FEP2196 – Física para Engenharia II

Prova P3 - 2010

- A prova tem duração de 2 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
- Apresente sua identidade com foto ao assinar a lista de presença.
- Preencha de forma legível todas as folhas de resposta com seu nome, número USP e número da turma.
- Resolva cada exercício a partir da frente da folha com a numeração correspondente.
- Justifique todas as respostas com fórmulas, cálculos intermediários, e comentários (sucintos) quando necessário, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
- Caso apareça alguma raiz que não seja um quadrado perfeito, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).

Formulário

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt) \qquad y(x,t) = A\,\cos(kx \mp \omega t + \varphi)$$

$$\omega = kv \qquad \tau = \tfrac{2\pi}{\omega} \qquad \lambda = \tfrac{2\pi}{k} \qquad v = \sqrt{\tfrac{T}{\mu}} \qquad I = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2 \qquad k_n = n\tfrac{\pi}{L}$$

$A\sin(kx-\omega t) + A\sin(kx+\omega t) = 2A\sin(kx)\sin(\omega t)$
$A\cos(kx-\omega t) + A\cos(kx+\omega t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$

$$f = f_0\frac{\left(1 \pm \frac{u}{v_s}\right)}{\left(1 \mp \frac{V}{v_s}\right)} \quad \begin{cases} u \rightarrow \text{observador} \\ V \rightarrow \text{fonte} \end{cases} \qquad f = f_0\frac{\sqrt{1 \mp \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 \pm \frac{v}{c}}}$$

$m\vec{a'} = \vec{F} - m\vec{A} \qquad m\vec{a'} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{in}}$

$\vec{r} = r\hat{r} \qquad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \qquad \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta} \qquad \vec{F}_c = mw^2 r\,\hat{r} \qquad \vec{F}_{Cor} = 2mwV'_\theta\,\hat{r} - 2mwV'_r\,\hat{\theta}$

$\cos(a \pm b) = \cos(a)cos(b) \mp \text{sen}(a)\text{sen}(b) \qquad \text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a)\cos(b) \pm \text{sen}(b)\cos(a)$

$1,01/0,97 \simeq 1,04$	$1,02/0,97 \simeq 1,05$	$1,03/0,97 \simeq 1,06$	$1,04/0,97 \simeq 1,07$	$1,05/0,97 \simeq 1,08$
$1,01/0,98 \simeq 1,03$	$1,02/0,98 \simeq 1,04$	$1,03/0,98 \simeq 1,05$	$1,04/0,98 \simeq 1,06$	$1,05/0,98 \simeq 1,07$
$1,01/0,99 \simeq 1,02$	$1,02/0,99 \simeq 1,03$	$1,03/0,99 \simeq 1,04$	$1,04/0,99 \simeq 1,05$	$1,05/0,99 \simeq 1,06$

Questão 1: Onda progressiva

O perfil de uma onda transversal progressiva em uma corda muito longa é dado, em unidades do sistema internacional por:

$$y(x,t) = 2,0 \times 10^{-2}\ \cos(2\pi(0,5x + 10t))$$

Sabendo que a tensão aplicada na corda é de 100 N, determine:

(a) [0,5] a amplitude de vibração desta corda;

(b) [0,5] o comprimento de onda e a frequencia (em Hz);

(c) [0,5] o sentido e a velocidade de propagação da onda;

(d) [1,0] a distância, ao longo da corda, entre dois pontos cuja diferença de fase é $\pi/6$;

Solução Q1:

(a) [0,5] A amplitude de vibração desta corda;

Forma geral da onda progressiva é

$y(x,t) = A\ \cos(kx \pm \omega t + \delta)$

A é o valor máximo de $y(x,t)$, portanto

$A = 2,0 \times 10^{-2} m$

(b) [0,5] O comprimento de onda e a frequencia (em Hz);

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Como $k = 2\pi.0,5$

temos

$\lambda = 2,0m$

$\omega = 2\pi\nu$. Como $\omega = 2\pi.10$

temos

$\nu = 10Hz$

(c) [0,5] O sentido e a velocidade de propagação da onda;

A fase da onda é neste caso $\phi = kx + \omega t$ o que implica que a onda se propaga no sentido negativo do eixo x.

$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi.10}{2\pi.0,5} = 20m/s$

(d) [1,0] A distância, ao longo da corda, entre dois pontos cuja diferença de fase é $\pi/6$;

Seja ϕ_1 a fase do ponto x_1 e ϕ_2 a fase do ponto x_2 no instante t, assim

$\phi_1 = 2\pi(0,5x_1 + 10t)$

e

$\phi_2 = 2\pi(0,5x_2 + 10t)$

Logo, a diferença de fase entre eles é

$\phi_2 - \phi_1 = 2\pi.0,5(x_2 - x_1)$,

que pelo enunciado é $\frac{\pi}{6}$. Assim, a distância entre estes dois pontos é:

$x_2 - x_1 = \frac{1}{6} = 0,17m$

(Obs: $x_2 - x_1 = \frac{1}{6} \pm n\lambda$ também será aceito).

Questão 2: Onda estacionária

Uma corda de comprimento L presa nas extremidades $x = 0$ e $x = L$, submetida a uma tensão de 96 N, oscila no terceiro harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento transversal da corda é dado por

$$y(x,t) = 5\, sen\left(\frac{\pi}{2}\, x\right)\, sen\,(6\pi t)$$

onde x e y são dados em metros e t em segundos.

(a) [0,5] Qual é o comprimento L da corda?

(b) [0,5] Qual é a massa da corda?

(c) [1,0] Calcule a velocidade transversal máxima de um ponto situado sobre um ventre da onda.

(d) [0,5] Se a corda oscilar no quinto harmônico, qual será o período de oscilação?

Solução Q2:

(a) Qual é o comprimento L da corda? [0,5 pts] (Resp: $L = 6m$)

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \;\Rightarrow\; k_3 = \frac{3\pi}{L} = \frac{\pi}{2}\, m^{-1} \;\Rightarrow\; L = 3 \times 2m \;\Rightarrow\; L = 6m$$

(b) Qual é a massa da corda? [0,5 pts] (Resp: $m = 4,0Kg$)

$$m = \mu L = \tfrac{T}{v^2} L$$

$$v = \frac{\omega}{k_3} = \frac{6\pi\, rad/s}{(\pi/2m^{-1})} \;\Rightarrow\; v = 12m/s$$

$$m = \frac{T}{v^2} L = \frac{96N}{(12m/s)^2}\,(6m) \;\Rightarrow\; m = 4,0Kg$$

(c) Calcule a velocidade tranversal máxima de um ponto situado sobre um ventre a onda. [1,0 pts] (Resp: $v_y^{max} = 30\pi m/s$)

$$v_y(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 5\, sen\left(\frac{x\pi}{2}\right)(6\pi)\cos(6\pi t)$$
$$v_y(x,t) = 30\pi\; sen\left(\frac{x\pi}{2}\right)\cos(6\pi t)$$

Os ventres dessa onda ocorrem em $x = 1m, 3m$ e $5m$. Considerando o primeiro ventre ($x = 1m$) e sabendo que a velocidade transversal é máxima para os instantes t em que $\cos(6\pi t) = 1$, temos

$$\begin{aligned} v_y^{max} &= 30\pi\; sen\left(\frac{\pi}{2}\, 1\right) \\ v_y^{max} &= 30\pi\; m/s \end{aligned}$$

(d) Se a corda oscilar no quinto harmônico, qual será o período de oscilação? [0,5 pts] (Resp: $T_5 = 0,2s$)

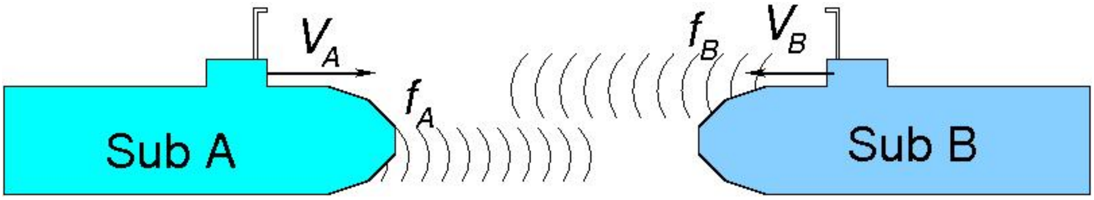
$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = n\frac{\pi}{L} \;\Rightarrow\; \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\lambda_5 = \frac{2L}{5} = \frac{2(6m)}{5} = 2,4m$$

$$T_5 = \frac{1}{f_5} = \frac{\lambda_5}{f_5\lambda_5} = \frac{\lambda_5}{v} \;\Rightarrow\; T_5 = \frac{2,4m}{12m/s} \;\Rightarrow\; T_5 = 0,2s$$

Questão 3: Guerra de Submarinos

Um submarino (Sub A), navegando a uma velocidade $V_A = 30$ m/s, envia um sinal de sonar (onda sonora na água) com frequência $f_A = 980$ Hz. O sinal é refletido pelo casco de um submarino inimigo (Sub B) que viaja com velocidade V_B na direção oposta (vide figura). Considere a velocidade do som na água como sendo $v_s = 1500$ m/s e despreze quaisquer efeitos de interferência.



(a) [1,0] Se a frequência do sinal medido pelo submarino B é $f_B = 1020Hz$, qual a velocidade V_B?

(b) [0,5] Qual a frequência f_A^r do sinal refletido, medida pelo submarino A?

Considere que o submarino B seja dotado de um sistema de contra-medidas que (1) suprime completamente a reflexão do sinal enviado pelo Sub A, (2) altera a velocidade do submarino para $V_B' = 15$m/s, e (3) envia um outro sinal de sonar (sinal "falso") com frequência $f_B' = 1000$ Hz, com o intuito de confundir o inimigo.

(c) [0,5] Nesse caso, qual será a frequência do sinal "falso" f_A' medida pelo Submarino A?

(d) [0,5] Se os engenheiros do submarino A forem de fato enganados e pensarem que esse sinal é a reflexão do sinal original, que valor obterão para a velocidade (e direção) do submarino B?

Solução Q3: item (a): Nesse caso, sub A é a fonte e sub B é o observador e ambos se aproximam, logo ($V_A/v_s = 0.02$):

$$f_B = f_A \frac{1 + \frac{V_B}{v_s}}{1 - \frac{V_A}{v_s}} \rightarrow 1020 = 980 \frac{1 + \frac{V_B}{v_s}}{0.98} \rightarrow V_B = 0.02.v_s = 30 \text{ m/s}$$

item (b): A frequência do sinal refletido será f_B já que sub B está em movimento. Nesse caso, sub B é a fonte e sub A é o observador (ambos se aproximam), logo ($V_A/v_s = 0.02$):

$$f_A^r = f_B \frac{1 + \frac{V_A}{v_s}}{1 - \frac{V_B}{v_s}} \rightarrow f_A^r = 1020 \frac{1.02}{0.98} \rightarrow f_A^r \simeq 1060.8 \text{ Hz}$$

item (c): A frequência do sinal "falso" medido por Sub A será (sub B é a fonte e sub A é o observador, ambos se aproximam, $V_A/v_s = 0.02$, $V_B'/v_s = 0.01$:

$$f_A' = f_B' \frac{1 + \frac{V_A}{v_s}}{1 - \frac{V_B'}{v_s}} \rightarrow f_A' = 1000 \frac{1.02}{0.99} \rightarrow f_A' \simeq 1030 \text{ Hz}$$

item (d): Se a tripulação do Submarino A pensar que o sinal "falso" é, na verdade, o sinal refletido, deduzirão que f_A' e f_A estarão relacionadas através de V_A e da velocidade "falsa" V_B^{falsa} (assumida na direção contrária a V_A) por:

$$f_A' = \left[f_A \frac{v_s + V_B^{\text{falsa}}}{v_s - V_A} \right] \frac{v_s + V_A}{v_s - V_B^{\text{falsa}}}$$

Resolvendo para V_B^{falsa}, obtém-se:

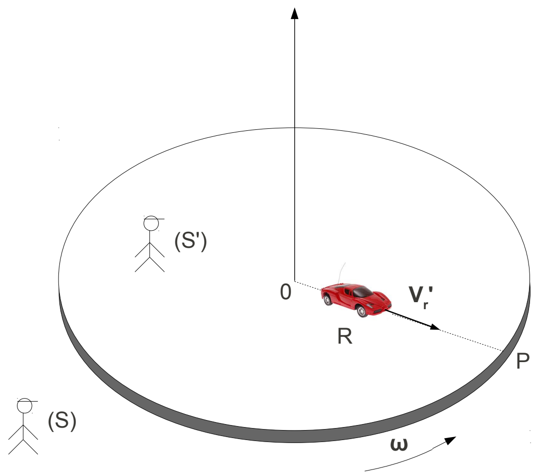
$$v_s + V_B^{\text{falsa}} = \frac{f_A' \left(1 - \frac{V_A}{v_s}\right)}{f_A \left(1 + \frac{V_A}{v_s}\right)} \left(v_s - V_B^{\text{falsa}}\right) = \frac{1030 \;.\; 0,98}{980 \;.\; 1,02} \left(v_s - V_B^{\text{falsa}}\right) \simeq 1.0098 \left(v_s - V_B^{\text{falsa}}\right)$$

$$\rightarrow V_B^{\text{falsa}} \simeq v_s \frac{1.0098 - 1}{1.0098 + 1} = 7.3 \text{ m/s}$$

Usando ou seja, pensarão que o Submarino B está se movendo a uma velocidade $V_B^{\text{falsa}} \simeq 7.3$ m/s em direção ao Sub A (Obs: $V_B^{\text{falsa}} \simeq 0$, ou seja, tomando $1.0098 \approx 1$, também será aceito).

Questão 4: Carrinho em uma plataforma

Um disco horizontal com raio R gira no sentido anti-horário em relação a um referencial inercial, com uma velocidade angular ω, ao redor de um eixo vertical que passa pelo seu centro O. Um carrinho de controle remoto, de massa m, desloca-se do ponto O em direção ao ponto P com velocidade radial constante $\vec{V}_r' = V_r' \; \hat{r}$ em relação a um referencial não inercial fixo no disco, conforme indicado na figura. Considere que o carrinho se move sem deslizar e que o módulo da força de atrito entre o carrinho e o disco é dado por $|\vec{F}_{at}| = \mu_e \,.m \,.g$, sendo μ_e o coeficiente de atrito estático. Do ponto de vista de um observador em repouso no disco:



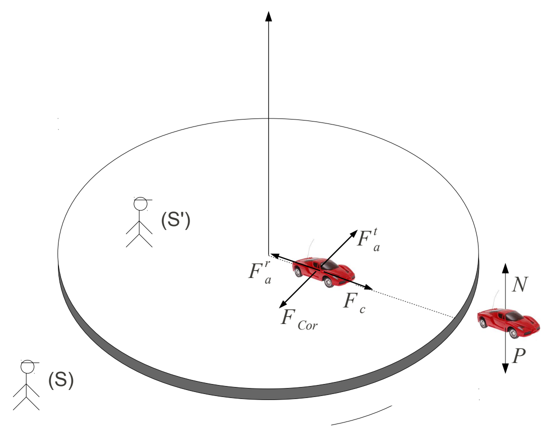
(a) [1,0] desenhe um diagrama com todas as forças (físicas e inerciais) que agem sobre o carrinho numa posição r qualquer situada entre a linha $\overline{OP}$.

(b) [1,0] nas mesmas condições do item anterior, determine o módulo da força de atrito na direção radial $\hat{r}$ e na direção transversal $\hat{\theta}$ que atua sobre o carrinho.

(c) [0,5] supondo agora $\mu_e = 0.5$, $\omega = 2.0 \; rad/s$ e $R = 100 \; cm$, calcule a máxima velocidade radial V_r' com que o carrinho pode se deslocar para atingir o ponto P do disco sem deslizar? Considere $g = 10 \; m/s^2$.

Solução Q4:

a)



b)

$$\vec{F}^r_a + \vec{F}_c = 0 \Rightarrow \vec{F}^r_a = -mw^2 r \; \hat{r}$$

$$\vec{F}^t_a + \vec{F}_{Cor} = 0 \Rightarrow \vec{F}^t_a = 2mwV_r' \; \hat{\theta}$$

c)

$$F_a = \mu_e mg = \sqrt{(F^r_a)^2 + (F^t_a)^2}$$

$$F_a = \mu_e mg = \sqrt{(-mw^2 r)^2 + (2mwV_r')^2}$$

$$(\mu_e g)^2 = (w^2 r)^2 + (2wV_r')^2$$

$$V_r' = \sqrt{\frac{(\mu_e g)^2 - (w^2 r)^2}{4w^2}}$$

$$V_r' = \sqrt{\frac{25-16}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$V_r' = 0.75 \; m/s$$