

# Modelagem em Engenharia C & A

Aula 5- Modelos Estatísticos/Estocásticos  
Aleatoriedade



- Estatística: estudo dos fenomenos a partir de seus indicadores amostrais
- Probabilidade: comportamento matemático de eventos seriados
- Indicadores amostrais:
  - Média
  - Variância
  - Desvio Padrão
  - Coeficiente de Variação
  - Distribuição de Frequência (Uniforme, Normal etc)

# Momentos Estatísticos

- Média:  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

- Média Ponderada:  $\bar{p} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$

- Variância:  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$

- Desvio Padrão  $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$   $s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2}{n-1}}$

- Coef Variação s/ Média  $Cv = \frac{s}{\bar{x}}$



# Estatística no Excel

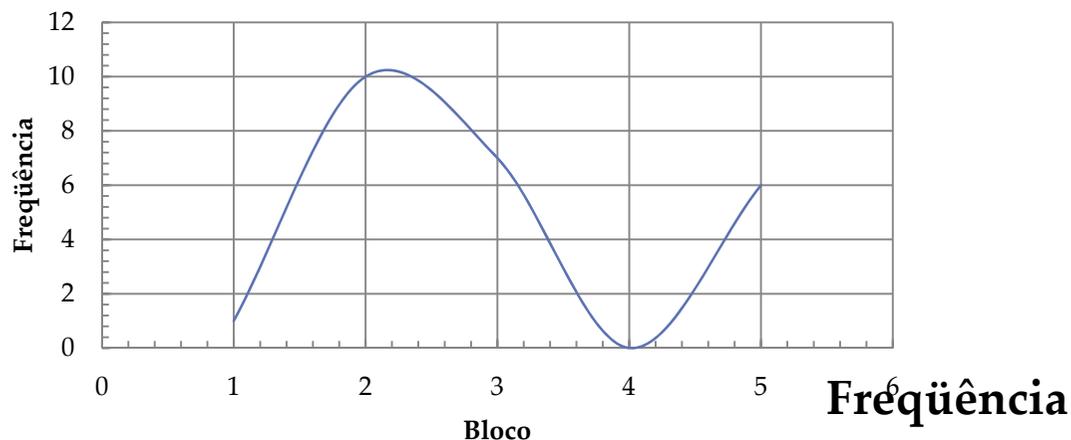
Função	Descrição
CONT.NÚM	Calcula quantos números há na lista de argumentos
CONT.SE	Calcula o número de células não vazias em um intervalo que corresponde a determinados critérios
CONT.SES	Conta o número de células dentro de um intervalo que atende a múltiplos critérios
CONT.VALORES	Calcula quantos valores há na lista de argumentos
CONTAR.VAZIO	Conta o número de células vazias no intervalo especificado
CORREL	Retorna o coeficiente de correlação entre dois conjuntos de dados
COVARIACÃO.P	Retorna a covariacão, a média dos produtos dos desvios pares
COVARIACÃO.S	Retorna a covariacão de exemplo, a média de desvios de produtos para cada par de pontos de dados em dois conjuntos de dados
CRESCIMENTO	Retorna valores ao longo de uma tendência exponencial
CURT	Retorna a curtose de um conjunto de dados
DESV.MÉDIO	Retorna a média aritmética dos desvios médios dos pontos de dados a partir de sua média
DESVPAD.A	Estima o desvio padrão com base em uma amostra
DESVPAD.P	Calcula o desvio padrão com base na população total
DESVPAD.A	Estima o desvio padrão com base em uma amostra, inclusive números, texto e valores lógicos
DESVPAD.P	Calcula o desvio padrão com base na população total, inclusive números, texto e valores lógicos
DESVQ	Retorna a soma dos quadrados dos desvios
DIST.BETA	Retorna a função de distribuição cumulativa beta
DIST.BIN.NEG.N	Retorna a distribuição binomial negativa
DIST.F	Retorna a distribuição de probabilidade F
DIST.F.CD	Retorna a distribuição de probabilidade F
DIST.GAMA	Retorna a distribuição gama
DIST.HIPERGEOM.N	Retorna a distribuição hipergeométrica
DIST.LOGNORMAL.N	Retorna a distribuição lognormal cumulativa
DIST.NORM.N	Retorna a distribuição cumulativa normal
DIST.NORMP.N	Retorna a distribuição cumulativa normal padrão
DIST.POISSON	Retorna a distribuição de Poisson
DIST.QUIQUA	Retorna a função de densidade da probabilidade beta cumulativa
DIST.QUIQUA.CD	Retorna a probabilidade unicaudal da distribuição qui-quadrada
DIST.T	Retorna os Pontos Percentuais (probabilidade) para a distribuição t do Aluno
DIST.T.BC	Retorna os Pontos Percentuais (probabilidade) para a distribuição t do Aluno
DIST.T.CD	Retorna a distribuição t de Student
DIST.WEIBULL	Retorna a distribuição de Weibull
DISTORÇÃO	Retorna a distorção de uma distribuição
DISTORÇÃO.P	Retorna a inclinação de uma distribuição com base em uma população: uma caracterização do grau de assimetria
DISTR.BINOM	Retorna a probabilidade de distribuição binomial do termo individual
DISTR.EXPON	Retorna a distribuição exponencial
EPADYX	Retorna o erro padrão do valor-y previsto para cada x da regressão
FISHER	Retorna a transformação Fisher
FISHERINV	Retorna o inverso da transformação Fisher
FREQUÊNCIA	Retorna uma distribuição de frequência como uma matriz vertical
GAMA	Retorna o valor da função GAMA
GAUSS	Retorna menos 0,5 que a distribuição cumulativa normal padrão
INCLINAÇÃO	Retorna a inclinação da linha de regressão linear
INT.CONFIANÇA.NORM	Retorna o intervalo de confiança para uma média da população
INT.CONFIANÇA.T	Retorna o intervalo de confiança para um meio de preenchimento, usando a distribuição t de Student
INTERCEÇÃO	Retorna a intercepção da linha de regressão linear
INTERV.DISTR.BINOM	Retorna a probabilidade de um resultado de teste usando uma distribuição binomial
INV.BETA	Retorna o inverso da função de distribuição cumulativa para uma distribuição beta especificada
INV.BINOM	Retorna o menor valor para o qual a distribuição binomial cumulativa é menor ou igual ao valor padrão
INV.F	Retorna o inverso da distribuição de probabilidades F
INV.F.CD	Retorna o inverso da distribuição de probabilidades F
INV.GAMA	Retorna o inverso da distribuição cumulativa gama
INV.LOGNORMAL	Retorna o inverso da distribuição cumulativa lognormal
INV.NORM.N	Retorna o inverso da distribuição cumulativa normal
INV.NORMP.N	Retorna o inverso da distribuição cumulativa normal padrão
INV.QUIQUA	Retorna a função de densidade da probabilidade beta cumulativa
INV.QUIQUA.CD	Retorna o inverso da probabilidade unicaudal da distribuição qui-quadrada
INV.T	Retorna o valor t da distribuição t de Aluno como uma função da probabilidade e dos graus de liberdade
INV.T.BC	Retorna o inverso da distribuição t de Student
LNGAMA	Retorna o logaritmo natural da função gama, G(x).
LNGAMA.PRECISO	Retorna o logaritmo natural da função gama, G(x).

# Séries de Eventos e Histograma

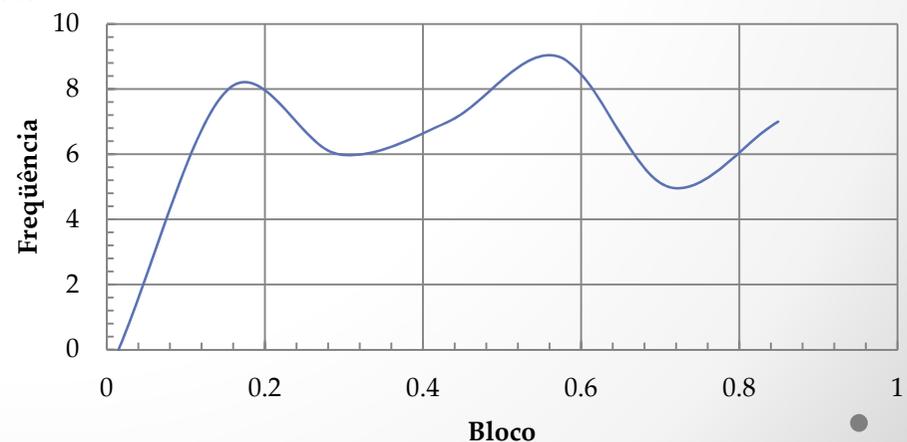
1	0.634893
2	0.815818
3	0.003581
4	0.912821
5	0.54144
6	0.891399
7	0.999131
8	0.71514
9	0.451001
10	0.822834
11	0.499316
12	0.665048
13	0.32351
14	0.773151
15	0.816532
16	0.559863
17	0.263673
18	0.327241
19	0.581793
20	0.285468
21	0.573319
22	0.080842
23	0.886603
24	0.516927
25	0.187636
26	0.155062
27	0.434984
28	0.36469
29	0.590735
30	0.422953
31	0.505837
32	0.488294
33	0.198953
34	0.369941
35	0.701763
36	0.034238
37	0.725216
38	0.134985
39	0.883988
40	0.492806
41	0.678199
42	0.903747
43	0.460203
44	0.881011
45	0.36508
46	0.058813
47	0.742017
48	0.657209
49	0.203372
50	0.115749

- Menu – Análise de Dados - Histograma

## Frequência



## Bloco

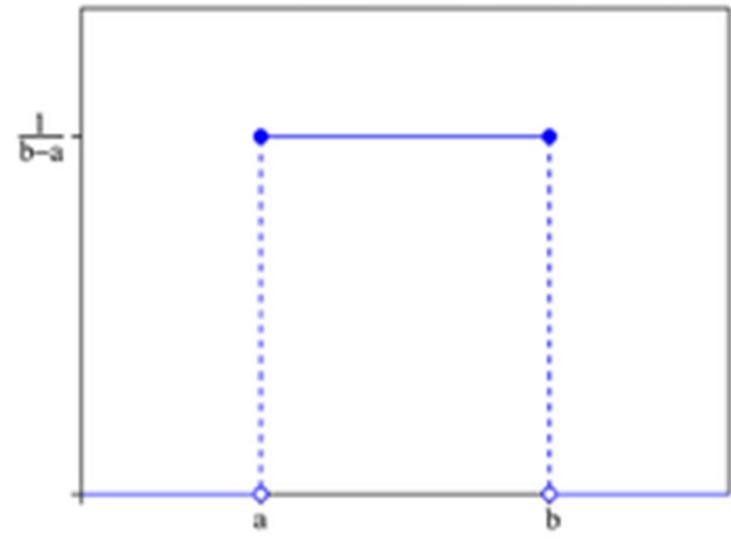


# Distribuição de Frequências

- Uniforme

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b, \\ 0 & , c.c. \end{cases}$$

$$F(k; a, b) = \frac{[k] - a + 1}{b - a + 1}$$

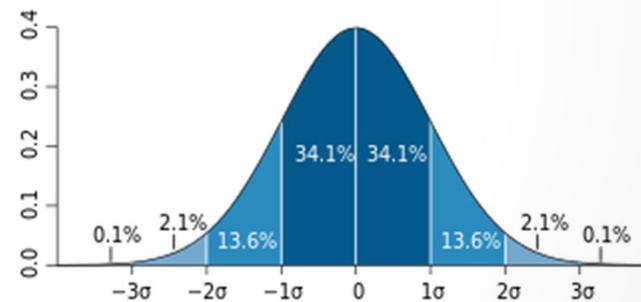


- Aplicação: gerador de números aleatórios
- Função no excel: ALEATORIO() ou ALEATORIOENTRE ()

# Distribuição Normal

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}, -\infty < x < \infty, \sigma > 0.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}.$$

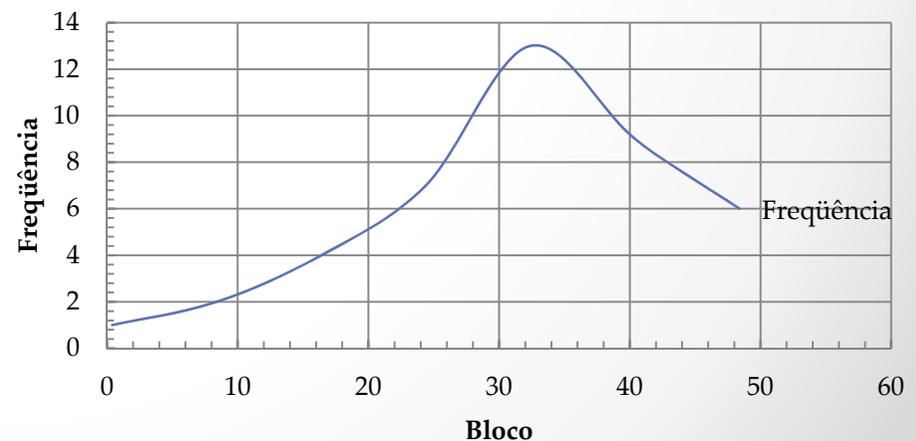


# Série de Vazões em um Rio

ANO	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
1949	25.9	27.1	37.7	21.4	14.8	7.3	4.5	2.1	1.3	4.2	6.8	10.0
1950	7.0	19.6	42.0	47.2	23.2	8.2	7.3	5.9	4.7	8.1	15.5	29.1
1951	32.8	24.4	30.2	17.9	17.5	11.3	9.5	7.6	5.9	7.5	7.5	17.9
1952	18.9	26.2	43.4	24.5	13.9	12.7	10.6	8.5	8.0	7.7	10.0	9.5
1953	9.0	11.3	15.2	14.7	7.0	6.4	5.5	4.5	4.2	3.8	6.3	9.4
1954	9.0	16.0	12.6	9.1	8.0	5.8	5.0	4.0	3.3	2.8	6.8	11.9
1955	31.0	36.5	37.8	44.9	17.2	15.6	13.3	10.7	8.2	17.6	25.9	47.3
1956	31.6	43.6	44.1	44.7	40.9	30.3	18.9	15.8	6.4	6.9	17.5	27.3
1957	29.1	37.4	67.6	54.4	29.2	17.6	13.4	10.8	9.2	8.5	12.3	18.8
1958	17.9	26.1	22.4	23.9	16.5	12.9	12.8	10.0	9.5	11.2	9.5	20.6
1959	29.5	23.4	31.0	30.7	20.7	12.2	9.5	9.7	9.4	10.2	15.0	13.5
1960	16.4	33.6	33.4	27.3	18.2	12.7	10.5	8.4	8.0	10.1	16.8	18.7
1961	33.0	47.6	42.9	21.2	21.6	14.8	11.9	9.7	8.0	7.9	10.7	23.1
1962	31.8	27.0	36.5	24.9	19.4	13.3	10.5	8.4	6.8	12.3	11.7	30.5
1963	28.7	48.8	26.6	19.4	13.7	11.1	9.2	7.5	6.3	5.3	8.7	6.5
1964	32.6	40.5	28.1	21.1	17.8	11.2	9.4	7.6	6.7	13.7	14.7	24.2
1965	27.8	26.9	40.4	39.1	23.9	17.7	14.3	11.5	9.5	19.2	20.3	22.6
1966	33.3	50.4	43.8	32.1	22.4	17.9	13.8	10.9	9.9	12.9	12.4	24.4
1967	28.0	31.0	41.7	31.0	20.6	16.1	12.7	10.1	9.9	9.1	22.4	30.6
1968	30.6	48.1	51.2	29.3	22.0	16.7	13.9	11.0	8.8	9.2	14.1	26.1
1969	31.7	32.8	27.0	16.6	16.1	9.7	8.1	5.4	4.7	8.8	27.9	26.9
1970	56.4	41.3	48.3	34.4	22.3	17.2	14.8	11.3	10.8	11.7	19.3	15.7
1971	14.6	15.1	23.2	23.0	13.3	10.5	7.6	6.2	6.6	11.2	23.6	36.9
1972	25.9	34.2	42.2	26.4	18.1	14.2	11.9	10.9	7.6	15.6	24.2	52.5
1973	43.7	42.4	50.7	47.1	28.1	20.9	16.7	12.9	11.5	26.7	38.2	35.3
1974	40.7	25.2	57.2	64.3	36.4	26.4	20.1	16.4	12.8	14.3	13.0	23.6
1975	33.3	34.5	23.9	36.0	18.2	14.0	14.3	11.3	9.9	11.8	15.3	24.4
1976	20.0	17.0	24.8	18.4	16.6	10.5	8.7	7.4	10.2	13.3	24.2	45.5
1977	44.4	48.8	29.0	29.6	24.7	16.3	12.2	10.2	11.4	11.7	15.8	19.6
1978	39.2	29.0	41.9	26.1	21.8	16.8	13.5	10.8	10.0	12.5	19.8	33.0
1979	55.5	56.0	46.0	32.0	25.0	21.9	18.2	15.2	17.0	14.6	19.1	20.5
1980	51.2	74.8	42.8	32.3	24.5	20.3	16.9	13.9	12.3	7.5	18.0	32.1
1981	31.6	21.9	34.4	34.4	21.4	17.6	13.9	11.0	9.2	26.4	44.4	34.7
1982	54.9	49.0	61.2	55.9	36.4	27.3	22.0	20.1	19.1	30.8	25.3	34.6
1983	49.3	68.2	49.0	46.3	30.2	24.6	20.9	16.7	16.2	20.0	26.1	28.3
1984	33.7	31.3	37.5	29.1	19.5	13.7	11.2	10.3	11.9	12.9	16.5	25.4
1985	47.4	55.4	40.5	39.3	25.0	19.5	16.4	12.8	12.8	17.1	22.7	27.7
1986	40.8	37.8	37.7	25.4	20.7	13.8	12.2	12.7	9.4	10.9	12.0	22.4
1987	31.8	29.6	39.2	30.4	18.6	13.1	10.5	8.4	9.0	11.0	34.4	55.8
1988	41.8	68.8	73.0	60.1	35.6	32.3	22.1	16.3	14.4	17.6	23.0	24.9
1989	24.1	29.8	29.5	17.5	12.6	9.8	8.4	9.3	9.3	9.0	24.3	69.7
1990	52.3	43.7	34.2	25.5	22.9	14.4	12.7	11.4	9.2	10.7	15.3	11.2
1991	20.2	22.5	42.5	34.7	15.2	13.6	11.7	9.4	8.9	9.0	8.3	23.4
1992	34.8	44.2	46.2	48.1	21.9	17.4	14.8	12.1	12.9	18.0	23.2	33.5
1993	22.1	45.4	40.9	24.5	18.5	15.0	11.7	10.8	10.6	10.2	11.7	24.7

Bloco	Frequência
0.39294	1
8.393949	2
16.39496	4
24.39597	7
32.39697	13
40.39798	9
48.39899	6
Mais	7

Frequência



# Rotina para Gerar Histograma 'Normal'

```
'////////////////////////////////////
```

```
'Faz Histograma - Freq Acumulada
```

```
Sub Histograma_R(Optional ByVal incells As Variant, Optional ByVal  
numclasses As Variant, Optional ByVal outcells As Variant, Optional ByVal  
op_plota As Variant)
```

```
Dim r As Range, output As Range, plota As Boolean
```

```
Dim i As Integer, j As Integer
```

```
Dim rmax As Double, rmin As Double, rband As Double
```

```
Dim M As Integer, N As Integer
```

```
Dim cl() As Double
```

```
Dim maisprovavel As Double
```

```
Dim soma As Double, somaq As Double, media As Double, devP As  
Double, moda As Double
```

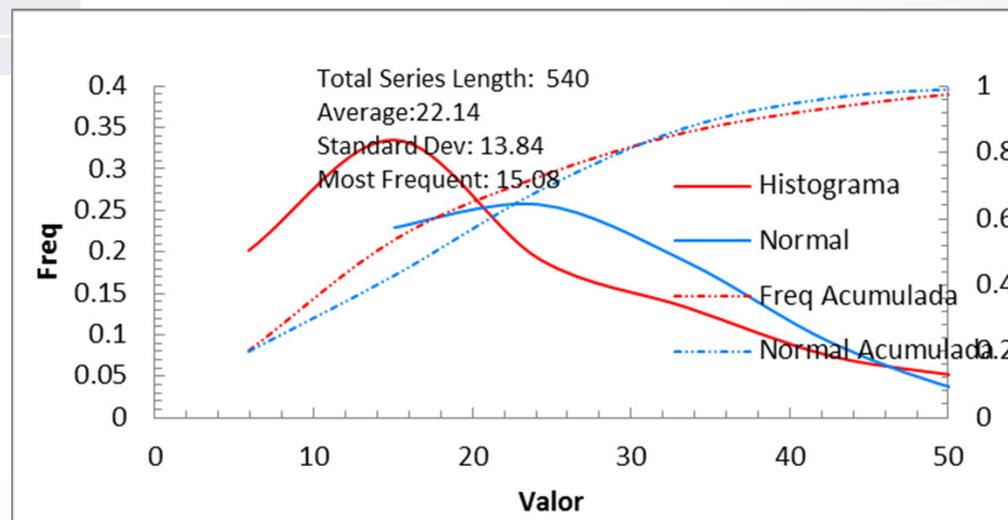
```
Dim NP As Long
```

- If IsMissing(numclasses) Then

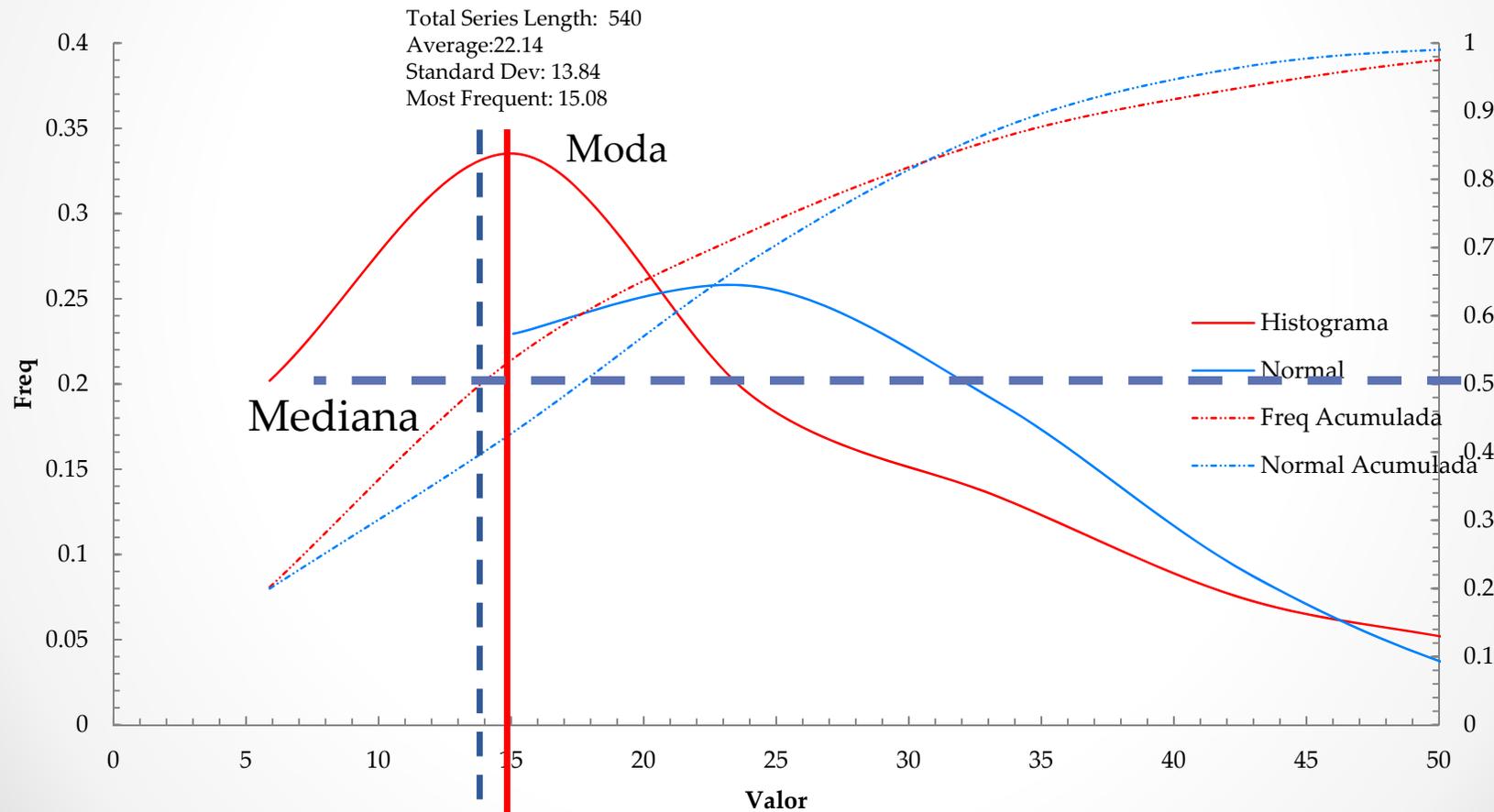
- Set r = Application.InputBox(prompt:="Enter Data Matrix:", Type:=8)

# Resultado

Média:	22.14019	Máximo:	74.8		
DesvPad:	13.83668	Mínimo:	1.3		
	Frequênc	Freq	Dist		
Valor	ia	Acumul	Normal	Normal	Acumul
5.89375	0.201852	0.201852			0.199849
15.08125	0.335185	0.537037	0.229448		0.429297
24.26875	0.190741	0.727778	0.25716		0.686457
33.45625	0.133333	0.861111	0.188436		0.874893
42.64375	0.074074	0.935185	0.090255		0.965148
51.83125	0.046296	0.981481	0.028243		0.993391
61.01875	0.007407	0.988889	0.00577		0.99916
70.20625	0.009259	0.998148	0.000769		0.999929
74.8	0.001852	1	5.31E-05		0.999982



# Moda e Mediana



# Normal x Uniforme

$$Z_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$$

$$Z_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2).$$

# Geração de Séries sintéticas

- Cadeia de Markov

$$x_j = \bar{x}_j + r_{i,j} (\bar{x}_j - x_i) + z \cdot s_j$$

- $x_j$  = valor calculado para a hora j
- $r_{i,j}$  = coef angular da reta de tendência entre i,j
- Z = variável aleatória de distribuição normal
- S = desvio padrão de x na hora j

# Exercício 5

- Dimensionar, considerando a série pluviométrica fornecida, a área de captação e o tanque para armazenamento de água de chuva de um lava-jato que consome  $90\text{m}^3/\text{mês}$  de água com uma variação típica de  $\pm 10\%$ . E  $10\%$  de perdas do volume armazenado.

