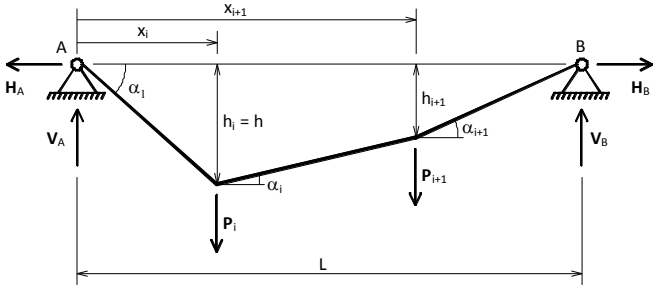


Arcos e Cabos – II

(Aula 4 – 12/09/2016)

Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti & Leila Meneghetti Valverdes
2º Semestre 2016

Cabo Poligonal, sujeito a forças verticais, com apoios nivelados:



Equilíbrio vertical : $V_A + V_B - \sum_i P_i = 0$

Equilíbrio horizontal: $H_B - H_A = 0$ $\quad H_A = H_B = H$ (Empuxo)

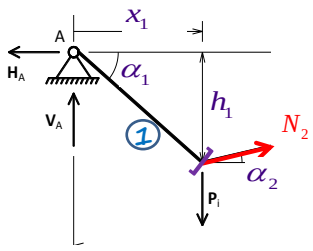
Equilíbrio de Momentos em torno de A: $V_B L - \sum P_i \, x_i = 0$ $\quad V_B = \frac{1}{L}\sum P_i \, x_i$

Equilíbrio de Momentos em torno de B: $-V_A L + \sum P_i \, (L - x_i) = 0$ $\quad V_A = \frac{1}{L}\sum P_i \, (L - x_i)$





Cabo Poligonal, sujeito a forças verticais, com apoios nivelados:



Fixando o valor de h_1 (ou de outro h_i qualquer, determinamos o valor do empuxo:

$$\sum_i M_{(S1)} = Hh_1 - V_A x_1 = 0$$

$$H = \frac{V_A x_1}{h_1}$$

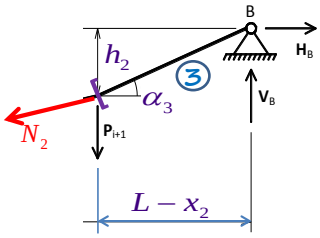
Decorre o esforço N_1: $N_1 = \sqrt{H^2 + V_A^2}$

Ou, de outro modo: $N_1 \cos\alpha_1 = H$ $\quad N_1 = \frac{H}{\cos\alpha_1}$

Sendo que: $\cos\alpha_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\ell_i} = \frac{\Delta x_i}{\ell_i} = \frac{\Delta x_i}{\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}}$

Cabo Poligonal, sujeito a forças verticais, com apoios nivelados:

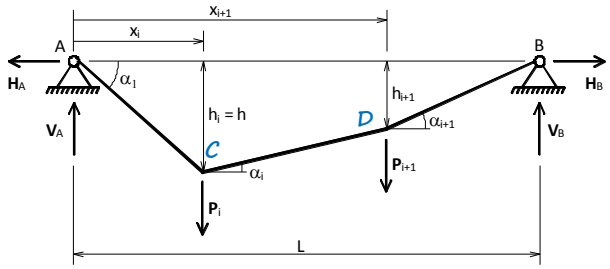
Determinado o empuxo H, as demais alturas h_i são decorrência, bem como as forças normais N_i:



$$\sum_i M_{(S2)} = V_B(L - x_2) - Hh_2 = 0$$

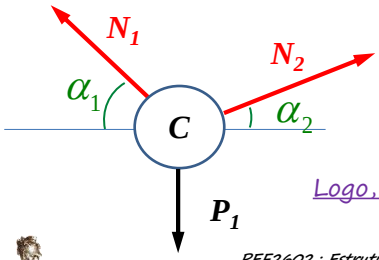
$$h_2 = \frac{V_B(L - x_2)}{H}$$

Cabo Poligonal, sujeito a forças verticais, com apoios nivelados:



Equilíbrio do Nó C: $\sum F_X = N_2 \cos\alpha_2 - N_1 \cos\alpha_1 = 0$

$$N_2 \cos\alpha_2 = N_1 \cos\alpha_1 = H$$

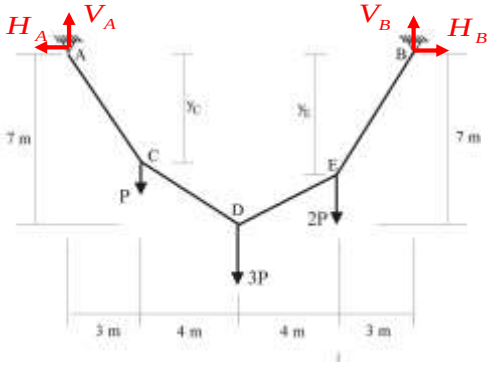


Em geral, para cargas verticais:

$$N_i \cos\alpha_i = H = \text{constante!}$$

Logo, paras as forças normais: $N_i = \dfrac{H}{\cos\alpha_i}$

Exemplo: O cabo da figura ao lado encontra-se sujeita à ação de cargas verticais, múltiplas de P=275kN. Determine as forças normais em cada trecho do cabo e as alturas y_C e y_E. Considerando que o material do cabo possui tensão de ruptura σ_R = 40 kN/cm², determine o diâmetro de sua seção transversal (uniforme), utilizando um coeficiente de segurança s=2.



Equilíbrio horizontal:

$$\sum_i F_X^i = H_B - H_A = 0$$

$$H_A = H_B = H$$

Equilíbrio vertical : $V_A + V_B - P - 3P - 2P = 0$

$$V_A + V_B = 6P = 6 \times 275 = 1650kN$$

Equilíbrio de Momentos em torno de A: $V_B \times 14 - P \times 3 - 3P \times 7 - 2P \times 11 = 0$

$$V_B = \frac{275}{14}(3 + 3\times 7 + 2\times 11) = 903,57kN$$

$$V_A = 1650 - 903,57 = 746,43kN$$

Equilíbrio de momentos do trecho ACD em relação ao ponto D

$$\sum_i M_{(D)} = H \times y_D - V_A \times 7 + P \times 4 = 0$$

$$H = \frac{1}{7}(746,43 \times 7 - 275 \times 4) = 589,29kN$$

Equilíbrio de momentos do trecho AC em relação ao ponto C

$$\sum M_{(C)} = H \times y_C - V_A \times 7 = 0 \qquad y_C = \frac{746,43 \times 3}{589,29} = 3,8m$$

Equilíbrio de momentos do trecho BE em relação ao ponto E

$$\sum M_{(E)} = -H \times y_E + V_B \times 3 = 0 \qquad y_E = \frac{903,57 \times 3}{589,29} = 4,6m$$





Forças normais: $N_i = \frac{H}{\cos\alpha_i}$ $\cos\alpha_i = \frac{\Delta x_i}{\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}}$

Trecho	Δx [m]	Δy [m]	ΔL [m]	cosα	N [kN]
AC	3	3,8	4,84	0,6196	951,1
CD	4	3,2	5,12	0,7809	754,6
DE	4	2,4	4,66	0,8575	687,2
EB	3	4,6	5,49	0,5463	1078,7

Dimensionamento: $N_{max} = N_{EB} = 1078,7kN$

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} = \frac{N_{max}}{\left(\frac{\pi\phi^2}{4}\right)} \leq \frac{\sigma_R}{s}$$

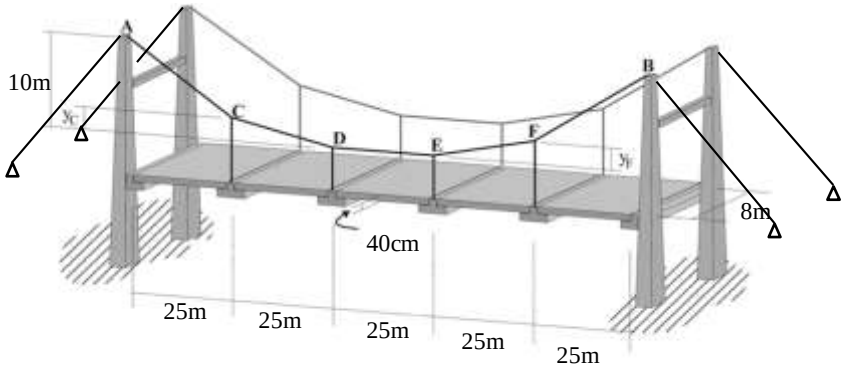
$$\sigma_R = 40\frac{kN}{cm^2} \times \left(10^3 \frac{N}{kN}\right) \times \left(10^4 \frac{cm^2}{m^2}\right) = 400 \times 10^6 \frac{N}{m^2}$$

$$\phi \geq \sqrt{\frac{4sN_{max}}{\pi\sigma_R}} = \sqrt{\frac{4 \times 2 \times 1078,7 \times 10^3}{\pi \times 400 \times 10^6}} = 0,083m = 8,3cm$$

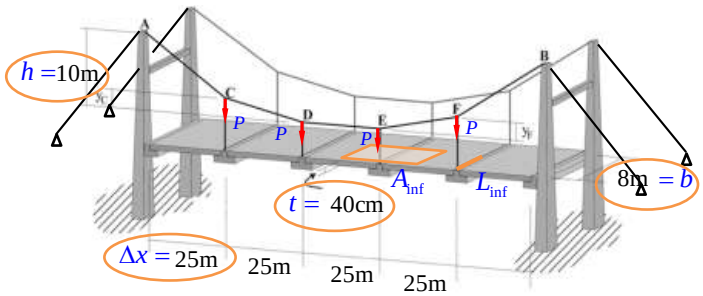




Exercício: A ponte suspensa da figura abaixo encontra-se sujeita à ação simultânea do peso próprio dos tabuleiros (peso específico: γ_T = 25 kN/m³; espessura = 40 cm), de uma sobrecarga de 4 kN/m² e do peso próprio das vigas de suporte (40 kN/m). O material dos cabos possui tensão de ruptura σ_R = 120 kN/cm². Determine as e alturas y_C e y_F e as forças normais de cada trecho do cabo ACDEFB. Utilizando um coeficiente de segurança s=3, determine o diâmetro da sua seção transversal uniforme. Desconsidere o peso dos cabos e dos tirantes.



Resolução:



Largura da ponte: $b = 8m$ Espessura do tabuleiro $t = 0.4m$

Área de influência de cada tirante: $A_{inf} = \Delta x \times \frac{b}{2} = 100\ m^2$

Largura de influência de cada tirante: $L_{inf} = \frac{b}{2} = 4\ m$

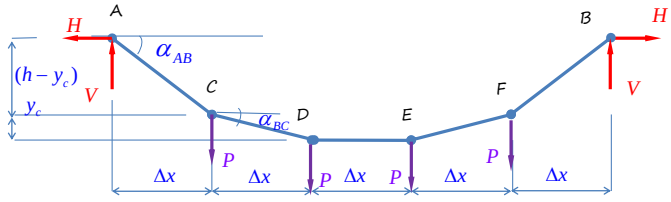
Carga de peso próprio do tabuleiro: $w_{pp} = \gamma_T \times t = 25\frac{kN}{m^3} \times 0.4\ m = 10\frac{kN}{m^2}$

Sobrecarga: $w_{ad} = 4\frac{kN}{m^2}$ Peso das vigas: $q_v L_{inf} = 40kN/m$

Carga sobre cada tirante:

$$P = \left(w_{pp} + w_{ad}\right) A_{inf} + q_{vigas} L_{inf} = (10+4) \times 100 + 4 \times 40 = 1560kN$$

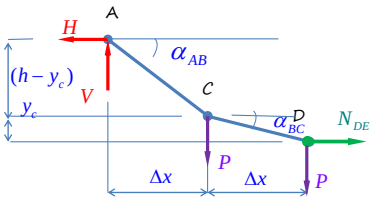
Resolução:



$\Delta x = 25m$

Equilíbrio do cabo ACDEFB: $V_A = V_B = V = 2P = 3120\ kN$

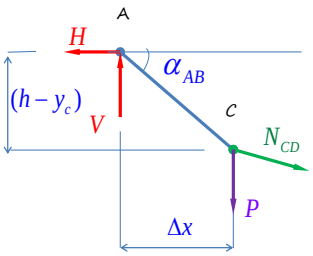
Equilíbrio de momentos do trecho ACD em torno do ponto D:



$$H_A \times h - V \times 2 \times \Delta x + P \times \Delta x = 0$$

$$H = \frac{1}{h}\left(V \times 2 \times \Delta x - P \times \Delta x\right) = 11700\ kN$$

Equilíbrio de momentos do trecho AC em torno do ponto C:



$$H_A \times (h - y_C) - V \times \Delta x = 0$$

$$y_C = h - \frac{V}{H}\Delta x = 3,33\ m$$

$$\cos\alpha_{AC} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + (h-y_c)^2}} = 0,96623 \quad \therefore \quad N_{AC} = \frac{H}{\cos\alpha_{AC}} = \frac{10620}{0,96623} = 12109\ kN$$

$$\cos\alpha_{CD} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + (y_c)^2}} = 0,99123 \quad \therefore \quad N_{CD} = \frac{H}{\cos\alpha_{CD}} = \frac{10620}{0,99123} = 11804\ kN$$

$$\cos\alpha_{DE} = 1 \quad \therefore \quad N_{DE} = \frac{H}{\cos\alpha_{DE}} = H = 11700\ kN$$

Dimensionamento do cabo ACDEFB:

$$N_{max} = N_{AC} = 12109\ kN$$

Resistência à tração: $\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A_{cabo}} =\leq \frac{\sigma_R}{s} \quad \therefore \quad \frac{N_{max}}{\left(\frac{\pi\phi^2}{4}\right)} =\leq \frac{\sigma_R}{s}$

$$\phi \geq \sqrt{\frac{4sN_{max}}{\pi\sigma_R}}$$

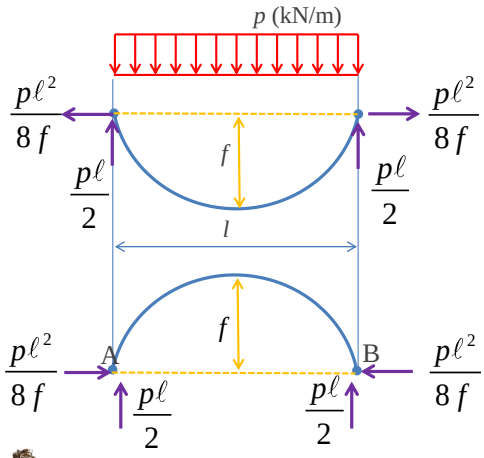
$$\sigma_R = 120\frac{kN}{cm^2} = 1200\ MPa$$

$$\phi \geq \sqrt{\frac{4\times 3\times 12109\times 10^3}{\pi\times 1200\times 10^6}} = 0{,}19633\ m$$

Diâmetro do cabo: $\phi \equiv 20cm$

ARCOS: estruturas planas lineares, sujeitas predominantemente à esforços de compressão.

Forma do arco: preferencialmente funicular (livre de flexão) para os carregamentos permanentes.



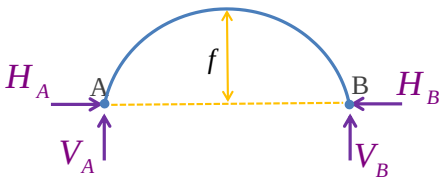
❖ Para ser estável à compressão, o arco deve ter rigidez à flexão, mesmo no caso de não ser solicitado deste modo.



Viaducto del Ulla, 2011. 630 metros de comprimento, altura máxima 117m, vão principal 168m.

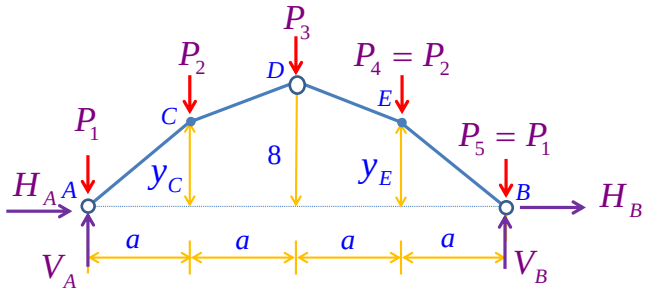
❖ A rigidez à flexão torna o arco bi-articulado: 1x hiperestático

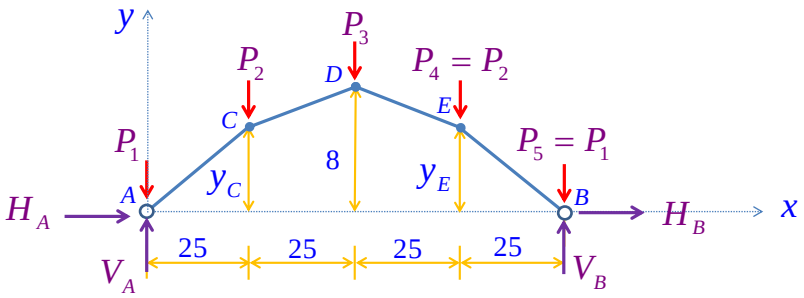
❖ Como vamos estudar, arcos funiculares para um dado carregamento, podem introduzir articulações internas!



Etapas:

1. Definir a forma e esforços no arco para os carregamentos permanentes (p)
2. Inserir uma articulação interna
3. Determinar solicitações para carga acidental (q)
4. Adicionar as solicitações (p + q)



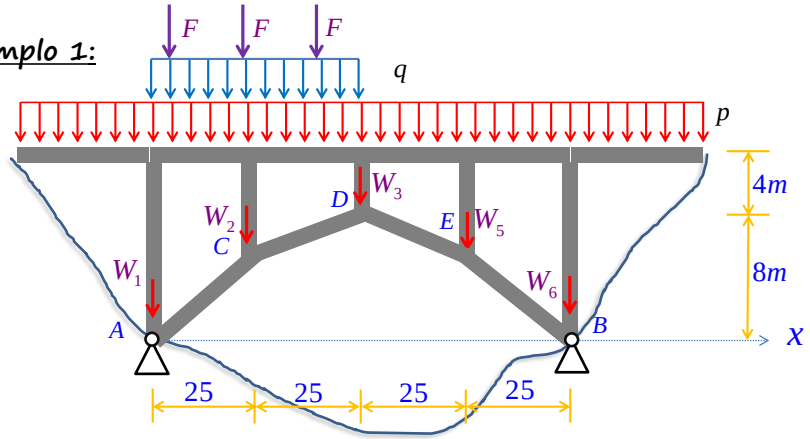


Simetria dos carregamentos permanentes:

$$H_A = H_B \qquad V_A = V_B \qquad y_C = y_E$$

É necessário definir apenas uma variável geométrica!

Exemplo 1:



Cargas permanentes:

$p = 100kN/m$

$W_1 = W_5 = 100kN$

$W_2 = W_4 = 100kN$

$W_3 = 40kN$

Cargas móveis:

$q = 20kN/m$

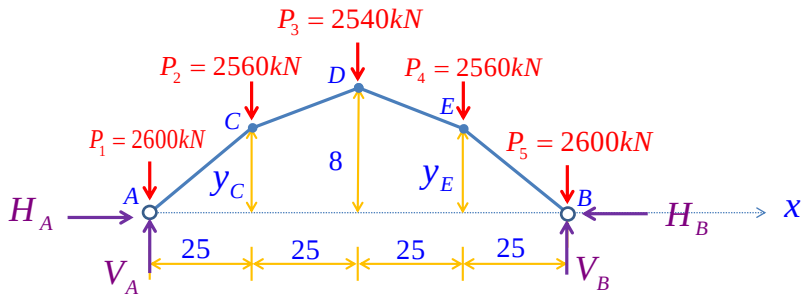
$F = 100kN$

Definição das cargas permanentes nos nós do arco: $P_i = p.l_i + W_i$

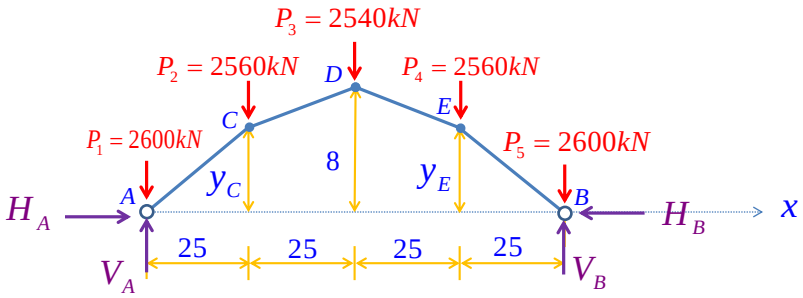
$P_1 = P_5 = 100 \times 25 + 100 = 2600kN$

$P_2 = P_4 = 100 \times 25 + 60 = 2560kN$

$P_3 = 100 \times 25 + 40 = 2540kN$



Equilíbrio:

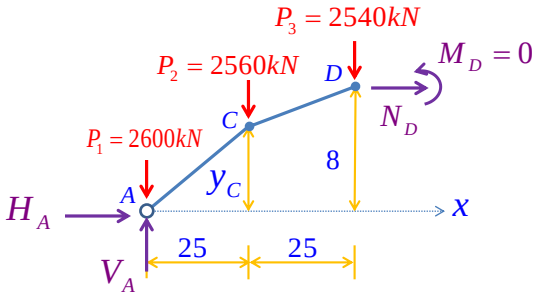


$$\sum F_X = 0 \qquad H_A = H_B = 0 \qquad \therefore \qquad H_A = H_B$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad V_A + V_B - 2\times 2600 \; - 2\times 2560 - 2540 = 0$$

$$\boxed{V_A = V_B = 6430kN}$$ SIMETRIA!!

Empuxo: Supondo o cabo funicular às cargas permanentes



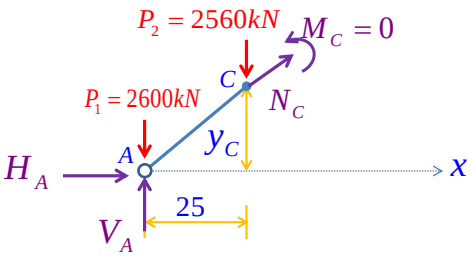
Equilíbrio do trecho AD, à esquerda:

$$\sum M_{(D)} = H_A \times 8 - (V_A - 2600)\times 50 + 2560\times 25 + \cancel{M_D} = 0$$

$$H_A = \frac{1}{8}\left[(6430 - 2600)50 - 2560\times 25\right]$$

$$\boxed{H_A = 15.937{,}5kN = H_B}$$

Determinação da ordenada y_C



Para cargas permanentes:

$$\sum M_{(C)} = 0$$

Equilíbrio do trecho AC, à esquerda:

$$\sum M_{(C)} = \cancel{M_C} + 15.937,5 \times y_C - (6430 - 2600) \times 25 = 0$$

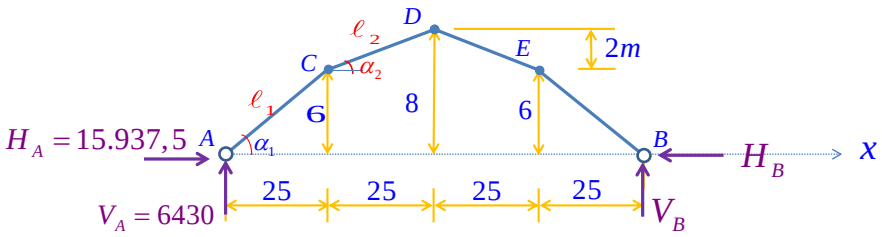
$$y_C = \frac{(6430 - 2600)25}{15.937,5}$$

$$\boxed{y_C = 6,01m = y_E}$$





<u>Determinação na força normal nos segmentos do arco</u>

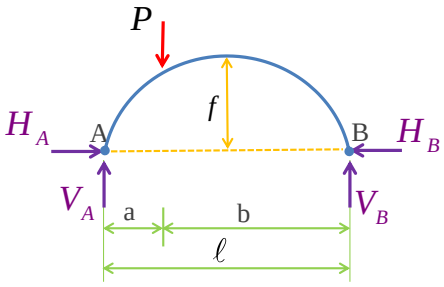


i	Δx_i (m)	Δy_i (m)	L_i (m)	Cos α_i	$Ni=H/\cos\alpha_i$ (kN)
1	25	6	25,71	0,972	16.396,6
2	25	2	25,08	0,997	15.985,4





Para carregamentos acidentais, para os quais o arco não é funicular, este fica sujeito à flexão.



$$\sum F_X = 0 \qquad ?$$

$$H_A - H_B = 0 \quad \therefore \quad H_A = H_B$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$V_A + V_B - P = 0$$

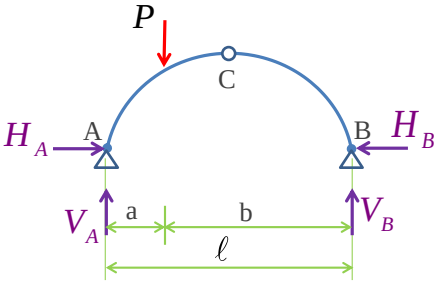
$$\sum M_{(A)} = 0 \qquad V_B \times \ell - P \times a = 0 \qquad V_B = \frac{P \times a}{\ell}$$

Estrutura 1 x **HIPERESTÁTICA**

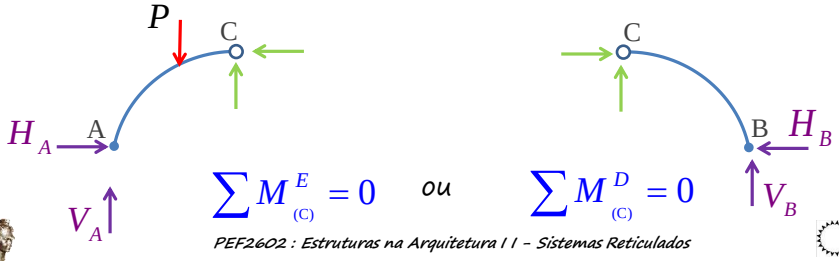
$$V_A = \frac{P \times b}{\ell}$$

Introduzindo uma articulação interna: **ARCO <u>TRIARTICULADO</u>**

ISOSTÁTICO

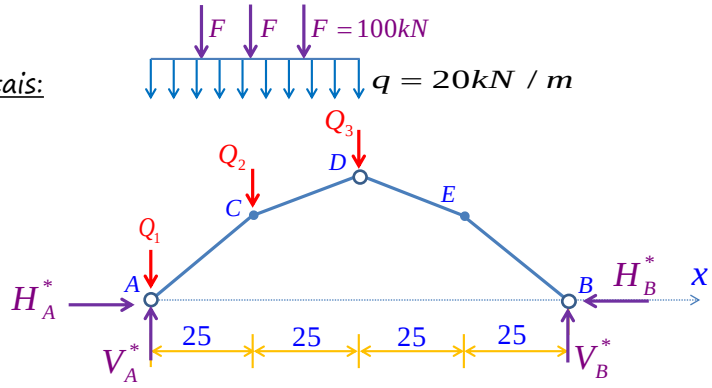


Dispõe-se de mais uma equação



$$\sum M^{E}_{(C)} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum M^{D}_{(C)} = 0$$

Cargas acidentais:

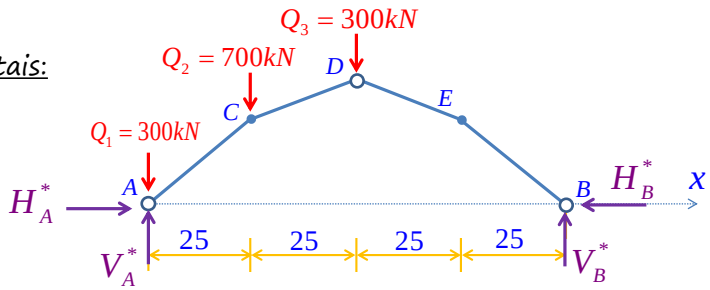


$$Q_1 = \frac{20 \times 25}{2} + \frac{100}{2} = 300kN$$

$$Q_2 = 20 \times 25 + 2 \times \frac{100}{2} + 100 = 700kN$$

$$Q_3 = 300kN$$

Cargas acidentais:



$$\sum F_X = H_A^* - H_B^* = 0 \quad \therefore \quad H_A^* = H_B^*$$

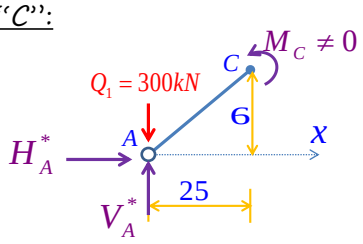
$$\sum F_Y = V_A^* + V_B^* - Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 \quad \therefore \quad V_A^* + V_B^* = 1300kN$$

$$\sum M_{(A)} = 100 \times V_B^* - 25 \times Q_2 - 50 \times Q_3 = 0 \quad \therefore \quad V_B^* = \frac{25 \times 700 + 50 \times 300}{100}$$

$$V_B^* = 325kN \quad \therefore \quad V_A^* = 975kN$$

$$\sum M^{D}_{(D)} = 50 \times V_B^* - 8 \times H_B^* = 0 \quad \therefore \quad H_B^* = \frac{25 \times 325}{8} \qquad H_B^* = H_A^* = 2031,25kN$$

Cortando em "C":



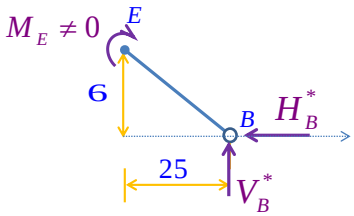
$$\sum M^{E}_{(C)} = M_C + (Q_1 - V_A^*) \times 25 - 6 \times H_A^* = 0$$

$$M_C = (Q_1 - V_A^*) \times 25 - 6 \times H_A^*$$

$$M_C = (975 - 300) \times 25 - 6 \times 2031,25$$

$$\boxed{M_C = 4.687,5kN \cdot \text{m}}$$

Cortando em "E":



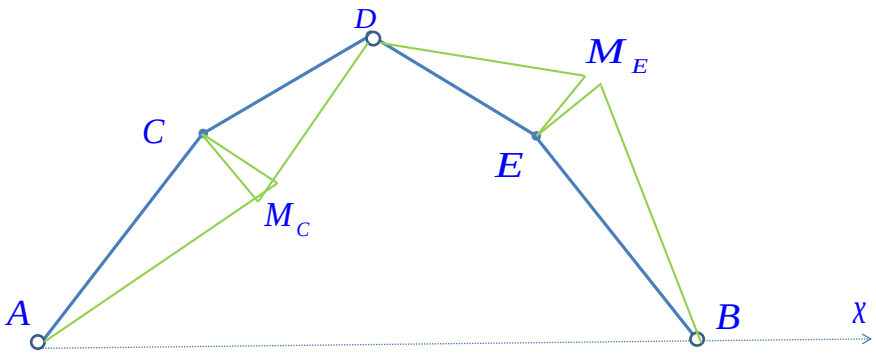
$$\sum M^{D}_{(E)} = -M_E + V_B^* \times 25 - 6 \times H_B^* = 0$$

$$M_E = V_B^* \times 25 - 6 \times H_B^*$$

$$M_E = 325 \times 25 - 6 \times 2031,25$$

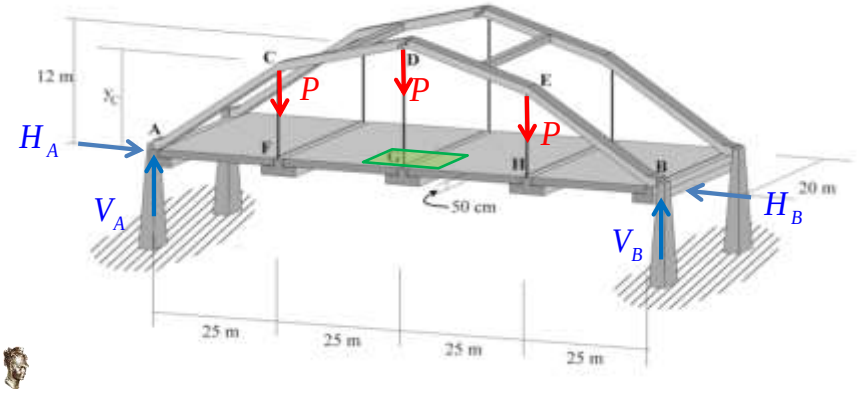
$$\boxed{M_E = -4.062,5kN \cdot \text{m}}$$

Diagrama de momentos fletores:



- Analogamente, podem ser traçados os diagramas de N e Q.
- As solicitações para o carregamento total (permanente + acidental) são obtidos por superposição.

Exemplo 2: A ponte suspensa da figura abaixo encontra-se sujeita à ação simultânea do peso próprio do tabuleiro ($\gamma_T = 25kN/m^3$; espessura = 50 cm), de uma sobrecarga de 5kN/m² e do peso próprio das vigas de suporte (10kN/m). O arco de sustentação é formado pelas barras AC, CD, DE e EB, cujo material possui tensão de ruptura à compressão $\sigma_{R,compr} = 4kN/cm^2$. Por sua vez, os tirantes possuem material com tensão de ruptura $\sigma_{R,tração} = 40kN/cm^2$. Utilizando um coeficiente de segurança s=2, determine as forças normais das barras que formam o arco, as forças normais dos tirantes, a dimensão das seções transversais e as alturas y_C e y_E (o peso do arco e dos tirantes não é considerado).



Determinação das cargas equivalentes:

$$P = (\gamma_T \times \text{vol}_{\text{influência Tab}}) + (\text{Sob} \times \text{A}_{\text{influência}}) + \text{Reação da viga}$$

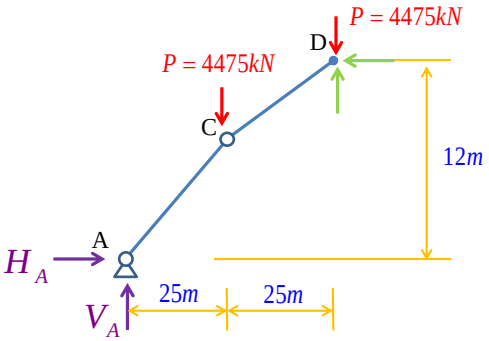
$$P = (25 \times 25 \times 10 \times 0{,}5) + (5 \times 25 \times 10) + (10 \times 10) = 4475kN$$

Reações de apoio:

$$\sum F_X = 0 \qquad H_A = H_B = 0 \qquad \therefore \qquad H_A = H_B$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad V_A + V_B - 3 \times P = 0 \qquad V_A = V_B = \frac{3 \times P}{2} = 6712{,}5kN$$

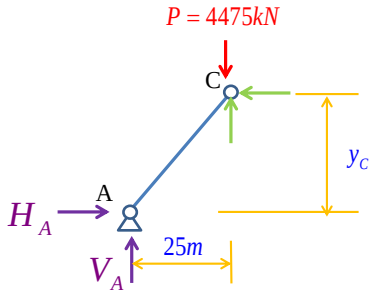
Cortando em "D":



$$\sum M^{E}_{(D)} = V_A \times 50 - H_A \times 12 - P \times 25 = 0$$

$$H_A = \frac{P \times 25 - V_A \times 50}{12} = 18.645{,}83kN$$

Cortando em "C":

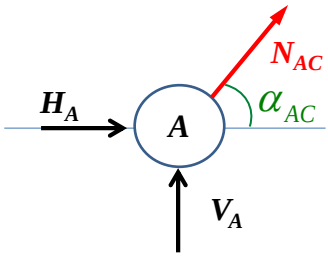


$$\sum M^{E}_{(C)} = V_A \times 25 - H_A \times y_C = 0$$

$$y_C = \frac{V_A \times 25}{H_A} = 9m$$

Equilíbrio do Nó A:

$$\cos\alpha_{AC} = \frac{25}{\sqrt{25^2 + 9^2}} = 0,9409$$

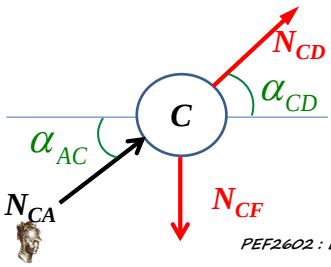


$$N_{AC} = \frac{-H_A}{\cos\alpha_{AC}} = -19.816,8kN$$

$$\cos\alpha_{CD} = \frac{25}{\sqrt{25^2 + (12-9)^2}} = 0,993$$

$$N_{CD} = \frac{-H_A}{\cos\alpha_{CD}} = -18.777,27kN$$

Equilíbrio do Nó C:

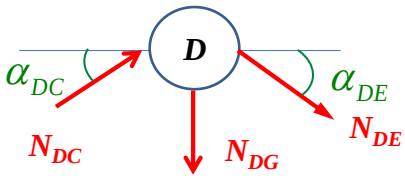


$$\sum F_Y = 0 \; N_{CF} + N_{CD} \times sen\alpha_{CD} - N_{CA} \times sen\alpha_{CA} = 0$$

$$N_{CF} = -18.777,27 \times \frac{3}{\sqrt{25^2 + 3^2}} + 19.816,8 \times \frac{9}{\sqrt{25^2 + 9^2}}$$

$$N_{CF} = 4475kN$$

Equilíbrio do Nó D:



$$\sum F_Y = 0$$

$$-N_{DG} - N_{DC} \times sen\alpha_{DC} - N_{DE} \times sen\alpha_{DE} = 0$$

$$N_{DG} = -2 \times \left(-18.777,27 \times \frac{3}{\sqrt{25^2 + 3^2}} \right)$$

$$N_{DG} = 4475kN$$

Dimensionamento do arco ACDEB e dos tirantes:

Arco – barras comprimidas:

$$\sigma = \frac{N}{A_{nec}} \leq \frac{\sigma_{R,compressão}}{s}$$

$$\frac{19.816,8}{A_{AC}} \leq \frac{4}{2} \qquad \frac{18.777,27}{A_{CD}} \leq \frac{4}{2}$$

$$A_{AC} \geq 9908,4cm^2 \qquad A_{CD} \geq 9388,63cm^2$$

Tirantes – barras tracionadas:

$$\sigma = \frac{N}{A_{nec}} \leq \frac{\sigma_{R,tração}}{s}$$

$$\frac{4475}{A} \leq \frac{40}{2}$$

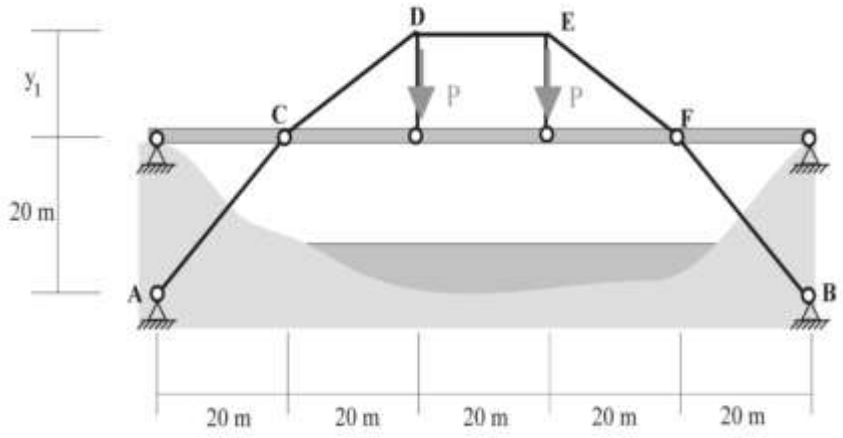
$$A \geq 223,75cm^2$$





Exemplo 3: O arco da figura encontra-se sujeito à ação do peso próprio q do tabuleiro e de cargas verticais P aplicadas nos pontos D e E. Determine as reações de apoio, as forças normais de cada barra do arco e a altura y_1.

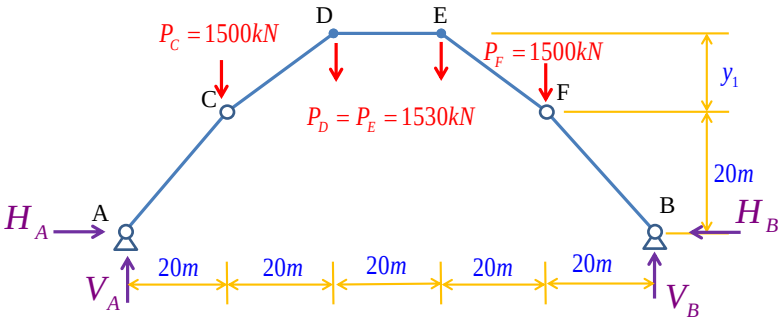
P=30kN e q=75kN/m







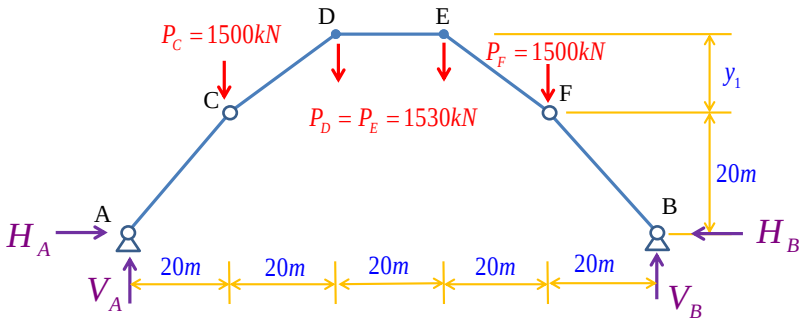
Determinação das cargas equivalentes:



$$P_C = P_F = 75 \times 20 = 1500kN$$

$$P_D = P_E = 1500 + 30 = 1530kN$$

Determinação reações de apoio:

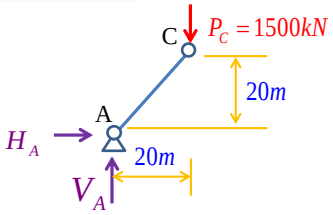


$$\sum F_X = 0 \quad H_A = H_B = 0 \quad \therefore \quad H_A = H_B$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad V_A + V_B - 2 \times 1500 - 2 \times 1530 = 0$$

$$V_A = V_B = 3030kN$$

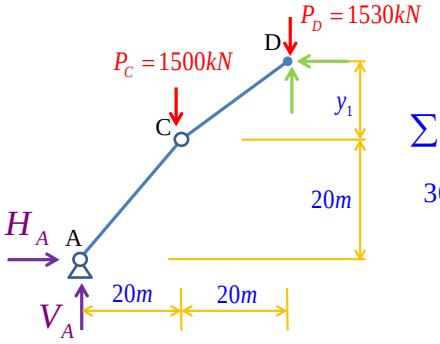
Cortando em "C":



$$\sum M^{E}_{(C)} = V_A \times 20 - H_A \times 20 = 0$$

$$H_A = V_A = 3030kN = H_B$$

Cortando em "D":

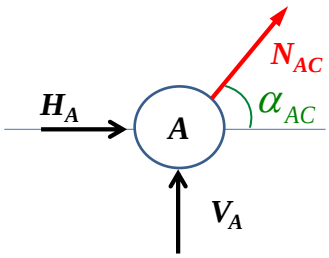


$$\sum M^{E}_{(D)} = V_A \times 40 - H_A \times (20 + y_1) - 1500 \times 20 = 0$$

$$3030 \times 40 - 3030 \times (20 + y_1) - 1500 \times 20 = 0$$

$$y_1 = \frac{30600}{3030} = 10,099m$$

Equilíbrio do Nó A:



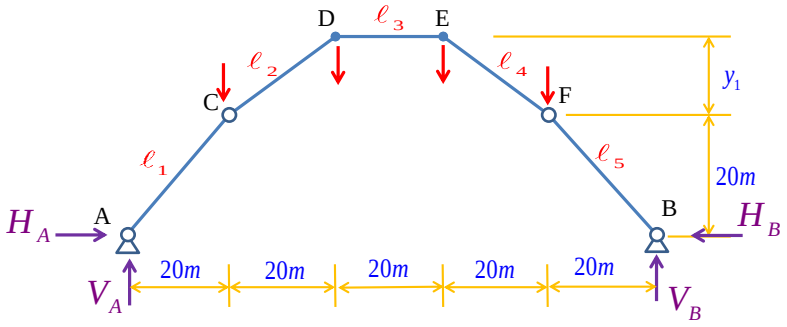
$$\cos\alpha_{AC} = \frac{20}{\sqrt{20^2 + 20^2}} = 0,707$$

$$N_{AC} = \frac{-H_A}{\cos\alpha_{AC}} = -4285,71kN$$

Em geral, para cargas verticais:

$$N_i \cos\alpha_i = H = \text{constante!}$$

Logo, paras as forças normais: $N_i = \frac{H}{\cos\alpha_i}$



i	Δx_i (m)	Δy_i (m)	L_i (m)	Cos α_i	$Ni=-H/\cos\alpha_i$ (kN)
1=5	20,0	20,00	28,28	0,707	-4.285,7
2=4	20,0	10,09	22,40	0,893	-3.393,1
3	20,0	0,00	20,00	1,000	-3.030,0



