4320196 – Física para Engenharia II - Prova P3 - 2012

Observações:

- Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
- A prova tem duração de 2 horas.
- Não somos responsáveis por provas com identificação insuficiente.
- Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
- Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
- Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
- **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
- Caso apareça alguma **raiz que não seja um quadrado perfeito** ou uma **fração irredutível**, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
- Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \qquad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{cases} x' &= \gamma_v (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma_v \left(t - \frac{v.x}{c^2}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} u'_x &= \frac{u_x - v}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \\ u'_{y,z} &= \frac{u_{y,z}}{\gamma_v\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \end{cases}$$

$$\vec{p} = \gamma_u m_0 \vec{u} \qquad E = \gamma_u m_0 c^2$$

$$E = K + m_0 c^2 \qquad E^2 = (pc)^2 + \left(m_0 c^2\right)^2$$

$$\gamma_u^2 u^2 = \left(\gamma_u^2 - 1\right) c^2 \quad m(u) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 = \gamma_u m_0$$

$$f = f_0 \frac{\sqrt{c \pm u}}{\sqrt{c \mp u}}$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + ...$$

Q1 - Uma espaçonave foi contruída com luzes de sinalização dianteira e traseira separadas de $L' = 90\,\text{m}$. Quando viajando a uma velocidade v constante (em relação à Terra), ambas as luzes piscam com frequência de $1\,\text{Hz}$. No entanto, a luz traseira pisca com um atraso τ' em relação à dianteira (medido no referencial próprio da nave).

(a) [1,0] Sendo $\tau' = 0,5\,\mu\text{s}$. Qual a velocidade v da nave para que, vista da superfície da Terra, ela aparente ter apenas uma luz de sinalização? (Ou seja, para o observador na Terra, as duas luzes piscam na mesma posição.)

Para os próximos ítens, considere $v = 4c/5$.

(b) [0,5] Calcule o valor da defasagem τ' para que um observador na Terra observe que as luzes traseira e dianteira da nave pisquem simultaneamente.

(c) [0,5] Qual a distância entre as luzes dianteira e traseira da nave no referencial da Terra?

(d) [0,5] Um intervalo de tempo de $1\,\text{s}$ medido em um relógio fixo na nave, equivale a quantos segundos na Terra?

Solução Q1:

a) R: $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') = 0$, $\Delta x' = L'$ e $\Delta t' = -\tau'$, portanto $v = 90/(0,5 \times 10^{-6}) = 1,8 \times 10^8$ m/s $= 0,6c$.

b) R: $\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2) = 0$, $\Delta x' = L'$ e $\Delta t' = -\tau'$, portanto $\tau' = vL'/c^2 = 0,8 \cdot 90/(3 \times 10^8) = 0,24\,\mu\text{s}$.

c) R: $L = L'/\gamma = 90/(5/3) = 54\,\mathrm{m}$.

d) R: $T = \gamma T' = 5/3 = 1,67\,\mathrm{s}$.

Q2 - Ao longo de uma estrada reta e muito longa, três postes (0, 1, 2) estão espaçados de 300 km cada um. Um observador (S) está parado ao lado do primeiro poste (0), quando as luzes dos outros postes (1 e 2) começam a acender. O observador S observa que, após a luz do poste 0 se acender em $t = 0$, a luz do poste 1 (em $x = 300$ km) chega até ele depois de 10^{-3}s, e a luz do poste 2 (em $x = 600$ km) chega até ele depois de 2×10^{-3}s.

(a) [0,5] Em que instantes, medidos no referencial S, as luzes dos postes 0, 1 e 2 foram ligadas?

(b) [0,5] Um automóvel passa em alta velocidade ($v = 3c/5$) pelo observador S, no momento em que a luz do primeiro poste (o poste "0") é ligada. Assuma que o automóvel viaja no sentido de x positivo. No referencial do motorista desse automóvel (S'), em que instantes e em que locais as luzes dos três postes foram ligadas?

(c) [0,5] No referencial S' acima, qual a ordem temporal em que as luzes dos postes são ligadas?

(d) [1,0] Calcule os instantes em que as luzes dos postes chegam ao motorista, medidos no seu referencial.

Solução Q2:

(a) A luz do poste 1 foi ligada num instante t_1, e chegou ao observador S (que está na origem) em $t_1^o = t_1 + x_1/c$. Como $t_1^o = 10^{-3}s = t_1 + 300km/c$, temos que $t_1 = 0$. O mesmo argumento aplicado ao poste 2 leva a $t_2 = 0$. Portanto, todos os postes foram ligados no instante $t = 0$, medido no referencial S.

(b) Com $v = 3c/5$, $\gamma = 5/4$. Usando as transformações de Lorentz, temos que:

$$x'_n = \gamma(x_n - vt_n) = \gamma(n \times 300\,\mathrm{km} - 0)\ ,$$

onde $n = 0, 1, 2$ indica os eventos correspondentes à ligação das luzes de cada um dos postes. Portanto, $x'_0 = 0$, $x'_1 = 5/4 \times 1 \times 300\,\mathrm{km} = 375\,\mathrm{km}$ e $x'_2 = 5/4 \times 2 \times 300\,\mathrm{km} = 750\,\mathrm{km}$. Ou seja, $x'_n = n \times 375$ km $= n \times (5/4) \times 300$ km.

Da mesma forma, para os instantes em que os postes foram ligados:

$$t'_n = \gamma(t_n - \frac{v}{c^2}x_n) = -n \times \gamma\frac{v}{c^2}300\,\mathrm{km} = -n \times \frac{3}{4} \times 10^{-3}\,\mathrm{s}\ .$$

(c) Como $t'_2 = -1,5 \times 10^{-3}$ s, $t'_1 = -0,75 \times 10^{-3}$ s e $t'_0 = 0$, o poste 2 é o primeiro a acender, o poste 1 é o segundo a acender, e o poste 0 é o terceiro e último a acender.

(d) a luz viaja sempre à mesma velocidade, $c = 3 \times 10^5$ km/s, em qualquer referencial. As luzes dos três postes são ligadas nos instantes t'_n, nas posições x'_n, e têm que caminhar essa distância (x'_n) até a origem de S'. Portanto, os instantes em que o motorista pode observar pela primeira vez essas luzes são:

$$t'^o_n = t'_n + \frac{x'_n}{c} = n \times \left(-\frac{3}{4} \times 10^{-3}\,s + \frac{\frac{5}{4} \times 300\,\mathrm{km}}{3 \times 10^5\,\mathrm{km/s}}\right) = n \times \frac{1}{2} \times 10^{-3}\,\mathrm{s}\ .$$

Q3 - Tiroteio relativístico. Carlos e José são dois "cowboys" espaciais e estão em repouso um em relação ao outro em diferentes posições do espaço. Eles disparam balas (de massa de repouso m_0) um na direção do outro. A bala que sai da arma de Carlos tem velocidade $+\frac{4}{5}c$ em relação a um referencial S em que os cowboys estão em repouso.

Para cada uma das observações feitas por José acerca do que está acontecendo, descreva a observação correspondente feita pelo âncora de reportagem, Pedro, que está no sistema de referência S', escolhido de tal forma que as balas disparadas por Carlos estão em repouso.

(a) [0,5] José fala: "Minha distância de Carlos é de 10 km." Qual é a distância entre José e Carlos que Pedro relata?

(b) [0,5] José: "As balas saem da minha arma com velocidade igual à das balas de Carlos mas em sentido contrário." Para Pedro, qual é a velocidade (módulo e sentido) das balas disparadas pela arma de José?

(c) [0,75] José: "Duas das nossas balas colidiram elasticamente; o momento relativístico total do sistema se conserva." Para Pedro há conservação do momento? Ainda segundo Pedro, qual é o valor do momento relativístico total?

(d) [0,75] José: "Depois dessa colisão, a bala da arma de Carlos foi espalhada de um ângulo de 60^0 e o módulo da sua velocidade não mudou." Qual é o ângulo de espalhamento observado por Pedro? (Expresse sua resposta em termos da tangente desse ângulo.)

Solução Q3:

(a) A distância medida por José, entre ele e Carlos 10 km foi medida no referencial S em que eles estão em repouso correspondendo a um intervalo de comprimento próprio. Assim no referencial de Pedro S' que se move com velocidade $v = \frac{4c}{5}$ em relação ao referencial S o intervalo de comprimento sofrerá uma contração.

$L = \frac{L_0}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{5}{3}$

$L = \frac{3}{5}10 \;\text{ km} = 6 \text{ km}.$

Pedro relata que a distância entre José e Carlos é de 6 km

(b) A velocidade medida por José tem módulo $4c/5$ e e o sentido se move na direção de Carlos (sentido negativo de S). Portanto, no referencial S, $u_x = -4c/5$.

A velocidade da bala no referencial de Pedro S' é dada pela transformação das velocidades, considerando $v = \frac{4c}{5}$:

$u_x^{'} = \frac{u_x - v}{1-\frac{vu_x}{c^2}}$

$$u_x^{'} = \frac{(-\frac{4c}{5}) - (\frac{4c}{5})}{1 - \frac{(\frac{4c}{5})(-\frac{4c}{5})}{c^2}} = \frac{-8c}{5}\frac{25}{41} = \frac{-40c}{41}$$

Pedro relata que a velocidade das balas disparadas pela arma de José é $\boxed{u'_x = \frac{-40c}{41}}$

(c) O momento relativístico total de um sistema sempre se conserva em qualquer referencial inercial.

O Momento total do sistema segundo Pedro será:

$$P' = m(u'_x)u'_x = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2_x}{c^2}}}u'_x$$

Como $\sqrt{1 - \frac{u'^2_x}{c^2}} = \sqrt{\frac{1681-1600}{(41)^2}} = \sqrt{\frac{81}{(41)^2}} = \frac{9}{41}$, temos

$$P' = m_0.\frac{41}{9}.\left(\frac{-40c}{41}\right) \Rightarrow \boxed{P' = -\frac{40}{9}m_0 c}.$$

(d) No referencial S as componentes horizontal e vertical da bala espalhada de um ângulo de $\theta = 60^0$ são:

$$u_y = v.\,\mathrm{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{3}v}{2} = \frac{2\sqrt{3}c}{5}$$

$$u_x = v.\cos(\theta) = \frac{v}{2} = \frac{2c}{5}$$

No referencial S'

$\frac{u'_y}{u'_x} = tg(\theta')$ sendo

$$u'_x = \frac{u_x - v}{(1-\frac{vu_x}{c^2})}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1-\frac{vu_x}{c^2})}$$

Como $u_x - v = -\frac{2c}{5}$ e $\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) = \frac{25-8}{25} = \frac{17}{25}$, temos

$$u'_x = \frac{-10c}{17}$$

$$u'_y = \frac{6\sqrt{3}c}{17}$$

Logo

$$\frac{u'_y}{u'_x} = \frac{-6\sqrt{3}}{10}$$

$$\boxed{\tan\theta' = \frac{-6\sqrt{3}}{10}}$$

Q4 - O acelerador de partículas LHC ("Large Hadron Collider"), construído na fronteira entre a Suíça e a França, produz feixes de prótons com energia relativística E (medida no referencial do laboratório S).

(a) [0,5] Sendo $E = 5$ TeV , calcule a velocidade do próton acelerado medida no referencial do laboratório, S. Considere que 1 TeV $= 10^{12}$ eV e que a energia de repouso do próton é de 1 GeV $= 10^9$ eV. **Dica:** Como o valor de v é muito próximo ao da luz, use $v = (1 - \Delta)c$ e encontre a sua resposta em termos de Δ. Lembre que se $\varepsilon \ll 1$ temos que $\sqrt{1-\varepsilon} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

(b) [1,0] Um próton A com energia E_A colide frontalmente com outro próton B com a mesma energia, mas viajando em direção contrária. Essa colisão produz uma partícula não vista anteriormente X, através da reação $A + B \Rightarrow X$. Calcule a massa de repouso para esta partícula em termos de E_A.

(c) [1,0] Em um outro experimento, um próton A com fator relativístico γ (medido no referencial do laboratório S) e massa de repouso m_0 colide frontalmente com outro próton C **em repouso**. Essa colisão produz uma nova partícula W, através da reação $A+C \Rightarrow W$. Calcule a massa de repouso de W em termos de γ e m_0.

Solução Q4:

(a) $E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{5\times 10^{12} eV}{1.10^9 eV} = 5000$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\gamma^{-2}} = \sqrt{1 - 4\times 10^{-8}}$

usando $\varepsilon \ll 1$ temos que $\sqrt{1-\varepsilon} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

$\frac{v}{c} \approx 1 - 2\times 10^{-8}$

Como $v = (1-\Delta)c$

$v \approx (1 - 2\times 10^{-8})c \Rightarrow \boxed{\Delta = 2\times 10^{-8}}$

(b) Conservação de momento

$\gamma m_0 v - \gamma m_0 v = 0 = \gamma' m_X v_X$

Portanto $v_X = 0$ e a partícula X estará em repouso, assim:

Conservação de energia

$2\gamma m_0 c^2 = m_X c^2$

Escrevendo em termos de E_A

$2E_A = m_X c^2 \Rightarrow \boxed{m_X = \frac{2E_A}{c^2}}$

(d)

Conservação de momento: $\gamma m_0 v + 0 = \gamma' m_W v_W$ (1)

Conservação de energia: $\gamma m_0 c^2 + m_0 c^2 = \gamma' m_W c^2 \Rightarrow \gamma' m_W = (\gamma + 1)\, m_0$ (2)

Substituindo em (1):

$v_W = \frac{\gamma}{(\gamma+1)} v \Rightarrow \left(\frac{v_W}{c}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$

ou seja:

$$\left(\frac{1}{\gamma'}\right)^2 = 1 - \left(\frac{v_W}{c}\right)^2 = \frac{(\gamma+1)^2 - \gamma^2\left(\frac{v}{c}\right)^2}{(\gamma+1)^2} = \frac{\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + 1 + 2\gamma}{(\gamma+1)^2} = \frac{2\,(1+\gamma)}{(\gamma+1)^2}$$

de modo que $\gamma' = \frac{(\gamma+1)}{\sqrt{2(1+\gamma)}}$. Substituindo em (2):

$\boxed{m_W = \sqrt{2\,(1+\gamma)}\, m_0}$