Cinemática da partícula fluida

J. L. Baliño

Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

Apostila de aula
2017, v.1

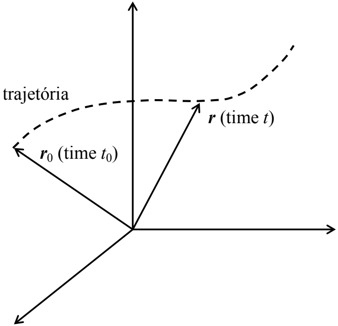
Sumário

1 Descrição do movimento

2 Equação de continuidade

Descrição lagrangiana

Descrição lagrangiana: acompanhando às partículas ou sistemas de partículas. As leis de conservação estão naturalmente enunciadas em uma descrição lagrangiana. Função incógnita: $\boldsymbol{r}\,(t,\,\boldsymbol{r}_0)$, onde $\boldsymbol{r}$ é a posição no tempo t da partícula que esteve em $\boldsymbol{r}_0$ no tempo de referência t_0 (usualmente $t_0 = 0$, a condição inicial).



$$\boldsymbol{V}\,(t,\,\boldsymbol{r}_0) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{r}_0} \quad \text{(velocidade)}$$

$$\boldsymbol{a}\,(t,\,\boldsymbol{r}_0) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{r}_0} = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2}\right)_{\boldsymbol{r}_0}$$

(aceleração)

Para qualquer variável intensiva χ, $\chi = \chi\,(t,\,\boldsymbol{r}_0)$. Para uma partícula de identidade fixa, a posição e o tempo não são variáveis independentes.

Descrição euleriana

Descrição euleriana: em termos de campo. Não estamos interessados no que acontece com uma partícula (pois existem muitas delas) senão com o que acontece em uma determinada região do escoamento.

Para qualquer variável intensiva $\chi = \chi(\boldsymbol{r}, t)$, onde a posição $\boldsymbol{r}$ e o tempo t são variáveis independentes. Exemplos: massa específica, velocidade, pressão, temperatura, tensor de tensões, etc.

Notar que mantendo o tempo fixo, temos uma fotografia instantânea de χ em todo lugar.

Notar que mantendo a posição fixa, temos a evolução temporal em um ponto (medidor ideal de χ).

Nenhum dos casos anteriores se corresponde com a descrição lagrangiana. Para expressar variações temporais lagrangianas (acompanhando às partículas) quando as variáveis estão expressadas como campos, devemos realizar operações matemáticas.

Tensor gradiente de velocidade

Consideremos um campo de velocidade $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, t)$. Se $\boldsymbol{V} = (u, v, w)$ e $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ a diferença de velocidades entre duas partículas infinitesimalmente próximas (afastadas em $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$ para um instante de tempo fixo resulta:

$$d\boldsymbol{V} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z} dz = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{r}$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

O operador $\nabla \boldsymbol{V} = \dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{r}}$ é o *tensor gradiente de velocidade*.

Derivada material

Para um campo escalar $\chi(\boldsymbol{r},\ t)$ o diferencial pode ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
d\chi &= \frac{\partial \chi}{\partial t}\,dt + \frac{\partial \chi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \chi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \chi}{\partial z}\,dz \\
&= \frac{\partial \chi}{\partial t}\,dt + \frac{\partial \chi}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \chi}{\partial t}\,dt + \nabla \chi \cdot d\boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

Se estabelecemos o vínculo $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{V}\,dt$, o diferencial é a variação na direção da linha de corrente, resultando a *derivada material* ou *substancial*, escrita como $\frac{D}{Dt}$:

$$
D\chi = \frac{\partial \chi}{\partial t}\,dt + \nabla \chi \cdot \boldsymbol{V}\,dt \Rightarrow \frac{D\chi}{Dt} = \frac{\partial \chi}{\partial t} + \nabla \chi \cdot \boldsymbol{V}
$$

O primeiro termo (não-nulo em escoamentos transientes) é conhecido como *derivada local*, enquanto o segundo termo (não-nulo quando existe uma variação espacial de χ na direção do vector velocidade) é conhecido como *derivada advectiva*.

Aceleração

A aceleração resulta a derivada material do campo de velocidade:

$$\boldsymbol{a} = \frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V}$$

O primeiro termo (não-nulo em escoamentos transientes) é conhecido como *aceleração local*, enquanto o segundo termo (não-nulo quando existe uma variação espacial da velocidade na direção do vector velocidade) é conhecido como *aceleração convectiva*. A aceleração convectiva introduz termos não-lineares. É comum ver a notação $\nabla \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V} = (\boldsymbol{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{V}$, pois em coordenadas cartesianas:

$$\nabla \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V} = u \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z}$$

A componente x da aceleração convectiva resulta:

$$(\nabla \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V})_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Tensor taxa de deformação e vorticidade

O tensor gradiente de velocidade pode ser decomposto em uma componente simétrica (tensor taxa de deformação $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$) e anti-simétrica (tensor de vorticidade $\underline{\boldsymbol{\omega}}$) :

$$\begin{aligned}\nabla \boldsymbol{V} &= \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{V} + \nabla \boldsymbol{V}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{V} - \nabla \boldsymbol{V}^T\right) \\ &= \underline{\boldsymbol{\epsilon}} + \underline{\boldsymbol{\omega}}\end{aligned}$$

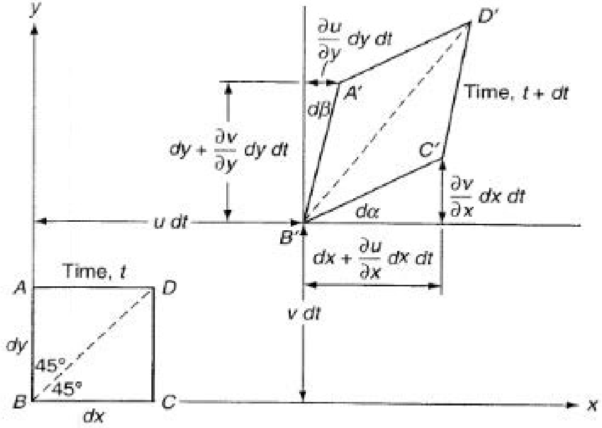
Em coordenadas cartesianas:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad ; \quad \{\epsilon_{ij}\} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad ; \quad \{\omega_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{zx} \\ -\omega_{xy} & 0 & \omega_{yz} \\ -\omega_{zx} & -\omega_{yz} & 0 \end{pmatrix}$$

Movimento geral

O movimento geral de uma partícula de fluído é a superposição de: a) translaçao; b) distorção e c) rotação.



Taxa de deformação de cisalhamento

O ponto B foi para B' em translação. Os pontos A e C foram respectivamente para A' e C'. Os ângulos de rotação do eixo x no sentido anti-horário e do eixo y no sentido horário (respectivamente $d\alpha$ e $d\beta$) resultam:

$$d\alpha = \lim_{dt \to 0} \left[\arctan \left(\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\, dx\, dt}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dt} \right) \right] = \frac{\partial v}{\partial x}\, dt$$

$$d\beta = \lim_{dt \to 0} \left[\arctan \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\, dy\, dt}{dy + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\, dt} \right) \right] = \frac{\partial u}{\partial y}\, dt$$

A variação específica do comprimento diferencial dx na direção do eixo x resulta:

$$\frac{\delta\,(dx)}{dx} = \lim_{dt \to 0} \left[\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dt}{dx} \right] = \frac{\partial u}{\partial x}\, dt$$

Taxa de deformação de cisalhamento e longitudinal

A taxa de deformação de cisalhamento é definida como a metade da taxa com que o ângulo entre os eixos γ (inicialmente igual a $\frac{\pi}{2}$) *diminui* ao longo do tempo. Da figura, resulta:

$$-\frac{1}{2}\frac{D\gamma}{Dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \epsilon_{xy}$$

A taxa de deformação específica longitudinal resulta:

$$\frac{1}{dx}\frac{D}{Dt}(dx) = \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_{xx}$$

Desta maneira, os elementos extra-diagonais do tensor taxa de deformação representam taxas de deformação angulares nos planos correspondentes, enquanto os elementos diagonais representam taxas de deformação específica longitudinais ao longo dos eixos correspondentes.

Tensor vorticidade e velocidade angular

A velocidade angular de rotação Ω_z na direção anti-horária da bissetriz *BD* (inicialmente com um ângulo $\frac{\pi}{4}$) resulta:

$$\Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \times \boldsymbol{V}\right)_z = -\omega_{xy}$$

$$\Omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \times \boldsymbol{V}\right)_x = -\omega_{yz}$$

$$\Omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \times \boldsymbol{V}\right)_y = -\omega_{zx}$$

Assim, a velocidade angular da partícula resulta a metade do vector vorticidade $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{V} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}$$

Propriedades do tensor taxa de deformação

Pela propriedade de simetria:

- Existem três *invariantes* do tensor taxa de deformação:

$$I_1 = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \nabla \cdot \boldsymbol{V}$$

$$I_2 = \epsilon_{xx}\,\epsilon_{yy} + \epsilon_{yy}\,\epsilon_{zz} + \epsilon_{zz}\,\epsilon_{xx} - \epsilon_{xy}^2 - \epsilon_{yz}^2 - \epsilon_{zx}^2$$

$$I_3 = \det \underline{\boldsymbol{\epsilon}}$$

- Existem três eixos principais 1, 2 e 3, nos quais a matriz associada é diagonal:

$$\{\epsilon_{ij}\} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$$

$$I_2 = \epsilon_{11}\,\epsilon_{22} + \epsilon_{22}\,\epsilon_{33} + \epsilon_{33}\,\epsilon_{11}$$

$$I_3 = \epsilon_{11}\,\epsilon_{22}\,\epsilon_{33}$$

Propriedades do tensor taxa de deformação

Para um volume $\delta\mathcal{V}$ limitado pela superfície fechada δA, a derivada material pode ser escrita como:

$$\frac{D}{Dt}(\delta\mathcal{V}) = \int_{\delta A} \boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA = \int_{\delta\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{V}\, d\mathcal{V}$$

Para $\delta\mathcal{V} \to 0$, $\int_{\delta\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{V}\, d\mathcal{V} \to \nabla \cdot \boldsymbol{V}\, \delta\mathcal{V}$, da onde resulta que o divergente do campo de velocidade mede a taxa de dilatação volumétrica específica da partícula:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \frac{1}{\delta\mathcal{V}} \frac{D}{Dt}(\delta\mathcal{V})$$

Como consequências, a rotação e a taxa de deformação angular não contribuêm à variação do volume da partícula. Aliás, $\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$ para partículas de volume constante (incompressíveis).

Equação de continuidade

Da equação de conservação da massa em forma integral para um sistema de partículas:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\mathcal{V} + \int_A \rho\, (\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}})\, dA = 0$$

Transformando o termo de fluxo com o teorema de Gauss e substituindo:

$$\int_A \rho\, (\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}})\, dA = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V})\, d\mathcal{V}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \boldsymbol{V}) \right] d\mathcal{V} = 0$$

Como o volume de integração é arbitrário, resulta a *equação de continuidade*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \boldsymbol{V}) = 0$$

Equação de continuidade

Das identidades:

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = \rho \nabla \cdot \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla \rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla \rho = \frac{D\rho}{Dt}$$

surge a forma alternativa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

A forma da equação de continuidade é a mesma para qualquer sistema no qual seja medida a velocidade (inercial ou não-inercial).