.38559   | 0.99289    | 0.01933     |
| 3.8    | 2.58450   | 0.99594    | 0.01176     |
| 4.0    | 2.78388   | 0.99777    | 0.00687     |
| 4.2    | 2.98355   | 0.99882    | 0.00386     |
| 4.4    | 3.18338   | 0.99940    | 0.00208     |
| 4.6    | 3.38329   | 0.99970    | 0.00108     |
| 4.8    | 3.58325   | 0.99986    | 0.00054     |
| 5.0    | 3.78323   | 0.99994    | 0.00026     |
| 5.2    | 3.98322   | 0.999971   | 0.000119    |
| 5.4    | 4.18322   | 0.999988   | 0.000052    |
| 5.6    | 4.38322   | 0.999995   | 0.000022    |
| 5.8    | 4.58322   | 0.999998   | 0.000009    |
| 6.0    | 4.78322   | 0.999999   | 0.000003    |



# Comparação com dados experimentais



A camada limite transiciona a turbulência para  $Re_x \approx 5 \times 10^5 - 10^6$ .



# Espessura da camada limite

Definindo a espessura da camada limite  $\delta$  como a posição vertical onde  $\frac{u}{U_\infty} = 0,99 = f'(\eta_{99})$ , resulta da solução numérica  $\eta_{99} \approx 3,6$ :

$$\eta_{99} = \delta \left( \frac{U_\infty}{2\nu x} \right)^{1/2} \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{2^{1/2} \eta_{99}}{Re_x^{1/2}} = \frac{5,0}{Re_x^{1/2}}$$

Uma consequência importante da solução é que a componente vertical da velocidade não se anula quando nos afastamos da placa. O aumento da espessura da camada limite provoca um deslocamento das partículas na direção vertical:

$$\frac{v}{U_\infty} = \frac{\eta f' - f}{2^{1/2} Re_x^{1/2}}$$

Para  $\eta \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta f' - f) = 1,2168$ ; daqui resulta:

$$\frac{v_\infty}{U_\infty} = \frac{0,8604}{Re_x^{1/2}}$$



# Tensão de cisalhamento

A tensão de cisalhamento resulta:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \nu U_{\infty} \left( \frac{U_{\infty}}{2 \nu x} \right)^{1/2} f'' = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 \frac{2^{1/2} f''}{Re_x^{1/2}}$$

Definindo o coeficiente de atrito de filme  $c_f$  e sabendo que  $f''(0) = 0,4696$ , resulta:

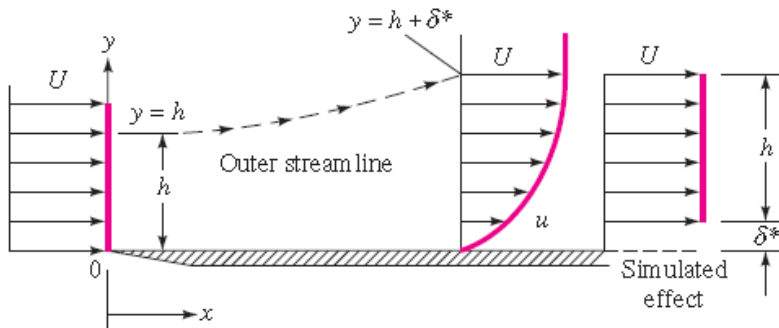
$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} = \frac{2^{1/2} f''(0)}{Re_x^{1/2}} = \frac{0,664}{Re_x^{1/2}}$$

O coeficiente de arrasto resulta:

$$C_D = \frac{\int_0^L \tau_w dx}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 L} = \frac{1}{L} \int_0^L c_f dx = 2 c_f(L) = \frac{1,328}{Re_L^{1/2}}$$



# Espessura de deslocamento



# Espessura de deslocamento

Definimos a espessura de deslocamento  $\delta^* (x)$  como a distância vertical em que é deslocada uma linha de corrente devido à formação da camada limite. Se  $h (x)$  é a distância vertical na corrente livre da partícula que atinge a borda da camada limite na posição  $x$ , resulta por definição:

$$h (x) + \delta^* (x) = \delta (x)$$

Da conservação da massa, resulta:

$$U_{\infty} h = U_{\infty} (\delta - \delta^*) = \int_0^{\delta} u \, dy \Rightarrow \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy$$

Da solução de Blasius, resulta:

$$\delta^* = \left(\frac{2 \nu x}{U_{\infty}}\right)^{1/2} \int_0^{\eta_{99}} (1 - f') \, d\eta = \left(\frac{2 \nu x}{U_{\infty}}\right)^{1/2} (\eta - f)|_0^{\eta_{99}}$$

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{2^{1/2} [\eta_{99} - f(\eta_{99})]}{Re_x^{1/2}} = \frac{1,7208}{Re_x^{1/2}}$$



# Espessura de momento

Definimos a espessura de momento  $\theta(x)$  como a distância proporcional à perda de fluxo de momento na camada limite. Considerando o mesmo volume de controle que na espessura de deslocamento, temos:

$$U_{\infty} h = \int_0^{\delta} u \, dy \Rightarrow h = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_{\infty}} \, dy$$

Da definição da espessura de momento:

$$U_{\infty}^2 h = \int_0^{\delta} u^2 \, dy + U_{\infty}^2 \theta \Rightarrow \theta = h - \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{U_{\infty}} \right)^2 \, dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_{\infty}} \left( 1 - \frac{u}{U_{\infty}} \right) \, dy$$

Da solução de Blasius, resulta:

$$\theta = \left( \frac{2 \nu x}{U_{\infty}} \right)^{1/2} \int_0^{\eta_{99}} f' (1 - f') \, d\eta$$

$$\frac{\theta}{x} = \frac{2^{1/2} \int_0^{\eta_{99}} f' (1 - f') \, d\eta}{Re_x^{1/2}} = \frac{0,664}{Re_x^{1/2}}$$

