Interiores Estelares

Marília Carlos

AGA 293 – Astrofísica Estelar
Prof. Jorge Meléndez

26 de abril de 2017

Interiores Estelares

- Equilíbrio hidrostático
- Equação de estado da pressão
- Fontes de energia
- Transporte de energia
- A Sequência Principal

Interiores Estelares

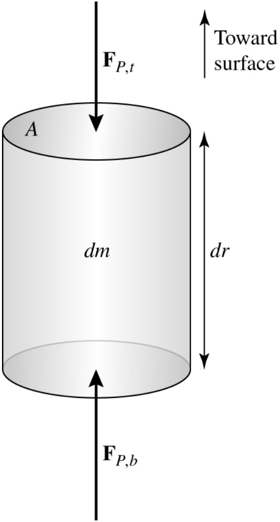
- Nas últimas aulas vários detalhes de espectros estelares foram discutidos:
  $\rightarrow$ também os princípios físicos básicos por de traz da produção de linhas.
  $\rightarrow$ a análise desses dados permite que astrônomos determinem algumas quantidades relacionadas às camadas mais externas das estrelas como, p. ex., temperatura efetiva, luminosidade e composição.

- No entanto, com algumas exceções (observação de neutrinos no Sol e Supernova 1987A), não há observações diretas de regiões centrais de estrelas.

Determinando a estrutura interna das estrelas

- Modelos computacionais consistentes com as leis da física e que concordem com dados observados.
- Maior parte da fundamentação teórica de estrutura estelar foi desenvolvida antes dos anos 1950.
- Somente depois dos anos 1960 foram criados computadores que conseguissem produzir os cálculos desses modelos.
- HOJE: A solução de problemas sobre o interior estelar precisa de mais detalhes teóricos e entendimento dos processos físicos no interior estelar combinados com computadores ainda mais poderosos!

Equação de Equilíbrio Hidrostático



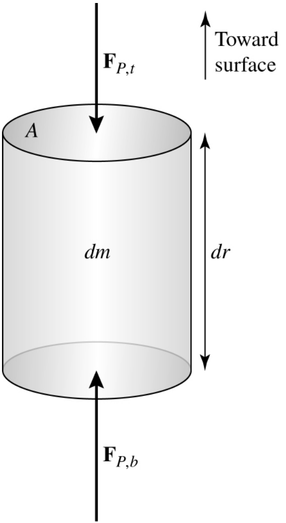
Considere um cilindro de massa dm, de altura dr e a área da base e topo igual a A. Assumindo que as únicas forças atuando nesse cilindro são a gravidade e pressão, temos:

$$dm\frac{d^2r}{dt^2} = F_g + F_{P,t} + F_{P,b} \qquad (1)$$

Usando **F**=m**a**. Onde:

$F_g < 0$ é a força gravitacional em direção ao centro da estrela e
$F_{P,t}$ e $F_{P,b}$ são as pressões no topo e base do cilindro, respectivamente.

Equação de Equilíbrio Hidrostático



$\Rightarrow F_{P,t} < 0$, $F_{P,b} > 0$

$$F_{P,t} = -(F_{P,b} + dF_P) \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$dm\frac{d^2r}{dt^2} = F_g - dF_P \tag{3}$$

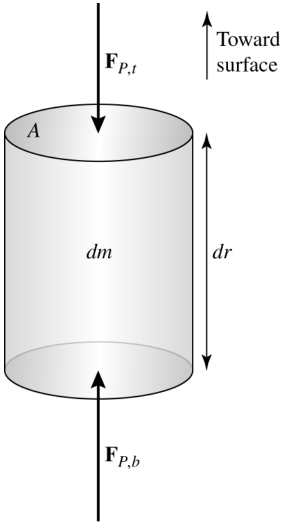
Mas sabendo que:

$$F_g = -G\frac{M_r dm}{r^2} \tag{4}$$

Onde M_r é a massa contida em uma esfera de raio r. E:

$$dF_P = AdP \rightarrow P \equiv \frac{F}{A} \tag{5}$$

Equação de Equilíbrio Hidrostático



Substituindo as equações (4) e (5) em (3):

$$dm\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M_r dm}{r^2} - AdP \qquad (6)$$

Se o cilindro de gás tem densidade ρ, então:

$$dm = \rho Adr \qquad (7)$$

onde Adr é o volume do cilindro.
Substituindo (7) em (6):

$$\rho Adr\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M_r\rho Adr}{r^2} - AdP \qquad (8)$$

Dividindo a equação (8) pelo volume do cilindro, temos:

$$\rho\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M_r\rho}{r^2} - \frac{dP}{dr} \qquad (9)$$

Equação de Equilíbrio Hidrostático

Se assumirmos que a estrela é estática, ou seja, com aceleração $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$, então:

Equação de Equilíbrio hidrostático

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2} = -\rho g \rightarrow g \equiv \frac{GM_r}{r^2} \tag{10}$$

$\Rightarrow$ Essa equação indica que para uma estrela permanecer estática, deve existir um gradiente de pressão para contrabalancear a força da gravidade.

Exemplo

$\Rightarrow$ Estime a pressão no centro do Sol considerando $M_r = 1M_\odot$, $r = 1R_\odot$ e $\rho = \overline{\rho}_\odot = 1410\,\mathrm{Kg\,m^{-3}}$. Com a pressão na superfície igual a zero.
Resposta:

Usando a aproximação $\frac{dP}{dr} \sim \frac{P_S - P_C}{R_S - 0} \sim -\frac{P_C}{R_\odot}$. Com $P_S \rightarrow$ a pressão na superfície da estrela, $P_C \rightarrow$ a pressão no centro da estrela e $R_S \rightarrow$ o raio na superfície da estrela.
Então:

$$-\frac{P_C}{R_\odot} \sim -G\frac{M_\odot \overline{\rho}_\odot}{R_\odot^2} \rightarrow P_C \sim 2.7 \times 10^{14}\ \mathrm{N\,m^{-2}} \tag{11}$$

Exemplo

Para valores mais acurados, devemos integrar a Equação de Equilíbrio Hidrostático do centro a superfície da estrela, levando-se em consideração a variação da massa M_r em cada ponto da estrela, junto com a variação de sua densidade com o raio $\rho_r \equiv \rho(r)$:

$$\int_{P_S}^{P_C} dP = P_C = -\int_{R_S}^{R_C} \frac{GM_r\rho}{r^2} dr \tag{12}$$

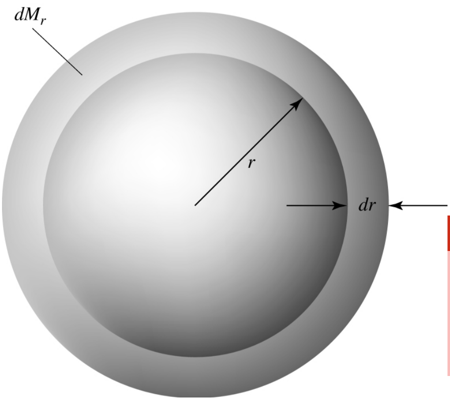
Exemplo

Para um cálculo mais rigoroso, um modelo estelar nos dá uma pressão central no Sol de aproximadamente 2.34×10^{16} N m^{-2}.

$\rightarrow$ Valor muito maior que o obtido com a aproximação feita anteriormente.

$\rightarrow$ Isso ocorre devido ao aumento da densidade perto do centro do Sol.

Equação de Conservação de Massa



$\rightarrow$ Considerando novamente uma estrela esférica e simétrica, com uma camada de massa dM_r e espessura dr, a uma distância r do centro.
$\rightarrow$ Com uma camada suficientemente fina ($dr \ll r$).
$\rightarrow$ O volume dessa camada será aproximadamente $dV = 4\pi r^2 dr$. Se a densidade local é ρ, então:

Equação de Conservação de Massa

$$dM_r = \rho(4\pi r^2 dr) \rightarrow \frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (13)$$

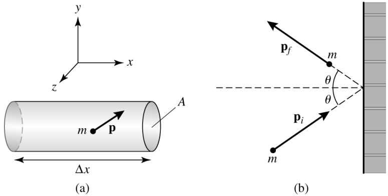
Equação de Estado da Pressão

$\rightarrow$ Até esse ponto da aula nenhuma informação sobre a origem da pressão foi dada.

$\rightarrow$ Para descrever a manifestação macroscópica da interação de partículas é necessário derivarmos a Equação de Estado da Pressão do material.

$\rightarrow$ A equação de estado relaciona a dependência da pressão com outros parâmetros fundamentais do material (ex. volume, temperatua e etc.).

Derivando a integral da pressão

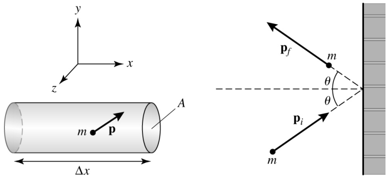


Considerando um cilindro de gás, com partículas pontuais de massa m, de comprimento Δx e com área de seção transversal igual a A. → As partículas interagem somente através de colisões elásticas.

→ Para determinarmos a pressão exercida nas paredes do cilindro podemos examinar o resultado do impacto de uma partícula individual em uma das paredes do cilindro.

→ Para uma colisão elástica, o ângulo de reflexão deve ser igual ao ângulo de incidência. Ou seja, a mudança de momento da partícula está inteiramente na direção x, normal à superfície.

Derivando a integral da pressão



(a) (b)

$\rightarrow$ Da segunda ($\mathbf{f} = m\mathbf{a} = d\mathbf{p}/dt$) e terceira leis de Newton, o impulso $\mathbf{f}\Delta t$ na parede do cilindro é dado por:

$$\mathbf{f}\Delta t = -\Delta\mathbf{p} = 2p_x\widehat{\mathbf{i}} \tag{14}$$

Se o intervalo de tempo entre colisões é $\Delta t = 2\frac{\Delta_x}{v_x}$, então a força média exercida na parede do cilindro por um intervalo de tempo é dada por:

$$f = \frac{2p_x}{\Delta t} = \frac{p_x v_x}{\Delta x} \tag{15}$$

$\rightarrow p_x \propto v_x$, onde $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ e $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = v^2/3$ sendo a probabilidade do movimento da partícula em cada direção. Então se substituirmos $p_x v_x$ por $\frac{1}{3}pv$, teremos a força média por partícula de momento p:

$$f(p) = \frac{1}{3}\frac{pv}{\Delta x} \tag{16}$$

Derivando a integral da pressão

Sabendo que o número de partículas com momento entre p e $p + dp$ é dado pela expressão $N_p dp$, então o número total de partículas no cilindro será:

$$N = \int_0^\infty N_p dp \qquad (17)$$

A contribuição para a força total, $dF(p)$, de todas as partículas nesse intervalo de momento é dada por:

$$dF(p) = f(p) N_p dp = \frac{1}{3} \frac{N_p}{\Delta x} pvdp \qquad (18)$$

Integrando em todos os valores possíveis de momento, a força total exercida por colisões de partículas será:

$$F = \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{N_p}{\Delta x} pvdp \qquad (19)$$

Dividindo os dois lados da equação (19) pela área da parede A, teremos então a pressão $P = F/A$.

$\Rightarrow$ Podemos definir $n_p dp$ como o número de partículas por unidade de volume com momento entre p e $p + dp$.

$$\Rightarrow n_p dp \equiv \frac{N_p}{\Delta V} dp \to \Delta V = A \Delta x \qquad (20)$$

Substituindo (20) na expressão anteior:

Integral da pressão

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty n_p pvdp \qquad (21)$$

Equação de Estado da Pressão para um Gás Ideal

Exercício para casa: Derive a lei dos gases ideais ($P_g = \frac{N}{V}kT$) à partir da equação (21).

Peso molecular médio

Dada a massa média de um gás de partículas $\overline{m}$ e a massa do hidrogênio $m_H = 1.673532499 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, definimos o peso molecular médio como:

$$\mu \equiv \frac{\overline{m}}{m_H} \tag{22}$$

Ou seja, o peso molecular médio é massa média de uma partícula livre em um gás, em unidades de massa do hidrogênio.

$\rightarrow$ O peso molecular médio depende da composição química do gás, tão como do estado de ionização de cada espécie.

$\Rightarrow$ Para um gás neutro:

$$\mu_n = \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j} \tag{23}$$

Onde N_j é o número de átomos do tipo j e $A_j \equiv m_j/m_H$.

$\Rightarrow$ De forma similar, para o gás ionizado:

$$\mu_i = \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j(1+z_j)} \tag{24}$$

Onde $1 + z_j$ leva em consideração o núcleo mais o número de elétrons livres como resultado da ionização de um átomo do tipo j.

Peso molecular médio

Em termos de fração de massa:

→ Gás neutro:

$$\frac{1}{\mu_n} \simeq X + \frac{1}{4} Y + \left\langle \frac{1}{A} \right\rangle_n Z \tag{25}$$

$\left\langle \frac{1}{A} \right\rangle_n$ é a média ponderada de todos os elementos mais pesados que hélio.

→ analogamente para o gás ionizado:

$$\frac{1}{\mu_i} \simeq 2X + \frac{3}{4} Y + \left\langle \frac{1+z}{A} \right\rangle_i Z \tag{26}$$

→ X é a fração de massa do hidrogênio;
→ Y é a fração de massa do hélio e
→ Z é a fração de massa para todos os elementos mais pesados que o hélio.

Energia Cinética Média por partícula

Igualando a pressão do gás ideal com a equação (21) para um gás de partículas temos:

$$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty n_p p v dp = \frac{1}{3}\int_0^\infty m n_v v^2 dv = nkT \quad (27)$$

Onde $p = mv$ e $n_v dv = n_p dp$ (número de partículas por unidade volume com velocidades entre v e $v + dv$).
Reescrevendo a equação (23):

$$\frac{1}{n}\int_0^\infty n_v v^2 dv = \frac{3kT}{m} \quad (28)$$

Mas $\frac{1}{n}\int_0^\infty n_v v^2 dv = \overline{v^2}$, então:

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m} \rightarrow \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT \quad (29)$$

Assim, a energia cinética média de uma partícula é $\frac{1}{2}kT$ por grau de liberdade.

Estatísticas de Fermi-Dirac e Bose-Einstein

$\rightarrow$ Existem certos ambientes estelares em que a aproximação para um gás ideal não pode ser feita (efeitos de mecânica quântica e relatividade são ignorados na derivação da lei do gás ideal). Por isso temos que considerar estatísitcas que levem isso em conta:

Fermi-Dirac

- Considera o princípio da incerteza de Heisenberg e o princípio de exclusão de Pauli $\rightarrow$ quando aplicada em ambientes de densidade extrema (ex. anã-branca ou estrela de nêutrons) obtemos equação de estado da pressão diferente de resultados obtidos quando usamos a distribuição de Maxwell-Boltzmann.
- Férmions: elétrons, prótons e nêutrons.

Bose-Einstein

- Partículas que não obedecem o princípio de exclusão de Pauli (ex. o fato da partícula estar em um determinado estado de energia aumenta a probabilidade de outras partículas estarem no mesmo estado de energia).
- Bósons: fótons, glúons e bóson de Higgs.

$\rightarrow$ Para o limite de baixas velocidades e densidades, essas funções se tornam indistinguíveis da distribuição clássica de Maxwell-Boltzmann.

Contribuição da Pressão de Radiação

Como fótons possuem momento $p_\gamma = h\nu/c$, eles são capazes de exercer impulso em outras partículas durante a absorção ou reflexão.

Usando $v = c$ e a identidade $n_p dp = n_\nu d\nu$ na expressão (21), temos:

$$P_{rad} = \frac{1}{3}\int_0^\infty h\nu n_\nu d\nu \qquad (30)$$

$\rightarrow$ Para resolver a equação (26) poderíamos usar a distribuição de Bose-Einstein para $n_\nu d\nu$. Mas podemos notar que $u_\nu d\nu = h\nu n_\nu d\nu$.

Então:

$$P_{rad} = \frac{1}{3}\int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{1}{3} a T^4 \qquad (31)$$

onde a é a constante de radiação.

Logo, a pressão total é dada por:

$$P_t = P_g + P_{rad} = \frac{\rho k T}{\mu m_H} + \frac{1}{3} a T^4 \qquad (32)$$